

$g=0, X/F$

$X \cong \mathbb{P}^1$  или кривая второй степени в  $\mathbb{P}^2$

$l(-k) = 3$

$X \longrightarrow P(H^0(X, L)^*)$  ←  $\dim = d+1, s_0, \dots, s_d - \text{базис}$

$\begin{matrix} \psi \\ x \end{matrix} \longmapsto \{s \in H^0(X, L) \mid s(x) = 0\}$

$x$  - точка, если все сечения в ней annullются

$x \longmapsto [s_0(x) : \dots : s_d(x)]$

$\begin{matrix} X \\ \psi \\ P \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{P}^2 \quad P(H^0(X, -k) \cong (\Omega^1)^*)$

как понять, что оно определено в  $\mathbb{P}^2$ ?

$\begin{matrix} L(-k) & 3 \\ L(-k-p) & 2 \end{matrix} \gg 0k$

Почему второй степени?  $[s_0 : s_1 : s_2]$

$s_0^2, s_0 s_1, s_0 s_2, s_1^2, s_1 s_2, s_2^2$

$H^0(X, -2k)$   
 $L^{\otimes 2}$ , сколько сечений?

$h^0 = 4 - 0 + 1 = 5 < 6$  ~ есть соотношение.

Пусть  $X/F$  - многообразие (проективное)

$L$  - лн. расслоение на  $X$

$Z = X - U$ ,  $U \subseteq X$  открыто

$Z =$  общие нули всех сечений  $\Gamma(X, L)$

Хотим построить  $X \dashrightarrow \text{Proj } \sum_{i \geq 0} \Gamma(X, L)^i = P$

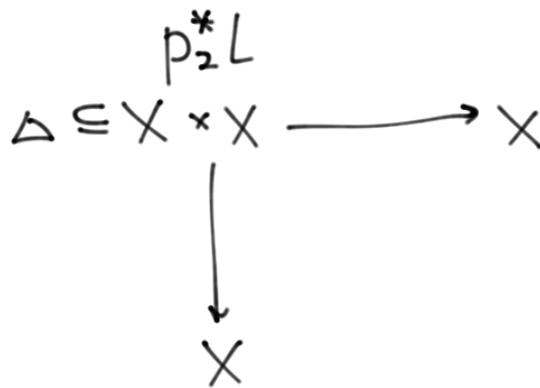
эл-ты степени 1:  $\Gamma(X, L)^* \ni \varphi$   
 $\varphi: \Gamma(X, L) \longrightarrow F$

афф. кусок:  $P_\varphi \rightsquigarrow$  строим  $U_\varphi \longrightarrow P_\varphi$  и склеиваем

Хотим доказать, что  $U = X$  для кривой

$P \in X \stackrel{?}{\rightsquigarrow} \exists$  сечение  $s \in \Gamma(X, L) : s(P) \neq 0$ . ( $L = (D')^*$ )

$\hookrightarrow \Delta \subseteq X \times X$   $\{(X, P)\}$



т. Римана-Роха на поверхности

$$D = p_2^* K - \Delta$$


---

Теперь  $X$  — кривая рода  $g=1$

① Есть точка  $P_0 \in X(F)$

$P_0, 2P_0, 3P_0, \dots$

$$l(0P_0) = 1;$$

$$l(P_0) = 1$$

т. Римана-Роха:

$$l(P_0) - \underbrace{l(-P_0)}_0 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$l(2P_0) = 2$$

$\leftarrow$  ф-ция  $x$  имеет полюс 2-го порядка на

$$l(3P_0) = 3$$

$1, x, y$

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

$$l(6P_0) = 6$$

$1, x, y, x^2, x^3, y^2, xy \rightsquigarrow$  есть соотношения

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

$\text{char } F \neq 2 \rightsquigarrow$  м. считать  $a_1 = a_3 = 0$

после замены  $y \mapsto y + \lambda x + \mu$

$\text{char } F \neq 3 \rightsquigarrow$  м. считать  $a_2 = 0$

$\text{char } F = 2 \rightsquigarrow y^2 = x^3 + ax + b$  особая

$$\rightsquigarrow t_0 t_2^2 = t_1^3 + a t_1 t_0^2 + b t_0^3$$

$$t_0 = 0 \rightsquigarrow t_1^3 = 0 \rightsquigarrow [0:0:1] = P_0 \in \mathbb{P}^2$$

$X$  — алг. группа!  $\rightsquigarrow X(\mathbb{Q})$  — группа

т. Морделла (гипотеза Пуанкаре)

Группа  $X(\mathbb{Q})$  конечно порождена. (см. Мамфорд, Abelian Varieties)

Пусть  $K$  — числовое поле  $\rightsquigarrow X(K)$  тоже кон. пород.

$K = \mathbb{F}_q(c) \rightsquigarrow$  тоже верно  
 $\uparrow$  кривая над  $\mathbb{F}_q$

$K = \mathbb{C}(C)$ , где  $C$  — кривая над  $\mathbb{C}$

Верно ли это? Например,  $K = \mathbb{C}(t)$

Даже  $X(\mathbb{C})$  не кон. пор.

$A' \xrightarrow{\quad} \textcircled{C} \xrightarrow{\quad} \text{сечетство кривых над } \mathbb{C} \text{ постоянно}$

а если не постоянно? почти верно: бывает изотрив.

если не изотрив., то кон. порожд.

Алгоритм нахождения точки  $X(\mathbb{Q})$  работает, если  $\mathcal{W}(X)$  конечна

Если точки нет:

Бывает, что локально точки есть, а глобально нет:

$$3t_0^3 + 4t_1^3 + 5t_2^3 = 0 \quad (\text{Selmer})$$

$X \rightsquigarrow \text{Jac}(X)$  — абелево многообразие

⌋ якобиан (если  $X$  — кривая)

двогруппы  $\left. \begin{matrix} \text{Pic}(X) \\ \text{Pic}_d(X) \\ \text{alb}(X) \end{matrix} \right\}$  совпадают для кривой

$F = \bar{F} \rightsquigarrow \text{Jac}(X) = X$  для  $g(X) = 1$

$F \neq \bar{F}$  (например,  $F = \mathbb{Q}$ )  $\rightsquigarrow$  это не так!

тогда  $\text{Jac}(X)$  — эллипт. кривая;  $X$  — торсер над  $\text{Jac}(X)$ :

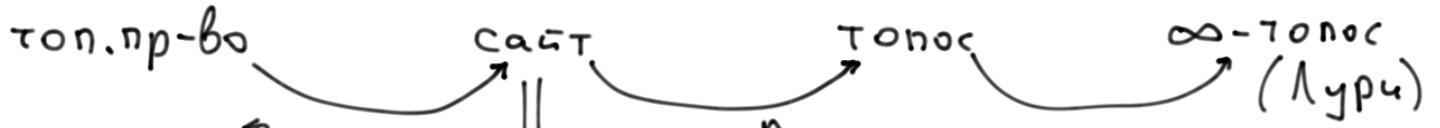
$G$  — аб. гр.,  $G$  действует на  $X$ ,  $\forall x, y \in X \exists! g \in G: gx = y$

т.е.  $\exists \delta: X \times X \rightarrow G$ :

$G \times X \xrightarrow{\delta} X$  — действие

$$\begin{array}{ccc} X \times X & & \\ \downarrow \delta \times p_1 & \searrow p_2 & \\ G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

# Правильное опр. топоса



категория + топ. Гротендика

кат.  $\mathcal{E}$  пучков  
мн-в

$\mathcal{O}b$  = открытые подмн-во  
 $\mathcal{M}on$  = вложения