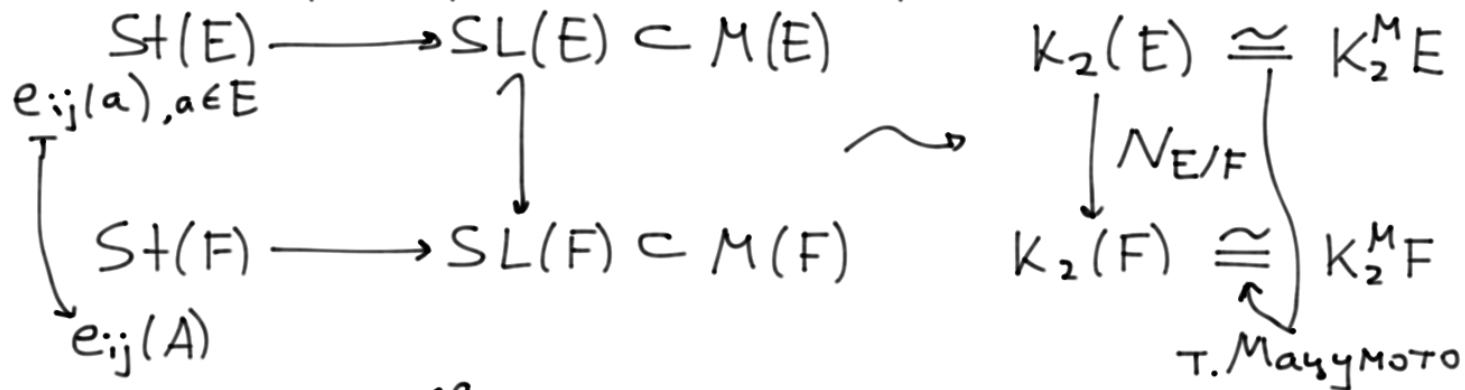


Гомоморфизм нормы для K_2^M

E/F - кон. расширение полей, выбран базис E над F



$E \xrightarrow{\cdot a} E$
 $\rightarrow A$ - это матрица

Лемма Гомоморфизм $N_{E/F}: K_2^M E \rightarrow K_2^M F$ не зависит от выбора базиса E/F .

Формула проекции: $N_{E/F}(\{a, b\}) = \{N_{E/F}(a), b\}, b \in F^*, a \in E^*$

$$\begin{array}{ccc}
 K_2(F) \xrightarrow{\ell_2} {}_2B_2(F) = \{[A] : 2[A] = 0\} \\
 \{a, b\} \longmapsto [A(a, b)]
 \end{array}$$

Т. Альберта (слабая версия): ℓ_2 - сюръекция

F'/F - сеп. расширение степени 3

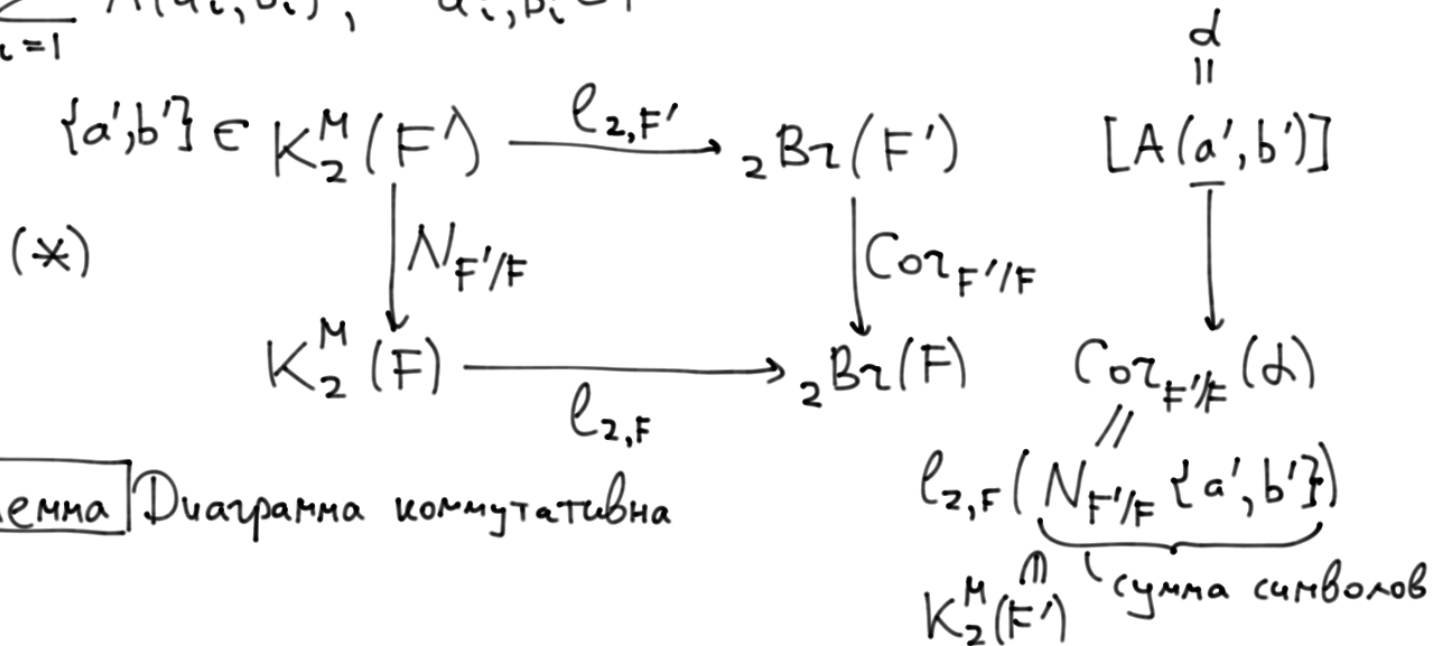
$$\begin{array}{ccc}
 \rightsquigarrow {}_2B_2(F') & [A] \\
 \downarrow \text{Cor}_{F'/F} & \downarrow \\
 {}_2B_2(F) & [\text{Cor}_{F'/F}(A)]
 \end{array}$$

Пример: F'/F - расщ. Галуа,
 A/F' , $\sigma \in \text{Gal}(F'/F)$
 $\rightarrow A^\sigma = A$ как кольцо
 $\forall \lambda \in F' \quad \lambda \circ_\sigma a = \lambda^\sigma \cdot a$
 $\text{Cor}_{F'/F}(A) := [\otimes_{\sigma \in \text{Gal}(F'/F)} A^\sigma]$
 $(\otimes a_\sigma)^\wedge = \otimes a_{\tau\sigma}$

Вопрос $\alpha = [A(a', b')] \in B_2(F') \rightsquigarrow \text{Cor}_{F'/F}(\alpha) \in {}_2B_2(F)$

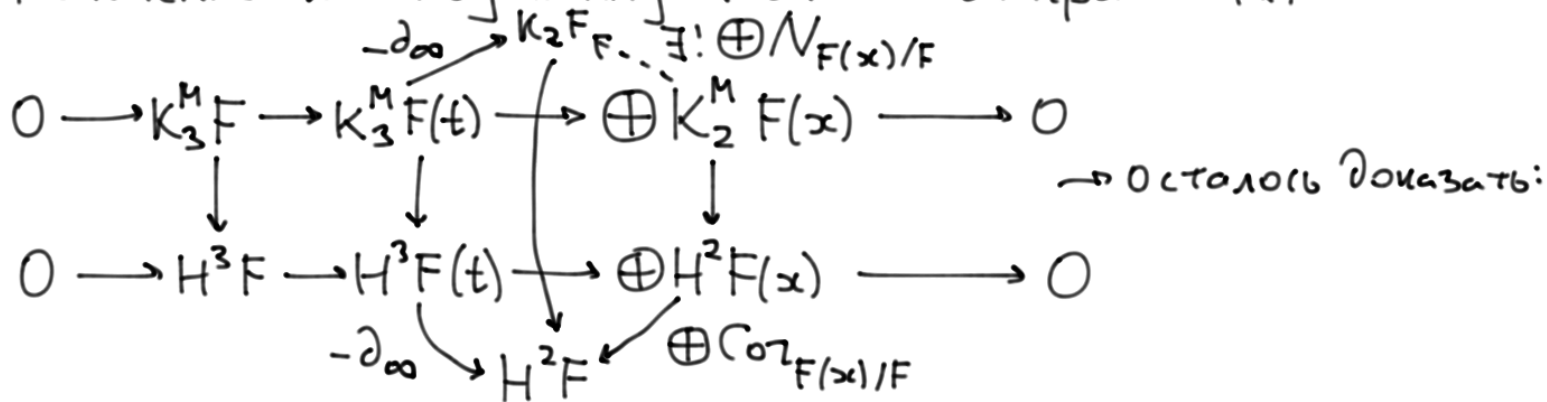
Доказать, что $\text{Cor}_{F'/F}(\alpha)$ равен сумме вида

$$\sum_{i=1}^n A(a_i, b_i), \quad a_i, b_i \in F^*$$

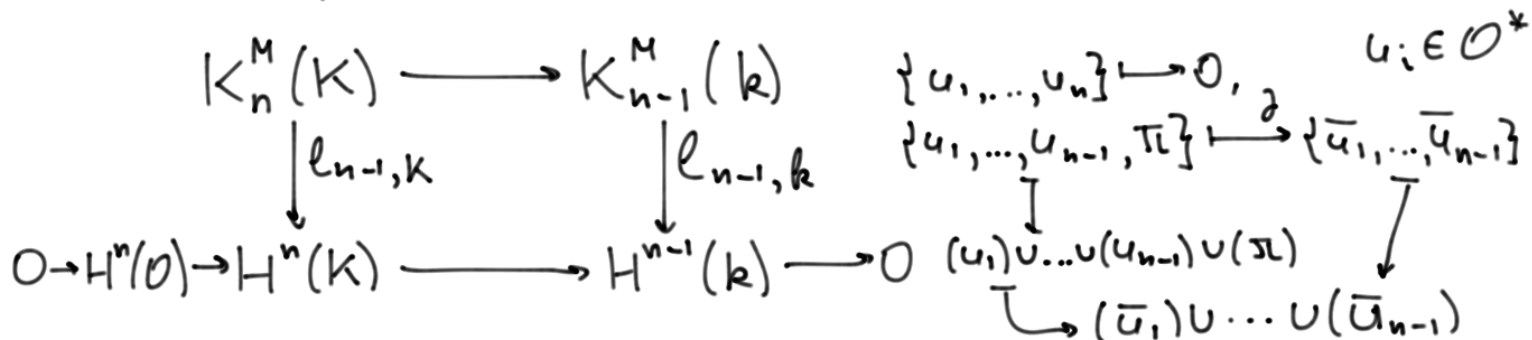


Лемма Диаграмма коммутативна

Пояснение к док-ву коммутативности диаграммы (*):



\mathcal{O} — к.д.ч., K — поле частных, k — поле вычетов → коммутативна



Глобальная цель: доказать, что $K_2^M(F) \cong {}_2K_2^M(F)$

при $\text{char}(F) \neq 2$

(Т. Меркурьева, 1981/82)

$$\begin{array}{c} \cong \\ \downarrow \bar{e}_{2,F} \\ {}_2B_2(F) = H^2(F, \mathbb{Z}/2) \end{array}$$

Замечание

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow (F^{\text{sep}})^* \xrightarrow{\partial} (F^{\text{sep}})^* \longrightarrow 1$$

$$\xrightarrow{\quad} H^1(F, (F^{\text{sep}})^*) = 0$$

\rightsquigarrow

$$\begin{array}{ccccc} H^2(F, \mu_2) & \rightarrow & H^2(F, (F^{\text{sep}})^*) & \xrightarrow{\cong} & H^2(F, (F^{\text{sep}})^*) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ {}_2B_2(F) & & B_2(F) & & B_2(F) \end{array}$$

Ближайшие цели:

① ${}_2K_2(F) = \{ \{\pm 1, a\} \mid a \in F^* \}$, т.е.

$$\begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & {}_2K_2(F) \\ \cup & & \\ a & \longmapsto & \{-1, a\} \end{array}$$

(Меркурьев + Суслин(?))

Гипотеза Тейта: ${}_2K_2$ (лок. поля) имеет такой вид

② теорема Гильберта 90 для K_2^M :

Пусть E/F - квадратичное расширение, $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$

$$\begin{array}{ccc} K_2 E \xrightarrow{1-\sigma} K_2 E \xrightarrow{N_{E/F}} K_2 F & & \{a, b\} \in K_2 E \\ \text{(*}_{E/F}) & \text{— точна.} & \downarrow \sigma \\ & & \{a^\sigma, b^\sigma\} \in K_2 E \end{array}$$

(для K_1 : $E^* \xrightarrow{1-\sigma} E^* \xrightarrow{N} F^*$)

Мы начнем с (2) и выведем потом (1)

Начнем с частного случая.

Предложение Пусть E/F — такое квадратичное расширение, что $N_{E/F}: E^* \rightarrow F^*$ сюръективна. В этом случае последовательность $(x_{E/F})$ точна.

Доказ. Мы докажем, что в этом случае гомоморфизм

$$K_2^M(E)/(1-\sigma)K_2^M(E) \xrightarrow[N_{E/F}]{s} K_2^M(F)$$

← s

Для этого построим сечение s и докажем его сюръективность

Лемма Пусть $a, b \in F^*$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in E^* : N_{E/F}(\alpha_i) = a$.

Тогда $\{\alpha_1, b\}$ и $\{\alpha_2, b\}$ равны в $K_2(E)/(1-\sigma)K_2(E)$

Доказ. $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda / \lambda^\sigma$ для некоторого $\lambda \in E^*$ (т. Гильберта 90)

$$\leadsto \{\alpha_2, b\} - \{\alpha_1, b\} = \{\lambda / \lambda^\sigma, b\} = (1-\sigma)\{\lambda, b\} \quad \square$$

Конструкция s

$$s(\{a, b\}) = \{\alpha, b\} \text{ mod } (1-\sigma)K_2(E), \text{ где } N_{E/F}(\alpha) = a$$

Согласно лемме, $s(\{a, b\})$ корректно определен в $K_2(E)/(1-\sigma)$.

Проверим линейность s по каждому аргументу: очевидно.

Замечание

$$E[t]/t^2 - a \quad F[t]/t^2 - a$$

$$E(\sqrt{a}) \xrightarrow{\sigma} F(\sqrt{a})$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sigma} & F \end{array}$$

$$K_2(E(\sqrt{a})) \xrightarrow{\sigma} K_2(E(\sqrt{a}))$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow N_{E(\sqrt{a})/E} & & \downarrow N_{E(\sqrt{a})/E} \\ K_2(E) & \xrightarrow{\sigma} & K_2(E) \end{array}$$

— коммутативна
 \leadsto такая же с $(1-\sigma)$ коммутативна

$$\hookrightarrow K_2(E(\sqrt{a})) / (1-\sigma) \xrightarrow{\bar{N}} K_2(E) / (1-\sigma)$$

Проверим соотношение Стейндера для s :

$$a, b \in F^*, d \in E^* : N_{E/F}(d) = a,$$

$$s(\{a, 1-a\}) = \{d, 1-a\} \pmod{(1-\sigma)K_2E}$$

$$\{d, 1-\sqrt{a}\} \xrightarrow[\substack{= \\ (\sqrt{a}, 1-\sqrt{a})=0}]{\cong} \{d, 1-a\}$$

$$K_2(E(\sqrt{a})) / (1-\sigma) \xrightarrow{\bar{N}} K_2(E) / (1-\sigma)$$

$$\boxed{\text{Утв. 1}} \quad \bar{N}(\{d, 1-\sqrt{a}\}) = \{d, 1-a\}$$

Доказ-во $\bar{N}(\{d, 1-\sqrt{a}\}) = \{d, N_{E(\sqrt{a})/E}(1-\sqrt{a})\} = \{d, 1-a\} \quad \square$

$$\boxed{\text{Утв. 2}} \quad \{ \sqrt{a}, 1-\sqrt{a} \} \xrightarrow[\substack{= \\ 1-\sigma}]{\cong} \{d, 1-\sqrt{a}\}$$

Доказ-во

$$\begin{array}{ccc} E(\sqrt{a})^* & \xrightarrow{N} & F(\sqrt{a})^* \\ \sqrt{a} \downarrow & \xrightarrow{\quad} & a \\ d \downarrow & \xrightarrow{\quad} & a \end{array} \quad \square$$

Докажем, что $\{d, 1-a\} \xrightarrow[\substack{= \\ 1-\sigma}]{\cong} 0$

Общий случай. План доказательства

• свести к случаю, когда норма сюръективна

Пусть $E = F(\sqrt{a})$, $a \notin (F^*)^2$

$N_{E/F} = X^2 - aY^2$, $b \in F^* \rightarrow$ рассмотрим $C_{a,b} = \{X^2 - aY^2 = b\} \hookrightarrow \mathbb{A}_F^2$

$F(C_{a,b})$ — поле функций.

$$\begin{array}{ccc} E(C_{a,b}) & \xrightarrow{\quad} & F(C_{a,b}) \\ \downarrow \bar{X} + \sqrt{a}\bar{Y} & \xrightarrow{\quad} & \downarrow \bar{X}^2 - a\bar{Y}^2 = b \\ F(C_{a,b}) & \xrightarrow{\quad} & F \end{array}$$

$F^{(1)} :=$ композит всех полей вида $F(c_{a,b})$, где $b \in F^*$
 (при фиксированном a)

$F^{(2)} :=$ композит всех полей вида $F^{(1)}(c_{a,b'})$, где $b' \in (F^{(1)})^*$

...

$$F_\infty = \bigcup_{i \geq 1} F^{(i)}, \quad E_\infty = F_\infty(\sqrt{a})$$

$$N_{E_\infty/F_\infty} : E_\infty^* \longrightarrow F_\infty^*$$

$$\leadsto K_2(E_\infty) \xrightarrow{1-\sigma} K_2(E_\infty) \xrightarrow{N} K_2(F_\infty) \quad \text{точна}$$

$$0 = H(K_2(E_\infty) \longrightarrow K_2(E_\infty) \longrightarrow K_2(F_\infty))$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \uparrow & & \uparrow \\ & & H(K_2(E)) & \longrightarrow & K_2(E) & \longrightarrow & K_2(F) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

- дост. доказать, что отобража H инъективно (для этого)

Теорема $\forall b \in F^* \quad H(E(c_{a,b})/F(c_{a,b}))$ инъективно
 \uparrow
 $H(E/F)$

$$\overline{C}_{a,b} = \{X^2 - ay^2 = bz^2\} \subseteq \mathbb{P}_F^2$$

$$0 \longrightarrow K_2 F \longrightarrow K_2 F(\overline{C}) \xrightarrow{\oplus \partial_c} \bigoplus_{c \in \overline{C}} K_1 F(c) \xrightarrow{\sum N} F^* \quad \text{точна}$$

- понадобится

$$\left(\begin{array}{l} \text{Квиллен:} \\ K_* (\overline{C}) = K_* (F) \oplus K_* (A(a,b)) \end{array} \right)$$