17.02.2014

Гомоморфизм нормы для K-групп Милнора

И.А.Панин

F — поле, $F^* = F\setminus\{0\}$

$$T(F^*) = \mathbb{Z}\oplus F^*\oplus (F^*)^{\otimes 2}\oplus\dots\oplus(F^*)^{\otimes n}\oplus\dots$$

$$\cup$$

$I(F^*)$ — двусторонний град. идеал, порожденный однор. эл-тами вида $a\otimes(1-a)$, $a\in F$, $a\neq 0,1$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $K_*^M(F) = T(F^*)/I$

$$K_0^M(F) = \mathbb{Z}$$

$$K_1^M(F) = F^*$$

$$K_2^M(F) = (F^*\otimes F^*)/\langle a\otimes(1-a)\rangle$$

$a_1,\dots,a_n\in F^* \Rightarrow \{a_1,\dots,a_n\}\in K_n^M(F)$ — образ эл-та $a_1\otimes\dots\otimes a_n\in T^n(F^*)$

На $K_n^M(F)$ имеются важные доп. структуры:

① $F\hookrightarrow F' \Rightarrow K_*^M(F)\longrightarrow K_*^M(F')$

$$\{a_1,\dots,a_n\}\longmapsto\{a_1,\dots,a_n\}$$

② Если E/F — кон. расш. полей, то $\exists$ гомоморфизм нормы

$$\begin{tikzcd} K_*^M(E) \arrow[r, "N_{E/F}"] & K_*^M(F) \arrow[l, bend left, "i_*"] \\ \beta \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] & \alpha \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \end{tikzcd}$$

— $K_*^M(F)$-модульный ($i: F\hookrightarrow E$)

т.е. $N_{E/F}(i_*(\alpha)\cdot\beta) = \alpha\cdot N_{E/F}(\beta)$

$\boxed{\text{Пример}}$ • $\begin{tikzcd} K_0^M(E) \arrow[r, "\cdot{[E:F]}"] & K_0^M(F) \arrow[l, bend left, "i_*=id"] \end{tikzcd}$, $K_0^M(E)=\mathbb{Z}$, $K_0^M(F)=\mathbb{Z}$

$\circlearrowleft$ = умн-ие на $[E:F]$

• $\begin{tikzcd} K_1^M(E) \arrow[r] & K_1^M(F) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$, $K_1^M(E)=E^*$, $K_1^M(F)=F^*$

$$E^*\xrightarrow{N_{E/F}}F^*$$

$$
\begin{tikzcd}
\bullet\ K_2^M(E) \arrow[r, "N_{E/F}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "//"] & K_2^M(F) \arrow[d, equal] \\
K_2^Q(E) \arrow[r, "N^Q_{E/F}"'] & K_2^Q(F)
\end{tikzcd}
$$

(Басса–Тейта)

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\forall$ поля F и переменной t имеет место короткая точная последовательность

$$
0 \longrightarrow K_n^M(F) \longrightarrow K_n^M(F(t)) \xrightarrow[= \oplus \partial_x]{\oplus \partial_f} \bigoplus_{f(t)} K_{n-1}^M(F[t]/f) \longrightarrow 0
$$

неприводимые унит. мн-ны в $F[t]$

$(\Leftrightarrow x \in \mathbb{A}^1_F)$

$$
\begin{tikzcd}
& K_n^M(F) \arrow[d] \arrow[ddl, bend left, "0"] & \\
\partial_f : & K_n^M(F(t)) \arrow[r] \arrow[d, "-\partial_\infty"'] & K_{n-1}^M(F[t]/(f)) \arrow[dl, dashed, "N_{F(x)/F}"'] \\
& K_{n-1}(F) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus K_{n-1}^M(F[t]/(f)) \arrow[d, "\oplus N_{F(x)/F}"] \\
K_{n-1}(F)
\end{tikzcd}
$$

$$-\partial_\infty(\alpha) = \sum N_{F(x)/F}(\partial_x(\alpha))$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = \sum N_{F(x)/F}(\partial_x(\alpha)) + \partial_\infty(\alpha)$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = \sum_{x \in \mathbb{P}^1} N_{F(x)/F}(\partial_x(\alpha))$$

$$
0 \to K_n^M(F) \to K_n^M(F(t)) \xrightarrow{\oplus \partial_x} \bigoplus_{x \in \mathbb{P}^1_F} K_{n-1}^M(F(x)) \xrightarrow{\sum N_{F(x)/F}} K_{n-1}^M(F) \to 0
$$

— точная последовательность

Иными словами, $K_n^M(F)=H^0(\mathbb{P}^1_F,\underline{\underline{K}}{}_n^M)$, $K_{n-1}^M(F)=H^1(\mathbb{P}^1_F,\underline{\underline{K}}{}_n^M)$

Гомоморфизм $\partial_v : K_n^M(K)\longrightarrow K_{n-1}^M(k)$

$\mathcal{O}$ — кольцо дискретного нормирования, K — поле частных,

$K^* \xrightarrow{v} \mathbb{Z}$ $\quad v(\pi)=1$, $\quad k=\mathcal{O}/\mathfrak{m}$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\exists!$ гомоморфизм $\partial_v : K_n^M(K)\longrightarrow K_{n-1}^M(k)$

такой, что ...

Явная формула для $K_2^M(K)\xrightarrow{\partial_v} K_1^M(k)$

$$\{f,g\}\longmapsto (-1)^{v(f)v(g)}\cdot\underbrace{\left(\frac{f^{v(g)}}{g^{v(f)}}\right)}_{\in\,\mathcal{O}^*}$$

$$v\left(\frac{f^{v(g)}}{g^{v(f)}}\right)=v(f)v(g)-v(g)v(f)=0$$

1. $f_1,\dots,f_{n-1}\in\mathcal{O}^* \Rightarrow \partial_v(\{f_1,\dots,f_{n-1},\pi\})=\{\bar f_1,\dots,\bar f_{n-1}\}$
2. $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{O}^* \Rightarrow \partial_v(\{f_1,\dots,f_n\})=0$

единственность:

$$\{f_1,f_2\}=\{\pi^{n_1}\cdot u_1,\pi^{n_2}\cdot u_2\}=\{\pi^{n_1},\pi^{n_2}\}+\{u_1,\pi^{n_2}\}+\{\pi^{n_1},u_2\}+\{u_1,u_2\}$$

$\{\pi^{n_1},\pi^{n_2}\} = n_1n_2\cdot\{\pi,\pi\} = n_1n_2\cdot\{\pi,-1\}$; $\{u_1,\pi^{n_2}\}\mapsto$ I, $\{\pi^{n_1},u_2\}\mapsto$ I, $\{u_1,u_2\}\mapsto 0$

$\{a,b\}=-\{b,a\}$,

$\{a,-a\}=0$ в $K_2^M(F)$

$\forall a\in F^*$

$\to \{a,a\}=\{a,-a\}+\{a,-1\}$
$\quad =\{a,-1\}$

$$s_\pi : K_n^M(K)\longrightarrow K_n^M(k)$$

1. $s_\pi\{\pi,u_2,\dots,u_n\}=0$
2. $s_\pi\{u_1,\dots,u_n\}=\{\bar u_1,\dots\bar u_n\}$

— построим s и ∂ одновременно

$$B = K_*(k) \oplus K_{*-1}(k)[T] \quad (T^2 - \{-1\}\cdot T)$$

построим

$$K_*(K) \xrightarrow{\varphi} B \qquad \varphi = (s, \partial)$$

$$u\pi^m \longmapsto (u, mT)$$

$K_n^M(\mathcal{O})$ – подгруппа в $K_n^M(K)$, порожденная символами $\{u_1, \dots, u_n\}$, $u_i \in \mathcal{O}^*$

$$K_n^M(K) / K_n^M(\mathcal{O}) = ?$$

Ожидаем: $0 \to K_n^M(\mathcal{O}) \to K_n^M(K) \to K_{n-1}^M(k) \to 0$

$$\to K_n^M(K)/K_n^M(\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} K_{n-1}^M(k)$$

построим вот это

$$\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{n-1}, \pi\} \longleftarrow \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \quad a_i \in K^*$$

где $\tilde{a}_i \in \mathcal{O}^*$: $\tilde{a}_i \longmapsto a_i$

$$\mathcal{O} \to k$$

покажем, что это изоморфизм (несложно)

$\to$ обратный даст нам ∂_v

Д-во теоремы Басса-Тейта (для K_2)

$$0 \to K_2(F) \to K_2(F(t)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in \mathbb{A}^1} F(x)^* \to 0$$

$$\bigoplus_{x \in \mathbb{A}^1} F(x)^* = \bigoplus_{\substack{f \in F[t] \\ \text{непр., унит.}}} \left(F[t]/(f)\right)^* = A$$

хотим доказать точность

① $f = t - a$, $a \in F$, $c \in F[t]/(f) \cong F$

$$\partial_f\{c, t-a\} = c$$

$$\partial_g\{c, t-a\} = 1 \quad \forall \text{ непр. } g \neq f$$

(2) $a_1 \; \dots \; a_n$ $\qquad \mathbb{A}^1_F \qquad c_i \in F[t]/(t-a_i)$

$$\alpha = \sum \{c_i, t-a_i\} \rightsquigarrow \partial_{(t-a_i)}(\alpha) = c_i \quad \forall i$$

$$\partial_g(\alpha) = 0 \;, \; g\text{-непр.}, \; g \neq t-\alpha_i$$

На группе A есть возраст. фильтрация

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \;, \quad \bigcup_{n \geq 1} A_n = A$$

$$A_i = \bigoplus_{\substack{x \\ \deg(x) \leq i}} F(x)^*$$

Предположим, что $\operatorname{Im}(\partial)$ содержит A_{n-1}. Докажем, что $\operatorname{Im}(\partial) \supset A_n$

<u>Док-во</u> $\quad f \in F[t]$ – непр., $\deg f = n$

$\alpha \in (F[t]/(f))^*$ $\qquad$ Пусть $\beta = t \mod (f)$

$\rightsquigarrow \alpha = g(\beta)$, где $g \in F[t]$, $\deg g \leq n-1$

$$\partial\{g, f\} = \underset{\substack{\downarrow \\ (f)}}{\alpha} + \underset{\substack{\cap \\ A_{n-1}}}{\boxed{\text{вычеты в точках, отвечающих множителям } g}}$$

$\square$

(1) Доказана сюръективность ∂. Композиция $= 0$ – знаем

Предположим (для простоты), что F бесконечно.

Покажем, что $K_*(F) \longrightarrow K_*(F(t))$ инъективно

$$\begin{tikzcd} K_*(F) \arrow[r] \arrow[dr, "id"'] & K_*(F(t)) \arrow[d, "s_0"] \\ & K_*(F) \end{tikzcd}$$

s_0 – построен

$$\begin{tikzcd} K_2(F(t)) \arrow[r, "\partial"] & \bigoplus F(x)^* \arrow[l, bend left, "\tau = \sum \tau_x"] \end{tikzcd}$$

$L_d \subset K_2(F(t))$ порождена символами $\{g, f\} : \deg g < \deg f \leq d$

$L_{d-1} \subseteq L_d$, $\bigcup L_d = K_2(F(t))$

$$\begin{tikzcd} L_d/L_{d-1} & \bigoplus\limits_{\deg x = d} F(x)^* \arrow[l, "\tau_x"'] \\ L_d \arrow[u] \arrow[ur, "\sum \partial_x"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{g} = a \in \left(F[t]/(f)\right)^* \longmapsto \{g, f\} \in L_d/L_{d-1}$

$\deg g < f$

$\exists!\, g \in F[t] : \deg(g) < \deg(f)$

и $g \bmod (f) = a$

$\{g_{ab}, f\} = \{g_a, f\} + \{g_b, f\} \mod L_{d-1}$

$\{g_a, f\} + \{g_b, f\} = \{g_a \cdot g_b, f\}$

$g_a \cdot g_b = g_{ab} + h \cdot f$, $\deg h < \deg f$

$$1 = \frac{g_{ab}}{g_a g_b} + \frac{hf}{g_a g_b} \to 0 = \left\{\frac{g_{ab}}{g_a g_b}, \frac{h \cdot f}{g_a \cdot g_b}\right\} \underset{\bmod L_{d-1}}{=} \{g_{ab}, hf\} - \{g_a g_b, f\}$$

Теорема Басса–Тейта $\Rightarrow$ наличие единственного гомоморфизма

$$\bigoplus_{x \in A^1} K^M_{n-1}(F(x)) \xrightarrow{\sum N_{F(x)/F}} K^M_{n-1}(F)$$

т.ч. $\left(\sum N_{F(x)/F}\right) \circ \partial = -\partial_\infty$

$\boxed{\text{Замечание}}$ Нас будут интересовать гомоморфизмы нормы для $K^M_2 \to$ нужен K^M_3

$\boxed{\text{Замечание}}$ Либо мы можем забыть про K^M_3 и воспользоваться

1. теоремой Мацумото: $K^Q_2(F) = K^M_2(F)$

$K^Q_2(F) = \operatorname{Ker}[St(F) \to SL(F)]$

E/F — конечное расширение

$$\begin{tikzcd}
K_2(E) \arrow[r] \arrow[d, "Tr"] & St(E) \arrow[r] \arrow[d, "Tr"] & SL(E) \arrow[d, "Tr"] \\
K_2(F) \arrow[r] & St(F) \arrow[r] & SL(F)
\end{tikzcd}$$

- K_n^M — никакой не K-функтор, а мотивные когомологии
-

$$\begin{tikzcd}
 & M(pt) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & & \\
M(\mathbb{A}^1 - \{x_1, \dots, x_n\}) \arrow[r] & M(\mathbb{A}^1) \arrow[r] & M(\mathbb{A}^1)/M(\mathbb{A}^1 - \{x_1, \dots, x_n\}) \arrow[r, "{[1]}"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$M(pt) \to \bigoplus M_{x_i}(\mathbb{A}^1)$$