И.А. Панин

# Гомоморфизм нормы для $K_2^M$

$E/F$ – кон. расширение полей, выбран базис $E$ над $F$

$$\begin{tikzcd}
St(E) \arrow[r] & SL(E) \subset M(E) \arrow[d] \\
St(F) \arrow[r] & SL(F) \subset M(F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c} e_{ij}(a), a\in E \\ \downarrow \\ e_{ij}(A) \end{array}
\qquad \rightsquigarrow \qquad
\begin{tikzcd}
K_2(E) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "N_{E/F}"] & K_2^M E \arrow[d] \\
K_2(F) \arrow[r, phantom, "\cong"] & K_2^M F
\end{tikzcd}$$

т. Мацумото

$E \xrightarrow{\cdot a} E$

$\rightsquigarrow A$ – его матрица

$\boxed{\text{Лемма}}$ Гомоморфизм $N_{E/F}: K_2^M E \longrightarrow K_2^M F$ не зависит от выбора базиса $E/F$.

Формула проекции: $N_{E/F}(\{\alpha, b\}) = \{N_{E/F}(\alpha), b\}, b\in F^*, \alpha\in E^*$

$$K_2(F) \xrightarrow{\ell_2} {}_2Br(F) = \{[A] : 2[A] = 0\}$$

$$\{a, b\} \longmapsto [A(a,b)]$$

$\boxed{\text{Т. Альберта}}$ (слабая версия): $\ell_2$ – сюръекция

$F'/F$ – сеп. расширение степени 3

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd}
{}_2Br(F') \arrow[d, "Cor_{F'/F}"'] & {[A]} \arrow[d] \\
{}_2Br(F) & {[Cor_{F'/F}(A)]}
\end{tikzcd}$$

Пример: $F'/F$ – расш. Галуа, $A/F'$, $\sigma\in Gal(F'/F)$

$\rightarrow A^\sigma = A$ как кольцо

$\forall \lambda\in F'$ $\lambda \underset{\sigma}{\cdot} a = \lambda^\sigma \cdot a$

$$Cor_{F'/F}(A) := \Big[\bigotimes_{\sigma\in Gal(F'/F)} A^\sigma\Big]^{Gal}$$

$$(\otimes a_\sigma)^\tau = \otimes a_{\tau\sigma}$$

$\boxed{\text{Вопрос}}$ $\alpha = [A(a', b')] \in Br(F') \rightsquigarrow Cor_{F'/F}(\alpha) \in {}_2Br(F)$

Доказать, что $Cor_{F'/F}(\alpha)$ равен сумме вида

$$\sum_{i=1}^{n} A(a_i, b_i), \quad a_i, b_i \in F^*$$

$$\begin{tikzcd}
\{a',b'\} \in K_2^M(F') \arrow[r, "l_{2,F'}"] \arrow[d, "N_{F'/F}"] & {}_2Br(F') \arrow[d, "Cor_{F'/F}"] \\
K_2^M(F) \arrow[r, "l_{2,F}"'] & {}_2Br(F)
\end{tikzcd} \quad (*)$$

$$\alpha = [A(a',b')] \longmapsto Cor_{F'/F}(\alpha) = l_{2,F}(\underbrace{N_{F'/F}\{a',b'\}}_{\text{сумма символов}}), \quad \{a',b'\} \in K_2^M(F')$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Диаграмма коммутативна

Пояснение к док-ву коммутативности диаграммы $(*)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & K_2F_F \arrow[ddr, bend left] & & \\
0 \arrow[r] & K_3^M F \arrow[r] \arrow[d] & K_3^M F(t) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[u, "-\partial_\infty"] & \bigoplus K_2^M F(x) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul, dashed, "\exists!\, \bigoplus N_{F(x)/F}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^3F \arrow[r] & H^3F(t) \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "-\partial_\infty"'] & \bigoplus H^2F(x) \arrow[r] \arrow[d, "\bigoplus Cor_{F(x)/F}"] & 0 \\
 & & & H^2F & 
\end{tikzcd}$$

$\rightarrow$ осталось доказать:

$\mathcal{O}$ — к.д.н., $K$ — поле частных, $k$ — поле вычетов $\rightarrow$ коммутативна

$$\begin{tikzcd}
 & K_n^M(K) \arrow[r] \arrow[d, "l_{n-1,K}"] & K_{n-1}^M(k) \arrow[d, "l_{n-1,k}"] & \\
0 \arrow[r] & H^n(\mathcal{O}) \arrow[r] H^n(K) \arrow[r] & H^{n-1}(k) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$u_i \in \mathcal{O}^*$

$\{u_1, \dots, u_n\} \longmapsto 0,$

$\{u_1, \dots, u_{n-1}, \pi\} \overset{\partial}{\longmapsto} \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}\}$

$\{u_1, \dots, u_{n-1}, \pi\} \longmapsto (u_1) \cup \dots \cup (u_{n-1}) \cup (\pi) \longmapsto (\bar{u}_1) \cup \dots \cup (\bar{u}_{n-1})$

$\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}\} \longmapsto (\bar{u}_1) \cup \dots \cup (\bar{u}_{n-1})$

Глобальная цель: доказать, что

$$\begin{tikzcd} K_2^M(F)/2K_2^M(F) \arrow[d, "\bar{e}_{2,F}", "\wr"'] \\ {}_2Br(F) = H^2(F,\mathbb{Z}/2) \end{tikzcd}$$

при $char(F) \neq 2$

(т. Меркурьева, 1981/82)

$\boxed{\text{Замечание}}$ $1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow (F^{sep})^* \xrightarrow{\uparrow 2} (F^{sep})^* \longrightarrow 1$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} & & H^1(F,(F^{sep})^*) = 0 \arrow[dll, bend right, "\partial"'] \\ H^2(F,\mu_2) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & H^2(F,(F^{sep})^*) \arrow[r, "2"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & H^2(F,(F^{sep})^*) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\ {}_2Br(F) & Br(F) & Br(F) \end{tikzcd}$$

Ближайшие цели:

① ${}_2K_2(F) = \{\{\pm 1, a\} \mid a \in F^*\}$, т.е. $F^* \longrightarrow {}_2K_2(F)$, $a \longmapsto \{-1, a\}$

(Меркурьев + Суслин(?))

Гипотеза Тейта: ${}_2K_2$(лок. поля) имеет такой вид

② теорема Гильберта 90 для $K_2^M$:

Пусть $E/F$ – квадратичное расширение, $\sigma \in Gal(E/F)$

$$(*_{E/F}) \quad K_2E \xrightarrow{1-\sigma} K_2E \xrightarrow{N_{E/F}} K_2F$$

— точна.

$$\begin{tikzcd} \{a,b\} \in K_2E \arrow[d, mapsto] \arrow[d, phantom, shift left=6, "\sigma"] \\ \{a^\sigma, b^\sigma\} \in K_2E \end{tikzcd}$$

(для $K_1$: $E^* \xrightarrow{1-\sigma} E^* \xrightarrow{N} F^*$)

Мы начнем с (2) и выведем потом (1)

Начнем с частного случая.

$\boxed{\text{Предложение}}$ Пусть $E/F$ — такое квадратичное расширение, что $N_{E/F}: E^* \longrightarrow F^*$ сюръективна. В этом случае последовательность $(*_{E/F})$ точна.

<u>Док-во</u> Мы докажем, что <u>в</u> этом случае гомоморфизм

$$
\begin{tikzcd}
K_2^M(E)/(1-\sigma)K_2^M(E) \arrow[r, "N_{E/F}"] & K_2^M(F) \arrow[l, bend left, "s"]
\end{tikzcd}
$$

явл-ся изоморфизмом

Для этого построим сечение $s$ и докажем его сюръективность

$\boxed{\text{Лемма}}$ Пусть $a, b \in F^*$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in E^*: N_{E/F}(\alpha_i) = a$.
Тогда $\{\alpha_1, b\}$ и $\{\alpha_2, b\}$ равны в $K_2(E)/(1-\sigma)K_2(E)$

<u>Док-во</u> $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda/\lambda^\sigma$ для некоторого $\lambda \in E^*$ (т. Гильберта 90)
$\rightsquigarrow \{\alpha_2, b\} - \{\alpha_1, b\} = \{\lambda/\lambda^\sigma, b\} = (1-\sigma)\{\lambda, b\}$ $\square$

<u>Конструкция $s$</u>

$$s(\{a,b\}) = \{\alpha, b\} \bmod (1-\sigma)K_2(E), \text{ где } N_{E/F}(\alpha) = a$$

Согласно Лемме, $s(\{a,b\})$ корректно определен в $K_2(E)/(1-\sigma)$.

Проверим линейность $s$ по каждому аргументу: очевидно.

$\boxed{\text{Замечание}}$

$E[t]/t^2-a \qquad F[t]/t^2-a$

$$
\begin{tikzcd}
E(\sqrt{a}) \arrow[r, dash, "\sigma"] \arrow[d, dash] & F(\sqrt{a}) \arrow[d, dash] \\
E \arrow[r, dash, "\sigma"] & F
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
K_2(E(\sqrt{a})) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "N_{E(\sqrt{a})/E}"] & K_2(E(\sqrt{a})) \arrow[d, "N_{E(\sqrt{a})/E}"] \\
K_2(E) \arrow[r, "\sigma"'] & K_2(E)
\end{tikzcd}
$$

— коммутативна

$\rightsquigarrow$ такая же с $(1-\sigma)$ коммутативна

$$\to \quad K_2(E(\sqrt{a}))/(1-\sigma) \xrightarrow{\overline{N}} K_2(E)/(1-\sigma)$$

Проверим соотношение Стейнберга для $s$:

$a, b \in F^*$, $\alpha \in E^* : N_{E/F}(\alpha) = a$,

$$s(\{a, 1-a\}) = \{\alpha, 1-a\} \mod (1-\sigma)K_2E$$

$$\begin{array}{ccc}
\{\alpha, 1-\sqrt{a}\} \overset{(\sqrt{a},1-\sqrt{a})=0}{\equiv} & \longmapsto & \{\alpha, 1-a\} \\
\cap & & \cap \\
K_2(E(\sqrt{a}))/(1-\sigma) & \xrightarrow{\overline{N}} & K_2(E)/(1-\sigma)
\end{array}$$

$\boxed{\text{Утв. 1}}$ $\overline{N}(\{\alpha, 1-\sqrt{a}\}) = \{\alpha, 1-a\}$

<u>Док-во</u> $\overline{N}(\{\alpha, 1-\sqrt{a}\}) = \{\alpha, N_{E(\sqrt{a})/E}(1-\sqrt{a})\} = \{\alpha, 1-a\}$ □

$\boxed{\text{Утв. 2}}$ $\{\sqrt{a}, 1-\sqrt{a}\} \underset{1-\sigma}{\equiv} \{\alpha, 1-\sqrt{a}\}$

<u>Док-во</u>

$$\begin{array}{ccc}
E(\sqrt{a})^* & \xrightarrow{N} & F(\sqrt{a})^* \\
\sqrt{a} & \longmapsto & a \\
\alpha & \longmapsto & a
\end{array} \qquad □$$

Доказали, что $\{\alpha, 1-a\} \underset{1-\sigma}{\equiv} 0$

<u>Общий случай.</u> План доказательства

- свести к случаю, когда норма сюръективна

Пусть $E = F(\sqrt{a})$, $a \notin (F^*)^2$

$N_{E/F} = X^2 - aY^2$, $b \in F^*$ $\rightsquigarrow$ рассмотрим $C_{a,b} = \{X^2 - aY^2 = b\} \hookrightarrow \mathbb{A}^2_F$

$F(C_{a,b})$ — поле функций.

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{X} + \sqrt{a}\,\overline{Y} \in & E(C_{a,b}) & \text{———} & F(C_{a,b}) & \ni \overline{X}^2 - a\overline{Y}^2 = b \\
& \uparrow & & \uparrow & \\
& F(C_{a,b}) & \text{———} & F &
\end{array}$$

$F^{(1)} :=$ композит всех полей вида $F(C_{a,b})$, где $b \in F^*$ (при фиксированном $a$)

$F^{(2)} :=$ композит всех полей вида $F^{(1)}(C_{a,b'})$, где $b' \in (F^{(1)})^*$

. . .

$$F_\infty = \bigcup_{i \geq 1} F^{(i)}, \qquad E_\infty = F_\infty(\sqrt{a})$$

$$N_{E_\infty/F_\infty} : E_\infty^* \longrightarrow F_\infty^*$$

$\rightsquigarrow$ $K_2(E_\infty) \xrightarrow{1-\sigma} K_2(E_\infty) \xrightarrow{N} K_2(F_\infty)$ точна

$$\begin{tikzcd}
0 = H\big( K_2(E_\infty) \arrow[r] & K_2(E_\infty) \arrow[r] & K_2(F_\infty)\big) \\
H\big( K_2(E) \arrow[r] \arrow[u] & K_2(E) \arrow[r] \arrow[u] & K_2(F)\big) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

— дост. доказать, что отобр. на $H$ инъективно (для одного шага)

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\forall b \in F^*$

$$\begin{tikzcd}
H(E(C_{a,b})/F(C_{a,b})) \\
H(E/F) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

инъективно

$$\overline{C} = \overline{C}_{a,b} = \{X^2 - aY^2 = bZ^2\} \subseteq \mathbb{P}^2_F$$

$$0 \longrightarrow K_2 F \longrightarrow K_2 F(\overline{C}) \xrightarrow{\oplus \partial_c} \bigoplus_{c \in \overline{C}} K_1 F(c) \xrightarrow{\sum N} F^*$$

— понадобится

точна

(Квиллен: $K_*(\overline{C}) = K_*(F) \oplus K_*(A(a,b))$)