

Лемма 7

$\forall f: X \rightarrow Y$ в \mathcal{C} существует морфизм

$\tilde{f}: QX \rightarrow QY$ такой, что

$$QX \xrightarrow{\tilde{f}} QY$$

① \tilde{f} определяется по f с точностью до левой (правой) гомотопии.

$$\begin{array}{ccc} P_X / Z & & Z / P_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

② \tilde{f} — слабая эквивалентность $\Leftrightarrow f$ — слабая эквивалентность

Доказ-во Конструкция:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & QY \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow Z/P_Y \\ QX & \xrightarrow{f/P_X} & Y \end{array}$$

По лемме 3 (для QX и Y)
Все определено с точностью до левой гомотопии

Если A — кораслоенный, то
из $f \sim g$ следует $f \sim^R g$
 \Rightarrow и с точностью до правой гомотопии

(2) — из аксиомы 2-из-3

Замечание

Определим функтор $Q: \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_c$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & QX \\ \downarrow f & \longrightarrow & [\tilde{f}] \in \pi R(QX, QY) \\ Y & & \end{array}$$

Двойственное утверждение: для $f: X \rightarrow Y$ существует

$\bar{f}: RX \rightarrow RY$ т.ч.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow Z & & \downarrow Z \\ RX & \longrightarrow & RY \end{array}$$

с аналогичными свойствами,

и $\exists R: \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_f$.

Лемма 8

① $Q: \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_c$. Ограничение Q на \mathcal{C} индуцирует

$\rightarrow Q': \pi\mathcal{C}_f \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ ② Аналогично, по $R: \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_f$

строится $R': \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$.

Доказ-во (2) $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, докажем, что для $f, g: X \rightarrow Y$ таких, что $\bar{f} = \bar{g}$ в $\pi \mathcal{C}$ выполнено $Rf = Rg$.

Достаточно рассмотреть случай $f \stackrel{R}{\sim} g$, а это лемма 7' \square

Определение Гомотопическая категория $\text{Ho}(\mathcal{C})$ модельной категории \mathcal{C} — это категория с $\text{Ob } \text{Ho}(\mathcal{C}) = \text{Ob } \mathcal{C}$ и

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(X, Y) = \text{Hom}_{\pi \mathcal{C}_{\text{cf}}}(R'QX, R'QY)$$

$$\pi(RQX, R'QY)$$

Существует функтор $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$, тождественный на объектах и посылающий $f: X \rightarrow Y$ в $R'Q(f): R'Q(X) \rightarrow R'Q(Y)$.

Узв. 9 Пусть f — морфизм в \mathcal{C} . Тогда $\gamma(f)$ является изоморфизмом в $\text{Ho}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow f$ — слабая эквивалентность.

(2) Морфизмы в $\text{Ho}(\mathcal{C})$ порождены композициями $\gamma(f)$, $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, и $\gamma(g)^{-1}$, g — слабая эквивалентность в \mathcal{C} .

$$X \xrightarrow{\sim} \xrightarrow{\sim} \xrightarrow{\sim} \xrightarrow{\sim} Y$$

Доказ-во (1) $f: X \xrightarrow{\sim} Y \Leftrightarrow R'Q(f): RQ(X) \xrightarrow{\sim} RQ(Y)$

f' — обратный к $R'Q(f)$ в $\pi \mathcal{C}_{\text{cf}}$

$$(2) X \xleftarrow[\sim]{R_X} QX \xrightarrow[\sim]{i_{QX}} RQX$$

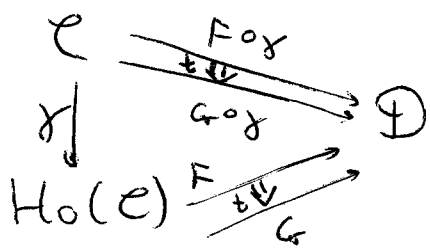
для $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(RQ(X), RQ(Y)) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(R'Q(X), R'Q(Y))$

$f: X \rightarrow Y$ в $\text{Ho}(\mathcal{C})$ может быть записан в виде

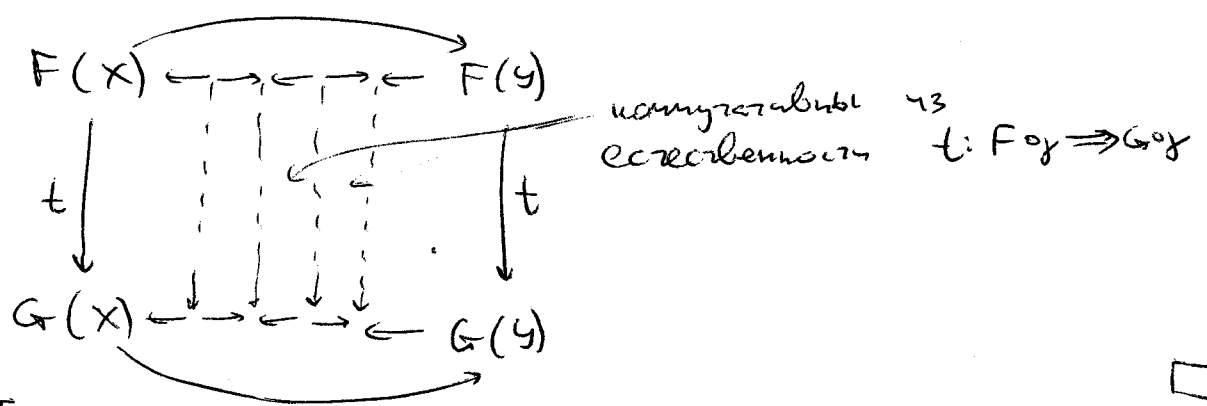
$$X \xrightarrow{\sim} RQ(X) \rightarrow RQ(Y) \xrightarrow{\sim} Y$$

\square

Следствие $F, G: \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$, $t: F_X \rightarrow G_X$ — естественное преобразование функторов. Тогда t индуцирует естественное преобразование $F \rightarrow G$



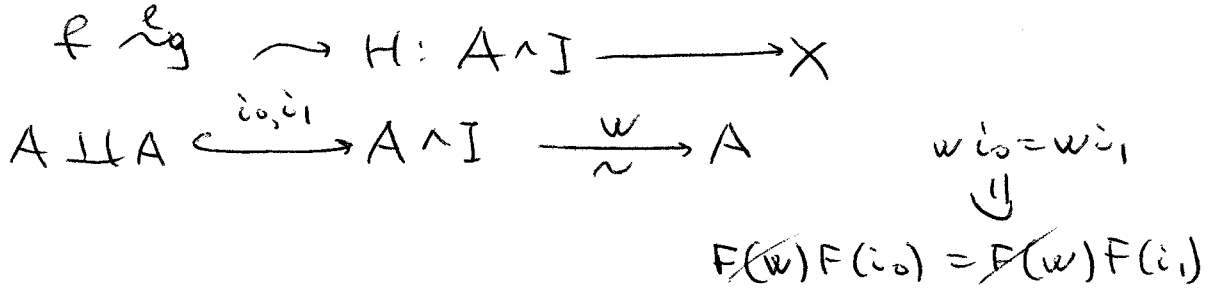
Доказ-во



Лемма 10

\mathcal{C} — замкнутая модельная категория,
 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ переводит слабые эквивалентности в изоморфизмы.
 Тогда если $f \xrightarrow{\ell} g: A \rightarrow X$ (соед. $f \xrightarrow{R} g: A \rightarrow X$),
 то $F(f) \cong F(g)$ в \mathcal{D} .

Доказ-во



$$\Rightarrow F(f) = F(H)F(i_0) = F(H)F(i_1) = F(g)$$

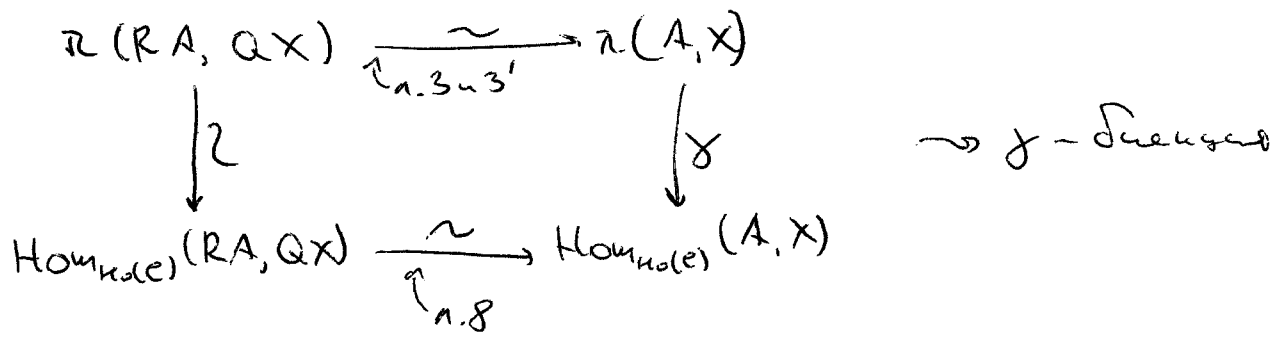
Узв.

A — корасслоенный, X — расслоенный

$\Rightarrow \gamma: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(A, X)$
 сюръективно и индуцирует биекцию между
 $\pi(A, X)$ и $\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(A, X)$

Доказ-во

Если отображение $\pi(A, X) \xrightarrow{\gamma} \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(A, X)$

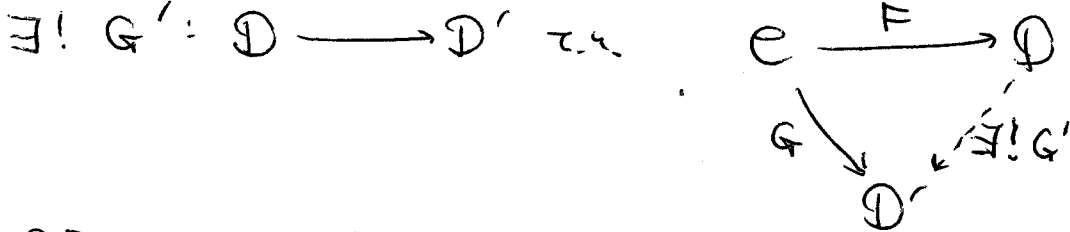


§ Локализация

Определение \mathcal{C} — категория, W — класс морфизмов в \mathcal{C} . $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ называется локализацией \mathcal{C} в W , если

① $F(f)$ — изоморфизм $\forall f \in W$

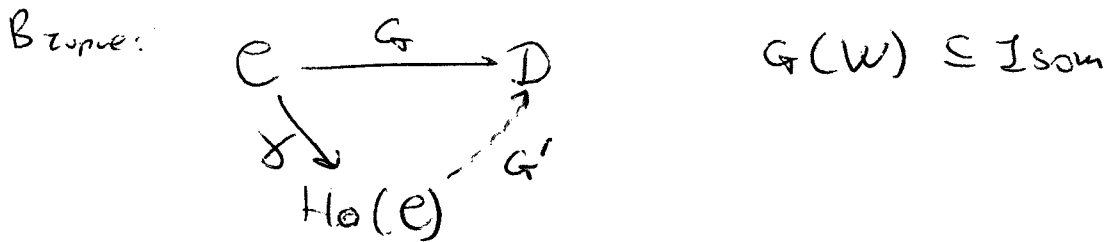
② $\forall G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}'$ такою, что $G(f)$ — изоморфизм $\forall f \in W$



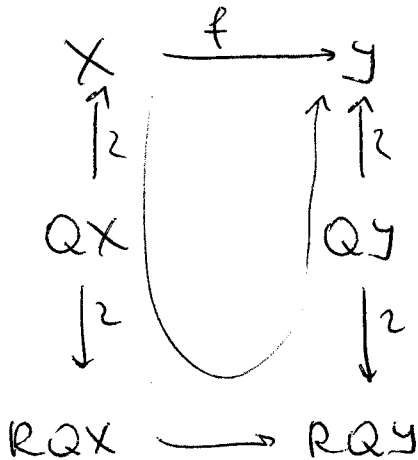
Обозначение: $\mathcal{D} = \mathcal{C}[W^{-1}]$

Теорема Пусть \mathcal{C} — замкнутая модельная категория, W — слабые эквивалентности в \mathcal{C} . Тогда функтор $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$ есть локализация \mathcal{C} в W .

Доказ. Проверим два свойства: первое — у-в. 9



Понятно, как G' действует на объектах. На морфизмах:



Глава Примеры модельных категорий

- I Top: ① W - слабые гомотоп. экв-ции
 ② C - регулярные отображения $X \rightarrow Y'$, где Y' полученные присоединением клеток
 ③ F - расслоения Серра

II R -кольцо с 1 Mod_R - категория левых модулей над R

$$\text{Ch}_R: M_0 \xleftarrow{\partial} M_1 \xleftarrow{\partial} M_2 \xleftarrow{\partial} \dots, \partial^2 = 0$$

$$Z_k(M) = \begin{cases} \ker(\partial: M_k \rightarrow M_{k-1}), & k > 0 \\ M_0, & k = 0 \end{cases}$$

$$B_k(M) = \text{Im}(\partial: M_{k+1} \rightarrow M_k)$$

$$H_k(M) = Z_k / B_k$$

$$H_k: \text{Ch}_R \rightarrow \text{Mod}_R$$

- ① W : $f: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ т.ч. $H_k M_\bullet \xrightarrow{\sim} H_k N_\bullet$ ($k \geq 0$)
 (f - квазиизоморфизм)
 ② C : $0 \rightarrow M_\bullet \rightarrow N_\bullet \rightarrow P_\bullet \rightarrow 0$
 \hookrightarrow , если P_\bullet состоит из проективных модулей.
 ③ F : $M_k \rightarrow N_k \rightarrow 0$ - эпи во всех $k > 0$

Теорема Эта структура задает модельную категорию на Ch_R

Предложение $\forall A, B \in \text{Ob}(\text{Mod}_R)$

$$\text{Hom}_{\text{ho}(C)}(K(A, n), K(B, m))$$

$$\cong \text{Ext}^{n-m}(A, B)$$

$K(A, n) \in \text{Ch}_R$
 (модуль A в разн. ч,
 0 в остальных
 аналог пр-ва Эilenберга-Мацвейна)

Если в (2) заменить P_\bullet на комплекс свободных модулей, то получим модельную категорию, не являющуюся замкнутой.