

Исправления:

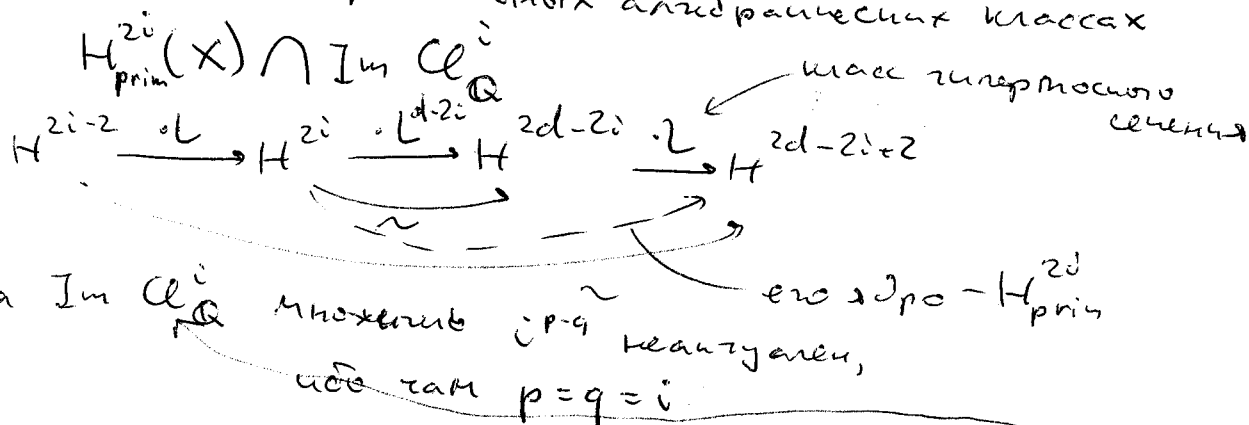
① В прошивке раз про поляризации $P(SX, 2)$

$$C_{nm} = \dots - i^{p-q}$$

т.е. поляризация — не полож. опред. форма
на четных/нечетных искомых
нужна такая же знаа

② Нет — не поляризуемы в разумном смысле (нужно решение Ходжа)

③ гипотеза Ходжа: лог. опр. $P(-, -)$ на
примитивных алгебраических классах



$L + Hd_g \Rightarrow \mathbb{D}$ — достаточно проверить сдвигание на этих классах
в char $p > 0$ Hd_g ничто доказывать не умеет

Еще примеры:

$H^0 \cong \bigoplus_{p+q=0} H^{p,q}$ — эффективна, если $H^{p,q} = \{0\}$ при $p < 0$ или $q < 0$

$H^i(X)$ — эффективна!

H^0 : вес 0, никакого разложения, никакой фильтрации — тривиальная

H^1 : $H^1_C = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$
откуда берется такое разложение?

(структура Ходжа нечетного веса четномерна! (в силу симметрии $H^{p,q} = H^{q,p}$))

$$\Lambda \xrightarrow{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$$

решетка

$$\Lambda \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$$

$$\Lambda \otimes \mathbb{R} = \mathbb{C}^n$$

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

мы построили эв-ство
решетка \rightarrow структура Ходжа

это эв-ство категорий

Альтернативное описание фибрации Ходжа

$$\mathbb{C}^* \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \\ x \text{ на } \mathbb{H}^{\text{P}^q} : x^{\text{P}-q}$$

Смешанная структура Ходжа **MHS**:

- группа
- F^p на $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$
- фибрация весов (возрастающая) W_i
и $G_{\mathbb{R}^n}$ — чистая структура Ходжа веса n

откуда они берутся?

идеи с нормальными пересечениями

пусть $U = X \setminus \bigcup D_i, \mathcal{D}$

(простая идея: взять многообразие комплексов de Rham — но это плохо!)

Вводится логарифмический комплекс de Rham

$$(\mathcal{R}_X^* \subset) \mathcal{R}_X^* (\log \mathcal{D}) \subset \bigoplus_j \mathcal{R}_U^* \quad j: U \hookrightarrow X$$

(то есть ограничить поведение \mathcal{R}_X^* на \mathcal{D})

$$W_m(\mathcal{R}_X^i(\log \mathcal{D})) = \sum_{k \leq m} \mathcal{R}^{i-k}$$

$$\bigwedge_i \mathcal{R}_U^i$$

$$\frac{dz_i}{z_i} \text{ — локал. коорд., соотв. } D_i$$

де Рам-комплекс

Локально имеет вид $\bigoplus \frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \frac{dz_{i_2}}{z_{i_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{i_k}}{z_{i_k}} \wedge \mathcal{R}^{i-k}$
 i_1, \dots, i_k — различные

см. Peters, Steenbrink, Mixed Hodge Structures, p. 90

$$\mathcal{R}_X^{\perp}(\log \mathcal{D}) \xrightarrow{\text{локально в } D_{i_1} \wedge \dots \wedge D_{i_k}} \bigoplus_k \frac{\partial z_{i_k}}{z_{i_k}} \circ \bigoplus \text{ все как обычно}$$

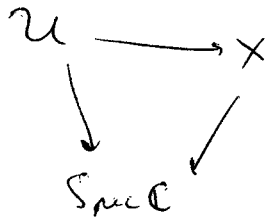
$\mathcal{R}_X^p(\log \mathcal{D})$ — правая внешняя степень

$$W_n \mathcal{R}_X^i(\log \mathcal{D}) = \begin{cases} \mathcal{R}_X^{i-n} \wedge \mathcal{R}_X^n(\log \mathcal{D}) & 0 \leq n \leq i \\ \mathcal{R}_X^i(\log \mathcal{D}) & n \geq i \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

или вводится фильтрация на когомологиях?

$$W_m H^i(U) = \text{Im} (H^i(x, \uparrow) \longrightarrow H^i(x, R_{j^*} \Omega^* U))$$

$W_{m-1} \Omega_X^*(\log D)$



j_* (гиперрезольвента, нечетная ϵ)

фильтрация Ходжа — или обычно

Мы определим стр. Ходжа, но не там, где хотели: не на U , а с помощью $j: U \hookrightarrow X$ кроме того, это все на уровне комплексных когомологий, а не вещественных.

$$\text{Im} (H^i(X; R_{j^*}^{\tau_{SH}} \mathbb{Z}U) \longrightarrow H^i(X; R_{j^*} \mathbb{Z}U)) = W_{m+i} H^i(U)$$

τ — канонич. фильтрация на $\mathbb{D}(Sh(X))$

фильтрация Лере

Спектральная последовательность весов:

с точностью до "сдвига слоев" равна спектральной последовательности Лере для j .

$$D \xrightarrow{\ell} X \xleftarrow{j} U \quad \Bigg| \quad \mathbb{Z}_X \rightarrow R_{j^*} \mathbb{Z}U$$

это видоизмененные треугольники

$$\begin{array}{c} R_{e_*} R_e^! \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow R_{j_*} R_{j^*} \mathbb{Z}_X \\ \parallel \\ R_{e_*} \mathbb{Z}_0(-1)[-2] \end{array}$$

ибо это замкнутое вложение

для модуля Ходжа, преобразованных пучков... имеет смысл подпротина

в ст. -2 \rightarrow есть гомоморфизм \mathbb{Z} в ст. 0

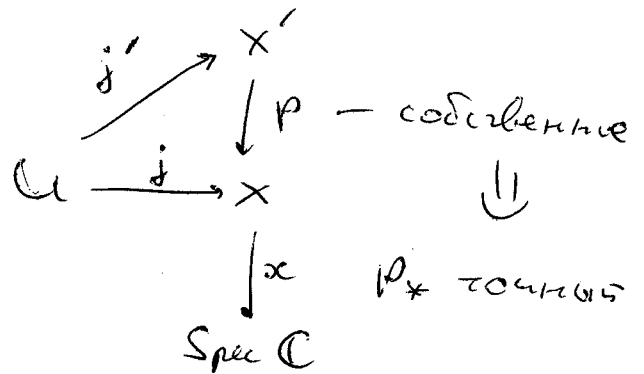
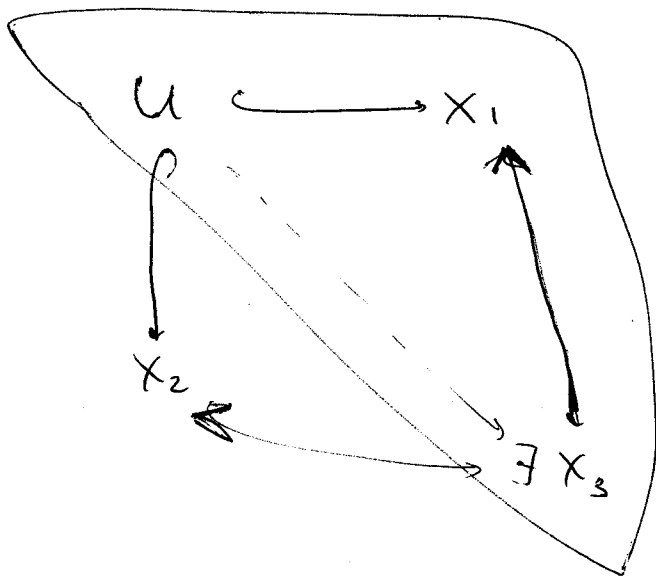
для з. вложения прямой образ точен

\rightarrow в этом случае спектральная послед-сть Лере соответствует длинной точной послед-сти Лизина

$$\text{Gr}_n^{\tau} R_{j*} \mathbb{Z}_U = \bigoplus_{i_1, \dots, i_n} R_{e_{i_1, \dots, i_n} *} \mathbb{Z}_{\mathcal{D}_{i_1, \dots, i_n}}$$

- спектральная система весов

Спектральная система весов не зависит от компактификации:
 2-го Делиня (+ функториальность?)

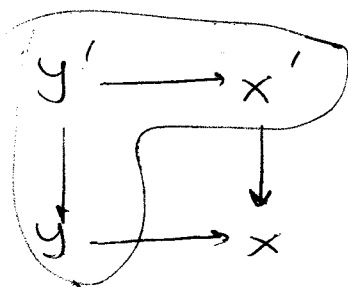


$$\begin{aligned} \tau_{\leq n} R_{j'*} \mathbb{Z}_U &\quad \text{vs.} \quad R_{x_*} (R_{p_*} \tau_{\leq n} R_{j'*} \mathbb{Z}_U) \\ \tau_{\leq n} R_{j*} \mathbb{Z}_U &\quad \rightsquigarrow \quad R_{x_*} (\tau_{\leq n} R_{j*} \mathbb{Z}_U) \end{aligned}$$

Спектральная система весов $(\otimes \mathbb{Q})$ вырождается в E_2
 за счет того, что веса „не смешиваются“

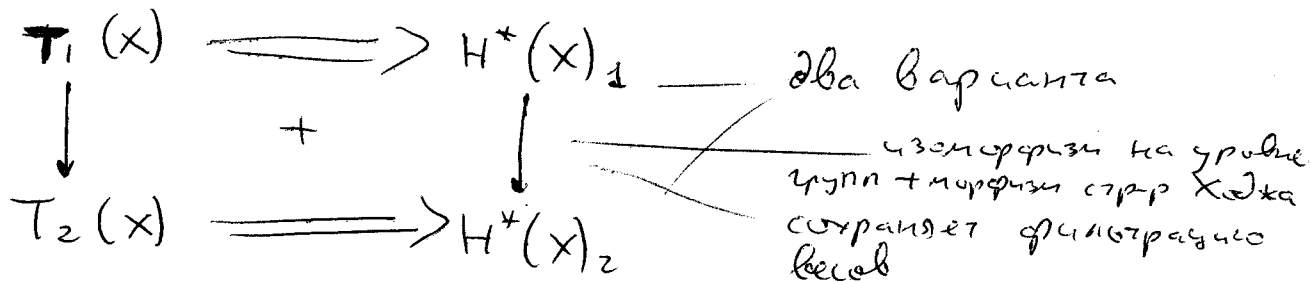
$$\begin{aligned} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{aligned} X_2 \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0 \rightarrow X$$

$$E_1 = H^q(X_{-p}) \Rightarrow H^{p+q}(X)$$



меньше размерности, чем X.

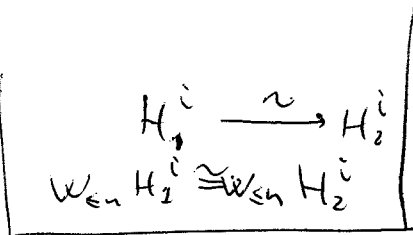
Для двух гиперповерхностей есть их общее „измельчение“
 Достаточно доказать, что если одно гиперповерхности доминирует
 другое, то спектральная последовательность та же:



два варианта

изоморфизм на уровне групп + морфизм строк Ходжа сохраняет фильтрацию весов

как бы изрешетчатая дисперсия



строго сохраняет фильтрацию весов
 изоморфизм структур Ходжа

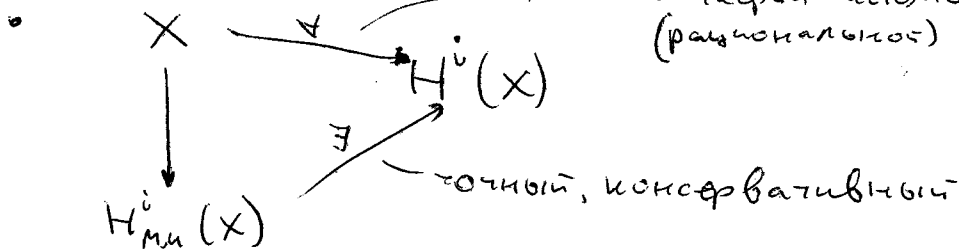
→ пропозиция вырождение $\sim T_1(X) \rightarrow T_2(X)$ — изоморфизм, начиная с E_2 .
 поэтому это рассуждение работает только на уровне \mathbb{Q} , а не \mathbb{Z} .

Смешанные мотивы

над полем хочется, чтобы было:

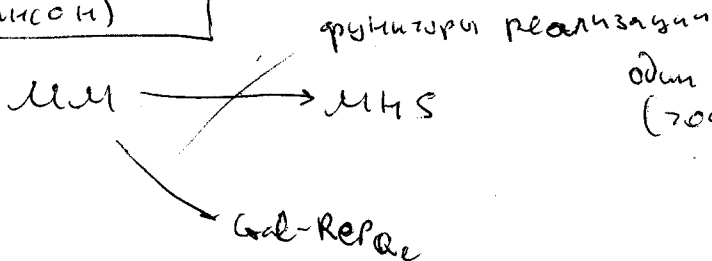
• MM_k — абелева категория

для любых теорий коэффициентов Весля (рациональных)



• это тензорная категория; есть двойственность; $\mathbb{Q}(i)$ ($i \in \mathbb{Z}$)

Гипотеза: такая существует (Бейлинсон)



одни смешанные мотивы — одна категория (точнее!)

$W_{\mathbb{Z}n}$ - фильтрация весов на MM (подкатегория)
 - задается точными (идемпотентными) эндоморфизмами

$$Gr_n^w MM = \underbrace{\text{"чистые мотивы веса } n"}_{\text{(численное)}} = PM^n [n]$$

подручные куски ~~MM~~, когомологии которых
 прямые слагаемые $Mot_{\mathbb{Z}n}(P)$ сидят в степени n
 или $-n$?

Сами чистые мотивы так не сидят, вместо этого
 так сидят мотивы Чжоу; в произвольном смысле:

$$Chow \not\subset MM, Chow \subset D(MM)$$

$$M \rightarrow \bigoplus H^i(M)$$

или $-i$?
 имеет все
 с точностью
 до знака
 (чекер/контрва)

Более общо,

Ext_{MM}^i между чистыми

мотивами = высшие группы Чжоу = мотивные когомологии
 (Блок) // (Бейлисон)

$H^i(M)$ имеет вес i
 \uparrow
 $Gr_n^w(MM)$

γ -кусочки K -теории

Chow-Kinneth decomposition

Что бы это дало?

Пусть есть точная последовательность когомологии
 (сингулярных или этальных)

→ по консервативности она поднималась бы
 до смешанных мотивов.

Проблемы: $Ext_{MM}^i(Q, Q(j)) = 0$ при $i < 0$

с другой стороны, это конкретный кусок K -теории
 (k -числовое)

→ гипотеза Бейлисона - Суле

более слабая формулировка:

$\exists T$ -структура на DM геометрически $\cong D^b(MM)$

т.е. ее ядро равно MM

$$x \in DM \xrightarrow{iso} \Leftrightarrow H^i(x) = 0 \quad i \geq 0$$

- следует из гипотез (Большого исключения)

Кандидаты:

- теория Mori - абстрактная
- Jannsen, Huber

↓
категория "смешанных реализаций"

$H_{sing}(M) \begin{cases} \otimes \mathbb{C} - \text{структура Ходжа: } Gr^w_i - \text{поляризации} \\ \otimes \mathbb{Q}_\ell - \text{этальные} \end{cases}$

можно завести категорию из этих данных
(и сделать ее абелевой),
но лучше действовать на производном уровне
(на уровне жесткого \mathbb{D})

вводило T -структура \rightsquigarrow все ядро \rightsquigarrow на нем - финитр. весов

1-мотивы — куски MM

← ЕЩЕ ОДИН ВАРИАНТ

\uparrow
стр-ры Ходжа: в разложении Ходжа

$\begin{matrix} (0, 0) \\ \hline (1, 0) & (0, 1) + \text{поляризация} \\ \hline (1, 1) \end{matrix}$

\rightarrow комплекс пучков
вес 0

