$\boxed{24.03.2014}$

И.А.Панин

$\operatorname{char} F \neq 2 \qquad K_2F/2 \xrightarrow{\ell_{2,F}} Br(F)$

① <u>Лемма</u>: $a, b \in F^*$, $A(a,b) \cong M_2(F) \Rightarrow \{a,b\} = 2\cdot ?$ в K_2F

② <u>Лемма</u>: $a, b \in F^*$, $C = \{X^2 - aY^2 = b\} \subset \mathbb{A}^2_F$, $\overline{C}(F) = \emptyset$

$\overline{C} = \{X^2 - aY^2 = bZ^2\} \subset \mathbb{P}^2_F$ — замыкание C

$\Rightarrow Pic(\overline{C}) \cong Ker[K_2F/2 \to K_2F(C)/2] = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot \{a,b\}$

Имея эти две леммы, инъективность $\ell_{2,F}$ доказывается так:

$K_2F/2K_2F \dashrightarrow Br(F)$

$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \{a_i, b_i\} \longmapsto 0$

Если $n=1$, то по Лемме 1 $\alpha = 0$

Если $n>1$, то $C := C(a_1, b_1)$

$$\begin{tikzcd}
\alpha_{F(C)} = \sum_{i=2}^{n}\{a_i,b_i\} \arrow[rrr, mapsto] & & & 0 \\
& K_2F(C)/2 \arrow[r] & Br(F(C)) & \\
& K_2F/2 \arrow[r] \arrow[u] & Br(F) \arrow[u] & \\
\alpha \arrow[uuu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & 0 \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \alpha_{F(C)} = 0$

$\rightsquigarrow$ по Лемме 2 $\alpha = \{a_1, b_1\} \rightsquigarrow$ по Лемме 1 $\alpha = 0$

т.к. нет рац. точек

$$\begin{tikzcd}
0 & & & & \\
Pic(\overline{C})/2 \arrow[u] & 0 & F^* \arrow[l] & & \\
\coprod \mathbb{Z}/2 \arrow[u] \arrow[r] & \coprod_{c \in \overline{C}} F(c)^* \arrow[u, "N"'] & & & \\
F(C)^*/F(C)^{*2} \arrow[u] \arrow[r, "\cup(-1)"] & K_2F(C) \arrow[u] \arrow[r] & K_2F(C) \arrow[r] & K_2F(C)/2 \arrow[r] & 0 \\
F^*/F^{*2} \arrow[u] \arrow[r, "\cup(-1)"] & K_2F \arrow[u] \arrow[r] & K_2F \arrow[u] \arrow[r] & K_2F/2 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & Ker \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$1_c \mapsto (-1)_c$

$\bar{\alpha} \in K_2F/2 : \bar{\alpha}_{F(C)} = 0 \rightsquigarrow \alpha \in K_2F \rightsquigarrow \alpha_{F(C)} \in K_2F(C)$

$\rightsquigarrow \exists \beta \in K_2F(C) : \beta \xmapsto{\cdot 2} \alpha$

$\rightsquigarrow \partial\beta \in \coprod\limits_{c \in \bar{C}} F(c)^*$

$2 \cdot \partial\beta = 0$ в $\coprod F(c)^* \rightsquigarrow \exists \gamma \in \coprod\limits_{c \in \bar{C}} \mathbb{Z}/2 : \gamma \mapsto \beta$

$\rightsquigarrow \bar{\gamma} \in \operatorname{Pic}(\bar{C})/2$

Мы попали из Ker в $\operatorname{Pic}(\bar{C})/2$

Обратно, $\bar{\gamma}' \in \operatorname{Pic}(\bar{C})/2 \rightsquigarrow \exists \gamma' \in \coprod\limits_{c \in \bar{C}} \mathbb{Z}/2 : \gamma' \mapsto \bar{\gamma}'$

$\gamma' \mapsto 0$ в $F^* \rightsquigarrow \exists \beta' \in K_2F(C)$

$\rightsquigarrow \exists \alpha' \in K_2F \rightsquigarrow \bar{\alpha}' \in K_2F/2$; $\bar{\alpha}'_{F(C)} = 0 \rightsquigarrow \bar{\alpha}' \in \operatorname{Ker}$.

Получили взаимно обратные гомоморфизмы!

Покажем, что $\operatorname{Pic}(\bar{C})/2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{c} \bar{C}_{F^{sep}} \\ G = \operatorname{Gal}(F^s/F) \Big\downarrow \pi \\ \bar{C} \end{array} \rightsquigarrow H^p(G, H^q(\bar{C}_{F^{sep}}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(\bar{C}, \mathbb{G}_m)$$

$$\operatorname{Sh}_{et}(\bar{C}_{F^{sep}}) \xrightarrow{\Gamma'} \mathcal{A}b \qquad \operatorname{Sh}_{et}(\bar{C}) \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{A}b$$

$$\operatorname{Pic}(\bar{C}) = H^1(\bar{C}, \mathbb{G}_m) \to H^0(G, \underbrace{H^1(\bar{C}_{F^{sep}}, \mathbb{G}_m)}) = \operatorname{Pic}(\underbrace{\bar{C}_{F^{sep}}}_{\cong \mathbb{P}^1_{F^{sep}}})^G = \mathbb{Z}$$

$$H^0(G, H^1(\bar{C}_{F^{sep}}, \mathbb{G}_m)) \to H^2(\bar{C}, \mathbb{G}_m)$$

$$H^1(G, \underbrace{H^0(\bar{C}_{F^{sep}}, \mathbb{G}_m)}_{= (F^{sep})^*}) = 0 \to H^1(\bar{C}, \mathbb{G}_m)$$

$\Rightarrow \operatorname{Pic}(\bar{C}) \cong \mathbb{Z}$

образ в $\operatorname{Pic}(\bar{C}_{F^{sep}})^G$ сод. $2\mathbb{Z}$

(приходит из $\mathcal{O}(2)$), но не равен $\mathbb{Z}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_{et}(\bar{C}_{F^{sep}}) \arrow[dr] & \\
\mathrm{Sh}_{et}(\bar{C}) \arrow[u] \arrow[r] & ab
\end{tikzcd}
\qquad
\Gamma(\mathcal{F}) = \Gamma(\bar{C}_{F^{sep}}, \pi^*\mathcal{F})^{Gal}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & H^0(G,H^1) \arrow[rrdd, "d_2"] & H^1(G,H^1) & H^2(G,H^1) \\
H^1(\bar{C}, \mathbb{G}_m) \arrow[ur, bend left] & & & \\
 & H^0(G,H^0) & H^1(G,H^0) \arrow[llu, bend right] & H^2(G,H^0)
\end{tikzcd}
$$

Предъявим нетрив. элемент в Ker: это $\{a,b\}$

Если $\bar{C}(F) \neq \emptyset$, то $\mathrm{Ker}=0$ — очевидно:

$$
\begin{tikzcd}
K_2F(\bar{C}) = K_2F(t) \arrow[r, "s_0"] & K_2F \\
K_2F \arrow[u] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}
$$

Итак, осталось проверить, что если $\bar{C}(F)=\emptyset$, то

① $\{a,b\} \neq 0$, ② $\{a,b\} \in \mathrm{Ker}$

$\downarrow$

$A(a,b)$ — тело: если это $M_2(F)$, то $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Nrd} = \det$ — гипербол.

базис: $1, u, v, uv$; $X^2 - aY^2 - bZ^2 + abT^2 = \mathrm{Nrd}_A$

$\rightsquigarrow$ есть решение $X^2 - aY^2 = bZ^2 \rightsquigarrow \bar{C}(F) \neq \emptyset$

② $A(a,b)\otimes_F F(C)$

на $\overline{C}_{F(C)} = \overline{C} \times_{\mathrm{Spec}(F)} \mathrm{Spec}(F(C))$ есть рац. точка

Покажем, что из $\overline{C}(F)\neq\emptyset$ следует, что $\{a,b\}=2\cdot ?$

<u>Д-во</u>: $\overline{C}(F)\neq\emptyset \Longleftrightarrow C(F)\neq\emptyset \longrightarrow$ ур-ние $X^2-aY^2=b$ имеет решение: $\exists\beta\in F(\sqrt{a}): N_{F(\sqrt{a})/F}(\beta)=b$

$$
\begin{tikzcd}
2\cdot\{\sqrt{a},\beta\} = \{a,\beta\} \arrow[d, "N"] & & F(\sqrt{a}) \arrow[d, dash] \\
\{a, N(\beta)\} = \{a,b\} & & F
\end{tikzcd}
$$

т.е. $\{a,b\} = 2\cdot N_{F(\sqrt{a})/F}(\{\sqrt{a},\beta\})$ $\square$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $K_*(\overline{C}_{a,b}) \cong K_*F \oplus K_*(A(a,b))$

(нужно для док-ва точности второго столбика)

<u>Д-во</u> Если $\overline{C}_{a,b}(F)\neq\emptyset$, то $A(a,b)\cong M_2(F)$ и $\overline{C}_{a,b}\cong\mathbb{P}^1_F$

$$
\begin{tikzcd}
K_*(\mathbb{P}(V)) & K_*(F)\oplus K_*(\mathrm{End}(V)) \arrow[l] \arrow[l, bend right, "p^*"'] \arrow[l, bend right=40, "?"'] \\
& K_*(F)\oplus K_*(F) \arrow[ul] \arrow[u, "M"'] \arrow[ul, bend left, "\mathrm{id}", "-\otimes[\mathcal{O}(-1)]"']
\end{tikzcd}
$$

$\dim V = 2$

M — морита-экв-сть

$-\otimes[\mathcal{O}] = p^*$

$W \mapsto W\otimes_F \mathcal{O}$

т.е. $W\mapsto W\otimes_F \mathcal{O}(-1)$

$\mathbb{P}^1_F \xrightarrow{p} \mathrm{Spec}\,F$

$W \longmapsto W\otimes V$

левый $\mathrm{End}(V)$-мод.

т.е. мы хотим доказать, что

$K_*(\mathbb{P}^1_F) = (K_*F)\cdot[\mathcal{O}] \oplus (K_*F)\cdot[\mathcal{O}(-1)]$ как K_*F-модуль

?: $\underset{\text{левый}}{U} \longmapsto (V^*\otimes\mathcal{O}(-1))\otimes_{\mathrm{End}V} U$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Этот треугольник коммутативен

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(-1) = \left(\mathcal{O}(-1) \otimes_F V^*\right) \otimes_{\mathrm{End} V} V & V \arrow[l, mapsto] \\
& F \arrow[u, mapsto] \arrow[ul, mapsto, bend left]
\end{tikzcd}$$

⇝ дост. проверить, что нижнее отображение — изоморфизм

$$\begin{tikzcd}
V - \{0\} \arrow[d] & & V^* \otimes (V - \{0\}) \arrow[d] \arrow[r, phantom, "="] & \mathcal{J} & \circlearrowleft PGL(V) \\
\mathbb{P}(V) \circlearrowleft PGL(V) & \rightsquigarrow & \mathbb{P}(V) & &
\end{tikzcd}$$

$\gamma : Gal(F^{sep}/F) \longrightarrow PGL(V)(F^{sep})$ — коцикл т.ч.

$M_2(F)_\gamma = A(a,b)$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{J}_\gamma \arrow[d] \\
\rightsquigarrow & \mathbb{P}(V)_\gamma = \overline{C}_{a,b}
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{J}$ — правый $End(V)$-модуль

$End(V)_\gamma = A(a,b)$

$(-)_\gamma$ коммутирует с произведениями

⇝ $\mathcal{J}_\gamma$ — правый $A(a,b)$-модуль

Теорема

$$\begin{tikzcd}
K_*(\mathbb{P}(V)_\gamma) & K_*(F) \oplus K_*(End(V)_\gamma) \arrow[l, "p^*"'] \arrow[l, bend right, "\mathcal{J}_\gamma \otimes_{\overline{End(V)_\gamma}}"']
\end{tikzcd}$$

— это изоморфизм

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}_A \arrow[d] \\
SB_A
\end{tikzcd}$$

A — ц.п.а. над F, $deg(A) = d$ ⇝ SB_A — многообразие размерности $d-1$; форма $\mathbb{P}^{d-1}$

$SB_A(E) = \{$правые идеалы в $A \otimes_F E$ размерности $d\}$

$$\hookrightarrow \begin{tikzcd} K_*(SB_A) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & K_*F \oplus K_*(A) \arrow[l, bend left, "J_A \otimes_A -"] \end{tikzcd}$$

<u>Следствие:</u> $K_0(\overline{C}_{a,b}) = K_0F \oplus K_0(A(a,b)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$