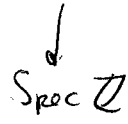


Исправления:

Замечание: в прошлый раз мы строили S по K' ,



S должна быть связной

$$X_i \longrightarrow (\cos k_{i-1} (S k_{i-1} X))_i \text{ — правильно}$$

Fontaine — Mazur conjecture: K -числовое поле
 неприводимое \mathbb{Q}_p -представление ρ p -адича над всеми точками над \mathbb{C}
 почти всюду неразветвленное.

↑
 неприводимый подфактор в $H^?_{\mathbb{Q}_p, \text{et}}(\dots)(?)$ ← с подструктурой
 многообразия над K

Чистая структура Ходжа (PHS) веса i ($i \in \mathbb{Z}$)

- конечно порожденная абелева группа H , $H_{\mathbb{C}} = H \otimes \mathbb{C}$
 \mathbb{Q} -пространство
- фильтрация $F^p H_{\mathbb{C}}$

- разложение Ходжа:

$$H = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q} \quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$$

$$F^p H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{j \geq p} H^{i-j, j}$$

$$F^p H_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^{i-p+1} H_{\mathbb{C}}} = 0$$

$$H^{p,q} = F^p H_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^{i-p} H_{\mathbb{C}}}$$

морфизмы —
 голом. групп,
 сохр. фильтрацию
 и разл. Ходжа

→ абелева группа, тензорная, не полупроста

Структуры Ходжа зависят от вложения $K \hookrightarrow \mathbb{C}$

X — гладкое проективное

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1 X \longrightarrow \Omega^2 X \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega^d X$$

$$F^p \Omega^*(X) = W_{2p} \Omega^*(X)$$

$$\downarrow$$

$$\dots \rightarrow \Omega^p X \rightarrow \dots$$

(данные
 Постникова:
 ст. Георгиев
 Манчи)

$$\rightsquigarrow H^*(X_{\mathbb{C}}, F^p \Omega^* X) \longrightarrow H^*(X, \Omega^* X) = H^*_{\text{sing}}(X, \mathbb{C})$$

↖ образ = $F^p H^*_{\mathbb{C}}(X)$

$$E_1^{i,j} = H^i(X, \Omega^j X) - \text{первый лист}$$

$$E_2^{i,j}$$

подфактор $E_1^{i,j}$

$$H^{p,q} \cong H^q(X, \Omega^p X)$$

→ эта спектральная последовательность вырождается в $E_1^{i,j}$

$$(R\pi_*)^m \mathbb{Z} \subseteq (R\pi_*)^m \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

$$\cong H^{2m}$$

— структура веса $2m$,

которая называется $\mathbb{Z}(-m)$, $\mathbb{Q}(-m)$ соответственно

Свойства:

① $H_i^i(P)$, P — гладкое проективное

PHS веса i

коhomологическая теория Вейля

② $P = \mathbb{P}^n$

$$i = 2k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$H^i(P) = \mathbb{Z}(-k)$$



③ Фуниторность

ф-ла Кюннета + д-ль Пуанкаре

Гипотеза Ходжа (стоимость: \$1000000)

$i > 0$, X — гладкое проективное

$$\text{Im}(\mathcal{C} : S^i H^0(X)) \longrightarrow H_{\text{sing}}^{2i}(X, \mathbb{C}) = (H^{i,i}(X) \wedge H_{\text{sing}}^{2i}(X, \mathbb{Q}))^{(i)}$$

$$\searrow \qquad \qquad \qquad \nearrow$$

$$H_{\text{sing}}^{2i}(X, \mathbb{Q})$$

Замечание:

$$H^{i,i}(X) \wedge H_{\text{sing}}^{2i}(X, \mathbb{Q})$$

① Ходжевы классы дают подструктуру Ходжа в $H^{2i}(X, \mathbb{C})$

② γ — простой цикл размерности i в X
(подмногообразие)

$$\tilde{\gamma} \longrightarrow \gamma \hookrightarrow X$$

$$H^*(X) \longrightarrow H^*(\tilde{\gamma}), \quad \text{двойственность Пуанкаре:}$$

$$H^0(\tilde{\gamma}) \longrightarrow H^{2i}(X)^{(i)}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

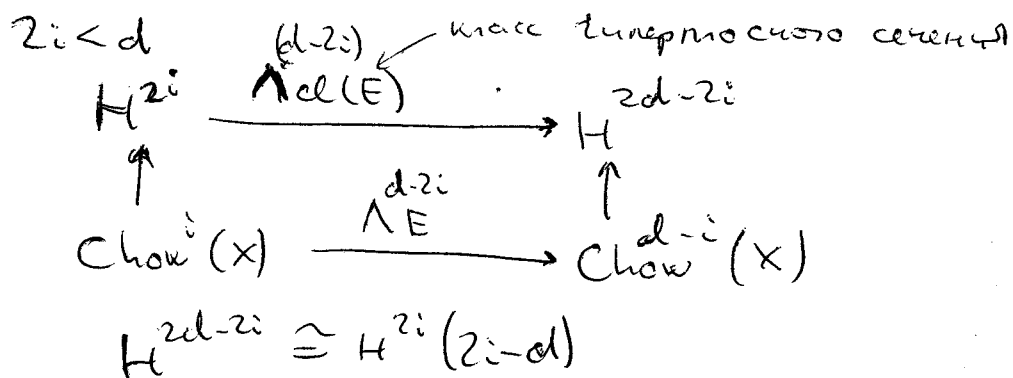
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}(\gamma)$$

$$\cong H_{\text{Hodge}}^{2i} = \mathbb{Q}(-i)^{\oplus n}$$

Гипотеза известна для $i=1$ (даже с целыми коэффициентами), а для $i > 1$ с целыми коэффициентами она неверна.

Следствия

- ① Гипотеза Ходжа \Rightarrow мотивы относительно $H_{2i-1}(\mathbb{C})$ вкладываются в категорию чистых структур Ходжа: $\text{Mot}_{H_{2i-1}}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \bigoplus_i \text{PHS}_i$
Факт-во: аналогично утверждению про тип Тейта
- ② Гипотеза Ходжа \Rightarrow гипотеза типа Лершеца



\Downarrow
этот изоморфизм сохраняет хodgeвские массы

Структура Ходжа называется поляризованной, если веса i

существует изоморфизм $H \cong \hat{H}(-i)$
который задает $(-1)^i$ -знакопеременную невырожденную форму на $H_{\mathbb{Q}}$

то есть, $\rho: H \times H \rightarrow \mathbb{Q}(-i)$ — морфизм структур Ходжа

i — четное \rightsquigarrow симметричная, полож. определенная
 i — нечетное \rightsquigarrow антисимметричная

$\rho(X, i^m \bar{X}) \geq 0$ — пол. определенная.
RRHS — полная подкатегория поляризованных структур Ходжа

Утверждение

① RRHS — полупростая абелева категория

② $H^i(X)$ — RRHS

Факт-во (1) H — поляризованное, H' — подструктура $\rightsquigarrow H = H' \oplus H'^{\perp}$

② $H^i \wedge \text{cl}(E) \xrightarrow{d-i} H^{2d-i}$ \rightsquigarrow хочется

$H^i \times H^{2d-i} \rightarrow \mathbb{Q}(-d) = H^{2d}(X)$

(проблема в том, что это обычно вырождено)

$$H^{i-2} \wedge \mathcal{O}(E) \hookrightarrow H^i \xrightarrow{\quad} H^{2d-i} \wedge \mathcal{O}(E) \xrightarrow{\quad} H^{2d-i-2}$$

Назовем

примитивным, если он лежит в

$$P^i H^i = \text{Ker} (H^i \rightarrow H^{2d-2i+2})$$

$$\leadsto H^i \cong \underbrace{P^i H^i}_{\gamma} \oplus \underbrace{I_{\text{im}} H^{i-2}}_{\alpha}$$

$$\langle \gamma, \mathcal{O}(E) \wedge \alpha \rangle = \langle \gamma, \mathcal{O}(E) \wedge \alpha \rangle = 0$$

примитивное разложение

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad H^i \cong \bigoplus_{k \geq 0} P^{i-2k}(-k)$$

$$H = H'^{\oplus} \oplus H''^{\oplus} \quad \text{— и просуммируем по всем } k, \text{ со знаками!}$$

$$P = \bigoplus P^k$$

Взаиморепенность этой формы — Hodge (тоже называется) гипотеза Ходжа — для чан $k > 0$ для эллиптических — неизвестна.

③ гипотеза Ходжа \Rightarrow гипотеза ①

$$\text{Mot}_{H_{\text{sing}}} \hookrightarrow \bigoplus PHS_i$$

↓ абелева полупростая \rightsquigarrow Тачика \rightsquigarrow это чашечка экв-ств.

GHC — обобщенная гипотеза Ходжа

$$\text{im Ker}(H^i(X) \rightarrow H^i(U)) \text{ — максимальная подструктура Ходжа в } H^i(X, \mathbb{C}) \text{ — коразмерности } c \text{ в } X$$

$$H^c \xrightarrow{\omega \wedge PD} GHC \quad (X \wedge E^i) \times C \quad \text{кривая} \quad \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q} \quad p, q \geq c$$

Замечание $H^c \Rightarrow \exists$ разложение Кюннета

Смешанная структура Ходжа MHS:

$$\mathbb{Z} \text{ или } \mathbb{Q}\text{-мод } H \oplus F^p H \oplus$$

$\pm W_i H$

(возрастающая
~~структура~~

структура

(весовая)

т.ч. F задает структуру Ходжа
веса i на $G_{\mathbb{R}}^W$

Узв.

MHS — абелева категория (с рациональными коэффициентами!)

$G_{\mathbb{R}}^i$ — точные эндоморфизмы

Есть расширения даже между полями \mathbb{R} и \mathbb{C} структурами
разных весов

Про представления Галуа:

Над \mathbb{F}_q разные веса разделяются, над замкнутыми полями \mathbb{C} — нет

→ есть смешанные представления Галуа: n -ый грантор веса n
— абелева, но не точная подкатегория