

$$\begin{matrix} \text{Tr}(Y) & \longrightarrow & \text{DM}_{\text{eff}} \\ \text{[P]} & \longmapsto & \underline{C(P)} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{Tr}(Y) & \longrightarrow & K^-(S_h S_m \text{Cor}) & \longrightarrow & D^-(S_h S_m \text{Cor}) \\ & \dashrightarrow & & & \text{DM}_{\text{eff}}^{\cup} \end{matrix}$$

$$y^*(y, z) \times y^*(x, y) \longrightarrow y^*(x, z)$$

$y^{-1}(x, y) =$  гладкие сечения  $X \times \mathbb{A}^n \rightarrow y$ ,  
 которые обнуляются при ограничении  
 на координатные гиперплоскости

$y, z$  можно взять гладкими проективными, и убрать кавычки

- вложение триангулированных комплексов: достаточно проверить,  
 что этот функтор задает изоморфизм на когомологиях:

$$H^i y(y, z) \cong \text{DM}_{\text{eff}}^-(C(y), C(z)[i])$$

$$D^-(S_h S_m \text{Cor})(L(y), C(z)[i])$$

$$\begin{matrix} H^i(y_{\text{nis}}, C(z)) \\ \parallel \\ h_i C(z)(y) \end{matrix}$$

идея состоит в гиперкогомологии  
 равны когомологии  
 $\rightarrow$  то, что нужно

$$u = X \setminus \cup D_i$$

$$m^c(u) = C(\dots \xrightarrow{\mathbb{D}^2} L(\cup D_i \cap \mathbb{D}_j) \xrightarrow{\mathbb{D}^1} L(\cup D_i) \rightarrow L(X))$$

$$L(\mathbb{D}^1) \rightarrow L(X) \rightarrow L^c(u)$$

$$\downarrow$$

$$L^c(\cup D_i)$$

- это становится выделенным треугольником при переходе к мотивам

$$a \quad L(\mathbb{D}^2) \xrightarrow{\quad} L(\mathbb{D}^1) \rightarrow L^c(\cup D_i)$$

- точная последовательность предпучков

видно, что она приходит из  $\tau_2(Y)$

$$m(X) \rightarrow m(\mathbb{D}^1)(1)[2] \rightarrow m(\mathbb{D}^2)(2)[4] \rightarrow \dots$$

### Весовые структуры

- это почти как  $\mathcal{C}$ -структуры, только совершенно другой

$\underline{\mathcal{C}}$ : пытается аксиоматизировать свойства канонической фильтрации комплексов

$\mathbb{D}^2(X)$

$$\dots \rightarrow \mathbb{C}^{n-2} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \text{Ker } d_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{C}$$

$$\downarrow$$

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Im } d_0 \rightarrow \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow \dots$$

$\in \mathcal{C}^{t \leq 0}$

$\in \mathcal{C}^{t \geq 1}$

$\mathcal{B} \in \mathcal{C}$  есть подкатегория

$\underline{\mathcal{C}}^{t \leq 0}$

,  $\underline{\mathcal{C}}^{t \geq 0}$

при этом

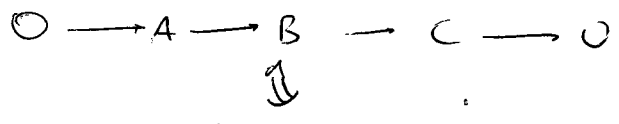
$$\underline{\mathcal{C}}^{t \leq 0}[1] \in \underline{\mathcal{C}}^{t \leq 0}, \quad \underline{\mathcal{C}}^{t \geq 0} \in \underline{\mathcal{C}}^{t \geq 0}[1]$$

$$\underline{C}^{t \leq i} = \underline{C}^{t \leq 0} [-i] \quad (\text{см. Зельфанд - Манн})$$

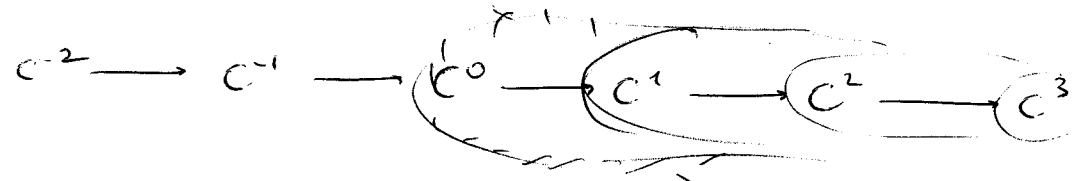
$\underline{C}^{t \leq 0} \perp \underline{C}^{t \geq 1}$  — нет морфизмов из отрицательных в положительных.

Ht:  $\mathcal{O} := \underline{C}^{t=0} := \underline{C}^{t \leq 0} \cap \underline{C}^{t \geq 0}$

$\uparrow$  ~~переход~~



$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[i]$  — выделенный треугольник



фильтрация подкомплексом

В смешанных мотивах была возрастающая фильтрация весов! Сейчас знак меняется: в новых статьях  $[i]$  вместо  $[-i]$

$$\underline{C}^{w \geq 1} \rightarrow \underline{C} \rightarrow \underline{C}^{w \leq 0}$$

Аксиомы:

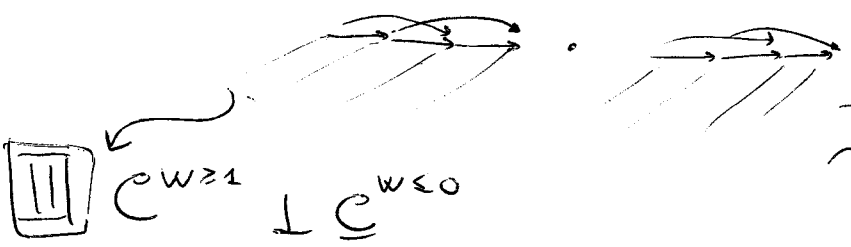
**I**  $\underline{C}^{w \leq 0}, \underline{C}^{w \geq 0} \subset \mathcal{O}(e)$  — каруды-замкнуты в  $\underline{C}$

$$\underline{C}^{w \leq i} = \underline{C}^{w \leq 0} [-i]$$

$$\underline{C} \supset \underline{Ht} : \mathcal{O} = \underline{C}^{t=0} := \underline{C}^{t \leq 0} \cap \underline{C}^{t \geq 0}$$

отсюда следов  
**II** — так же

Что с ортогональностью?

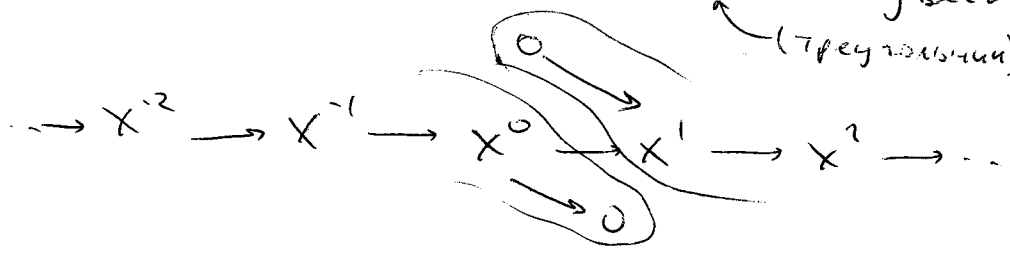


анализ:

— комплекс (условия)  
— из  $t$  в  $t-1$  — стрелок нет

**IV**  $X^{w \geq 1} \rightarrow X \rightarrow X^{w \leq 0}$  — весовое разложение  
— существует  $\forall X$

(треугольник)



$$\underline{C}^b = \left( \bigcup_i \underline{C}^{w \geq i} \right) \cap \left( \bigcup_i \underline{C}^{w \leq i} \right) \quad \text{— ограниченные}$$

Невырожденность:  $\bigcap \underline{C}^{w \leq i} = \bigcap \underline{C}^{w \geq i} = \{0\}$

**I** Самоодвойственность; устойчивость относительно сдвигов

**II**  $\underline{C}^{w \geq 1} = \perp \underline{C}^{w \leq 0} \quad \underline{C}^{w \leq 0} = \underline{C}^{w \geq 1} \perp$

**III**  $\underline{C}^w$  аддитивны, замкнуты относительно расширения

**IV**  $w$  задает ограниченную весовую структуру на  $\underline{C}^b$

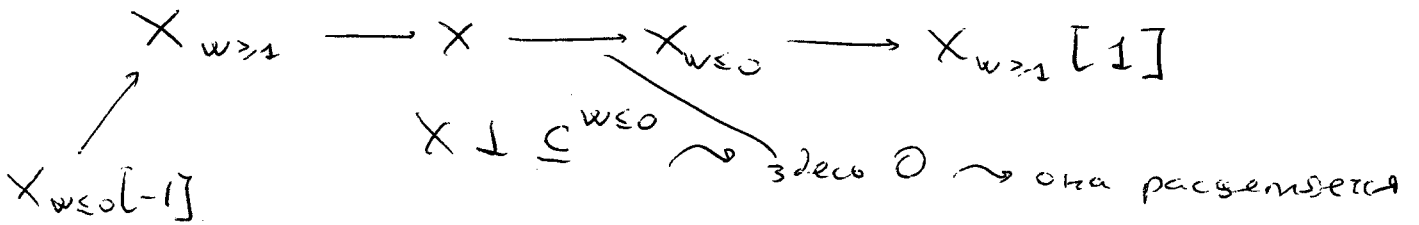
**V**  $A \rightarrow B \rightarrow C \Rightarrow B \cong A \oplus C$   
 $A, B, C \in \underline{C}^{w=0}$

**VII**  $\langle \perp w \rangle \cong \underline{C}^b$   
 адд. категория,  
 неабелева.

**VI**  $X \in \underline{C}^{w \geq 0} \Rightarrow X_{w \leq 0} \in \underline{C}^{w=0}$

Если сдвинуть весовую структуру на  $i$ ,  
 получится тоже весовая структура

При переходе  $\underline{C} \rightarrow \underline{C}^{op}$  и замены полож. части на  
 отрицательную (и наоборот) весовая стр-ра остается весовой



$$\left( \begin{array}{ccc}
 \underline{C}^{v \leq 0} & \subset & \underline{C}^{w \leq 0} \\
 \underline{C}^{v \geq 0} & \subset & \underline{C}^{v \geq 0}
 \end{array} \right) \Rightarrow v = w$$

# Фунториальность весовых разложений

**Узв.** ① Любой морфизм объектов продолжается до морфизма весовых разложений

$$\begin{array}{ccccc}
 \textcircled{2} & X_{w \geq i+1} & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X_{w \leq i} \\
 & \vdots & & \downarrow f & & \vdots \\
 & Y_{w \geq j+1} & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y_{w \leq j}
 \end{array}$$

Если  $j=i$ , то по (1) можно продолжить  
 $j > i$  — вряд ли  
 $j < i \rightsquigarrow$  по  $f$  однозначно восстанавливаются боковые стрелки

$$\begin{array}{ccccc}
 \textcircled{3} & X_{w \geq 2} & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X_{w \leq 1} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & Y_{w \geq 1} & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y_{w \leq 0} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & Z_{w \geq 1} & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Z_{w \leq 0} \\
 & & & \downarrow \text{регулярности} & & \\
 & & & \cup & & \\
 & & & \text{регулярности} & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 X_{w \geq i+1} & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X_{w \leq i} & j \leq i \\
 & & \downarrow f & & \downarrow & \\
 & & Y & \longrightarrow & Y_{w \leq j} & 
 \end{array}$$

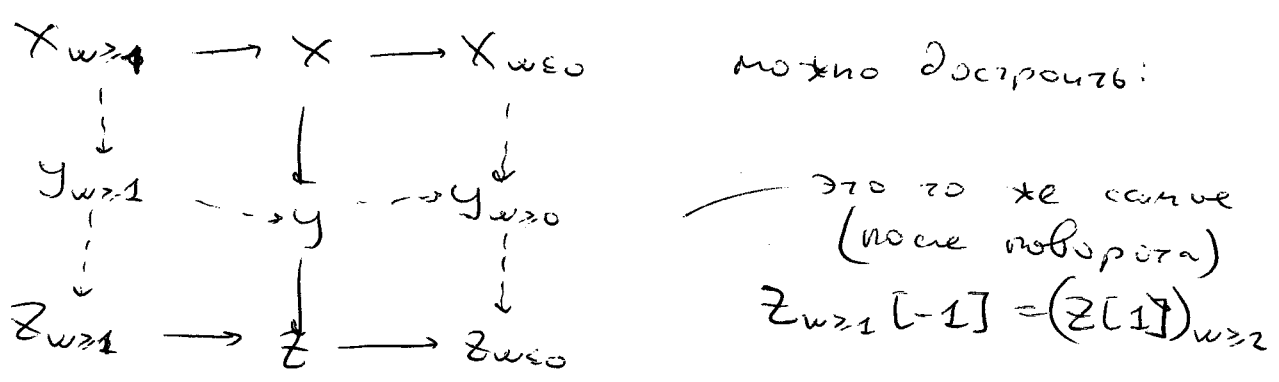
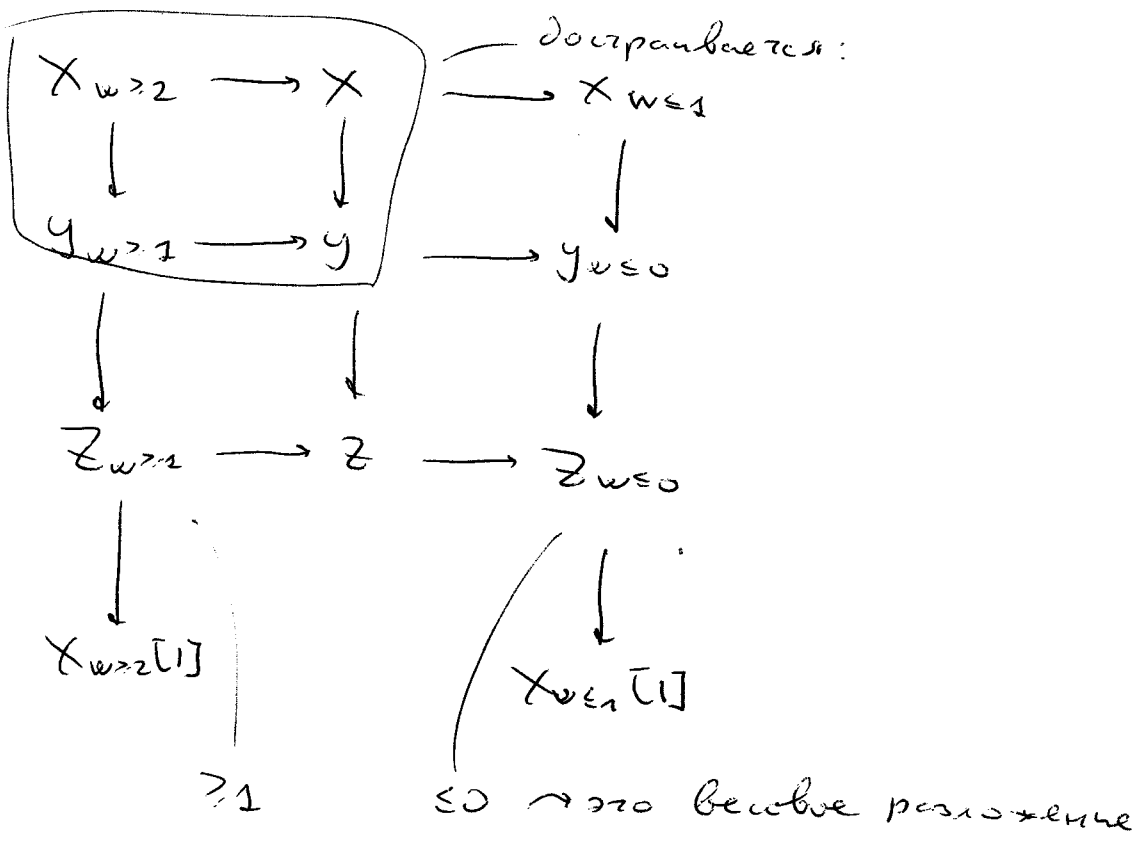
она пропускается через  $X_{w \leq i}$   
 тогда есть и стрелка слева по аксиоме

Почему при  $j < i$  она единственна?

если  $f=0$

$$X \longrightarrow X_{w \leq i} \longrightarrow X_{w \geq i+1} [1]$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \downarrow & \\
 & Y_{w \leq j} & \longleftarrow \text{Mor}(X_{w \leq i}, Y_{w \leq j}) \text{ с } \text{Mor}(X, Y_{w \leq j}) \quad \boxed{5}
 \end{array}$$



$\rightarrow$  всевозможное разложение  $X$  и  $Z$  дает всевозможное разложение  $Y$   
 Отсюда видно, что достаточно требовать разложения в каких-то подкатегориях

**Теорема** Пусть  $N \subseteq \underline{C}$  — негативная аддитивная подкатегория, то есть,  $N \perp N[i] \quad \forall i \geq 0$

Тогда  $\exists!$  весовая структура на  $\langle N \rangle$  т.ч.  $N \subseteq H_w$  ограниченная

При этом (можно считать, что  $\langle N \rangle = \underline{C}$ )

$$\underline{C}_{(w \geq 0)}^{w \leq 0} = \text{Ker Ext-d} \left( \bigcup_{i \geq 0} N[i] \right)$$

Замыкание относительно расширения

$$H_w = \text{Ker}_c(N)$$

До-во: все просто, кроме аксиомы  $\underline{IV}$ , которое доказывается индукцией с помощью  $3 \times 3$ -диаграммы выше.  
 (по сложности)