16.01.2014

А. Ананьевский

$$W^*(\mathbb{P}^{2n}) = W^*(pt)$$
$$W^*(\mathbb{P}^{2n+1}) = W^*(pt) \oplus W^{*-2n-1}(pt)$$

Более того:

$$W^*(\mathbb{P}^{2n}; \mathcal{O}(2m)) = W^*(pt)$$
$$W^*(\mathbb{P}^{2n+1}; \mathcal{O}(2m)) = W^*(pt) \oplus W^{*-2n-1}(pt)$$
$$W^*(\mathbb{P}^{2n}; \mathcal{O}(2m+1)) = W^{*-2n}(pt)$$
$$W^*(\mathbb{P}^{2n+1}; \mathcal{O}(2m+1)) = 0$$

1. W^* – SL-ориентированы
2. $W^*(X; L_1^{\otimes 2} \otimes L_2) \simeq W^*(X; L_2)$
3. η обратимо ($\Longleftrightarrow W^*(\mathbb{P}^1; \mathcal{O}(1)) = 0$)

$A^{*,*}$ — представимая в $SH(k)$ теория когомологий

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ X – гладкое многообразие; $s \in \mathcal{O}_X^*$

$$f_{s^2}: X_+ \wedge T \longrightarrow X_+ \wedge T \qquad // \ T := \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$$
$$(x, u) \longmapsto (x, s^2(x) \cdot u)$$

$$\Rightarrow \Sigma_T^\infty f_{s^2} = id_{\Sigma_T^\infty (X_+ \wedge T)}$$

$\boxed{\text{Док-во}}$ $\mathrm{Hom}_{SH}((X \times \mathbb{P}^1)_+, X_+ \wedge T)$

$$= \mathrm{Hom}(X_+ \wedge T, X_+ \wedge T) \oplus \mathrm{Hom}(X_+, X_+ \wedge T)$$

$$(x, [u : v]) \longmapsto (x, [s^2(x) u : v]) = (x, [s(x) \cdot u : s^{-1}(x) \cdot v]) \qquad \square$$

$\boxed{\text{Lemma 2}}$ $H_{2n}: \mathbb{A}^{2n} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$

$$(x_1, \dots, x_{2n}) \longmapsto [x_1 : \dots : x_{2n}]$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{A}^{2n} - \{0\}, 1) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\simeq" rotate=90] & \mathbb{P}^{2n-1} \arrow[r] & \mathbb{P}^{2n-1}/\mathbb{P}^{2n-2} \simeq \mathbb{P}^{2n-1}/(\mathbb{P}^{2n-1} - pt) \arrow[d, phantom, "\simeq" rotate=90] \\
\mathbb{G}_m \wedge T^{2n-1} \arrow[rr] & & T^{\wedge 2n-1} & \text{это } \Sigma_T^{2n-1} \eta \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$H_2 : \mathbb{A}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$\begin{tikzcd}
\rightsquigarrow \Sigma^\infty_T H_2 : \Sigma^\infty_T(\mathbb{A}^2-\{0\},1) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \Sigma^\infty_T(\mathbb{P}^1,1) \\
\Sigma^\infty_T(\mathbb{G}_m \wedge T) \arrow[r] & \Sigma^\infty_T(T) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
\pi^{-1,-1}(pt) \ni \eta : \Sigma^\infty_T \mathbb{G}_m \arrow[r] & \Sigma^\infty_T S^0
\end{tikzcd}$$

Тогда $H^{A}_{2n} : A^{*,*}_\eta(\mathbb{P}^{2n-1}/\mathbb{P}^{2n-1}-\{0\}) \xrightarrow{\sim} A^{*,*}_\eta(\mathbb{A}^{2n}-\{0\},1)$

<u>Док-во</u>:

$$\begin{tikzcd}
T^{\wedge 2n-2}\wedge T \arrow[d, equal] & T^{\wedge 2n-1}\wedge(\mathbb{G}_{m+}) \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[d] \\
T^{\wedge 2n-2}\wedge T \arrow[r, equal] & T^{\wedge 2n-1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(x_1,\dots,x_{2n-2},\frac{x_{2n-1}}{t}) & (x_1,\dots,x_{2n-2},x_{2n-1},t) \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[d] \\
(x_1,\dots,x_{2n-2},\frac{x_{2n-1}}{t^{2n-1}}) & (\frac{x_1}{t},\dots,\frac{x_{2n-1}}{t})
\end{tikzcd}$$

$\square$

$\boxed{\text{Th 1}}$ ① $A^{*,*}_\eta(\mathbb{P}^{2n}) = A^{*,*}_\eta(pt)$

② $A^{*,*}_\eta(\mathbb{P}^{2n-1}) = A^{*,*}_\eta(\mathbb{A}^{2n}-\{0\})$

$= A^{*,*}_\eta(pt) \oplus A^{*-4n+2,*-2n+1}_\eta(pt)$

<u>Док-во</u> Индукция по n

<u>$2n \mapsto 2n+1$</u>

выбор точки

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^0 \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^{2n+1} & \rightsquigarrow A^{*,*}_\eta(\underbrace{\mathbb{P}^{2n+1}/\mathbb{P}^{2n+1}-\mathbb{P}^0}_{=\ \mathbb{P}^{2n+1}/\mathbb{P}^{2n}}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & A^{*,*}_\eta(\mathbb{P}^{2n+1}) \arrow[d] \\
& & A^{*,*}(\mathbb{A}^{2n+2}-\{0\},1) & A^{*,*}_\eta(\mathbb{P}^{2n+1}-\mathbb{P}^0)
\end{tikzcd}$$

Lemma 2

индукция

$2n-1 \mapsto 2n$

$$A_\eta^{*,*}(\underbrace{\mathbb{P}^{2n}/\mathbb{A}^{2n}}_{\cong\, Th_{\mathbb{P}^{2n-1}}(\mathcal{O}(1))}) \to A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n}) \to A_\eta^{*,*}(\mathbb{A}^{2n})$$

$$\overset{?}{=} 0 \qquad\qquad A_\eta^{*,*}(\mathbb{A}^{2n}) \cong A_\eta^{*,*}(pt)$$

$$A_\eta^{*,*}(Th_{\mathbb{P}^{2n-1}}(\mathcal{O}(1))) \to A_\eta^{*,*}(\underbrace{\mathbb{P}^{2n-1}}_{\cong\, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n-1}}(1)}) \to A_\eta^{*,*}(\mathbb{A}^{2n}-\{0\})$$

индукция □

$\boxed{\text{Опр.}}$ E — вект. расслоение над X ранга n

$$A^{*,*}(X;E) := A^{*+2n,*+n}(Th(E))$$

$$A^{*,*}(X,E_1)\times A^{*,*}(X,E_2) \to A^{*,*}(X,E_1\oplus E_2)$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ $W^*(X;L) = W_X^{*+1}(L)$ — в старом смысле

Если A ориентирована, то $A^{*,*}(X;E)\cong A^{*,*}(X)$

$\boxed{\text{Lemma}}$ $E_1, E_2 / X$ → есть хороший изоморфизм

$$A^{*,*}(X) \xrightarrow{\sim} A^{*,*}(X,E_2) \to A^{*,*}(X,E_1) \simeq A^{*,*}(X,E_1\oplus E_2)$$

$$A^{*,*}(E_1-X) \xrightarrow{\sim} A^{*,*}(E_1-X, p^*E_2)$$

Док-во: несложно □

$\boxed{\text{Следствие}}$ (1) $[E_1]=[E_2]$ в $\widetilde{K}_0 \Rightarrow A^{*,*}(X,E_1)\simeq A^{*,*}(X,E_2)$

(2) $A^{*,*}$ — SL-ориентирована $\Rightarrow A^{*,*}(X,E)\simeq A^{*,*}(X,\det E)$

Док-во: (1) легко; (2) $A^{*,*}(X; \underbrace{E\oplus(\det E)^{-1}}\oplus(\det E))$ □

— поэтому $W_X(E) = W(X;\det E) = W_X(\det E)$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $A^{*,*}(X, E_1 - E_2) := A^{*,*}(X, E_1 \oplus \overline{E_2})$

трюк Жуанолоу: м. считать, что X аффинно;
выберем $\overline{E_2}$ и $\theta: E_2 \oplus \overline{E_2} \simeq \mathcal{O}_X^n$
если возьмем другое $\overline{E_2}'$, $\theta': E_1 \oplus \overline{E_2} \simeq \mathcal{O}_X^m$, то

$$A^{*,*}(X, \overline{E_2}) \simeq A^{*,*}(X, \overline{E_2} \oplus E_2 \oplus \overline{E_2}') \simeq A^{*,*}(X, \overline{E_2}')$$

$\boxed{\text{Lemma}}$ $A^{*,*}(X; E_1 \oplus E_3 - E_3 \oplus E_2) \simeq A^{*,*}(X, E_1 - E_2)$

$\boxed{\text{Lemma}}$ $A^{*,*}(X, E) \cong A^{*,*}(X; E^\vee)$

<u>Док-во</u>

$$\begin{array}{ccccc} E - X & \longleftarrow & Y & \longrightarrow & E^\vee - X \\ & & \| & & \\ & & \{(f, v) \mid f(v) = 1\} & \subset & E \times_X E^\vee \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} A^{*,*}(X; E) & \longrightarrow & A^{*,*}(X) & \longrightarrow & A^{*,*}(E - X) \\ \downarrow & & \| & & \downarrow \wr \\ A^{*,*}(E_1 \oplus E_2 / Y) & \longrightarrow & A^{*,*}(X) & \longrightarrow & A^{*,*}(Y) \\ \uparrow & & \| & & \uparrow \wr \\ A^{*,*}(X, E^\vee) & \longrightarrow & A^{*,*}(X) & \longrightarrow & A^{*,*}(E^\vee - X) \end{array}$$

□

E — вект. рассл. над $\mathbb{P}^k$ $\rightsquigarrow$ $\deg \det E$ — число.

$\boxed{\text{Th 2}}$ ① $\deg \det$ нечетно $\Rightarrow A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n-1}; E) = 0$

② $\deg \det$ четно $\rightarrow$ есть расщепляющаяся к.т.п.

$$i: pt \hookrightarrow \mathbb{P}^k$$

$$A_\eta^{*-4n+2, *-2n+1}(pt; i^*E \oplus \nu_i) \longrightarrow A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n-1}; E) \longrightarrow A_\eta^{*,*}(pt, i^*E)$$

и поэтому $A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n-1}; E) \simeq A_\eta^{*,*}(pt) \oplus A_\eta^{*-4n+2, *-2n+1}(pt)$

③ $\deg \det$ нечетно $\Rightarrow A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n}; E) \xleftarrow{\sim} A^{*-4n, *-2n}(pt, i^*E \oplus \nu_i)$

④ $\deg \det$ четно $\Rightarrow A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n}; E) \simeq A^{*,*}(pt; i^*E)$

Док-во: Для $\mathbb{P}^0$ все очевидно

(1) для $\mathbb{P}^1$: $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^{2m}$ $\rightsquigarrow$

$$A_\eta^{*-4m+2,*-2n+1}(\mathbb{P}^1; \mathcal{O}(1)^{\oplus 2m-1}) \to A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2m}) \underset{\mathrm{Th1}}{\xrightarrow{\sim}} A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2m-2})$$

Далее мы покажем примерно вот что:

(1 для n) $\overset{+\text{индукция}}{\Longrightarrow}$ (2 для n)

(1 для 2n-1) => (3, 4 для 2n)

(1 для 2n-1) => (1 для 2n+1)

(1) => (3): $\mathbb{P}^0 \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^{2n} \xleftrightarrow{j} \mathbb{P}^{2n-1}$

$$A_\eta^{*-4n,*-2n}(pt; i^*E\oplus\nu_i) \to A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n}; E) \to \underbrace{A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n-1}; j^*E)}_{=0}$$

(1) => (4):

$$\underbrace{A_\eta^{*-2,*-1}(\mathbb{P}^{2n-1}; j^*E\oplus\mathcal{O}(1))}_{=0} \to A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n}; E) \to A^{*,*}(pt, i^*E)$$

(1 для 2n-1) => (1 для 2n+1): $\mathbb{P}^1 \xhookrightarrow{r} \mathbb{P}^{2n+1}$

$$\underbrace{A_\eta^{*-4n,*-2n}(\mathbb{P}^1; r^*E\oplus\mathcal{O}(1)^{\oplus 2n})}_{=0} \to A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n+1}; E) \xrightarrow{\sim} A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n-1}; j^*E)$$

(1) => (2): $\mathbb{P}^0 \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^{2n-1} \hookleftarrow \mathbb{P}^{2n-2}$

$$A_\eta^{*-4n+2,*-2n+1}(\mathbb{P}^0; i^*E\oplus\nu_i) \to A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n-1}; E) \to A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n-2}; j^*E) \cong A_\eta^{*,*}(pt, j^*E)$$

$H_{2n}: \mathbb{A}^{2n}-\{0\} \to \mathbb{P}^{2n-1}$

$$\overbrace{A_\eta^{*-2,*-1}(\mathbb{P}^{2n-1}; E\oplus\mathcal{O}(1))}^{=0} \to A_\eta^{*,*}(\mathbb{P}^{2n-1}; E) \to A_\eta^{*,*}(\mathbb{A}^{2n}-\{0\}, H_{2n}^*E)$$

$$A_\eta^{*,*}(pt, i^*E) \xrightarrow{\sim} A_\eta^{*,*}(pt, i^*H_{2n}^*E)$$

$$\begin{tikzcd}
A^{*,*}(\mathbb{A}^{2n}-\{0\}; H^*_{2n}E) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & A^{*,*}(\mathbb{A}^{2n}-\{0\}; H^*_{2n}E\oplus\mathcal{O}^n) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
& A^{*,*}(\mathbb{A}^{2n-2}-\{0\}; \mathcal{O}^k) \arrow[d, shift left] \\
& A^{*,*}(pt, \mathcal{O}^k) \arrow[u, shift left] \\
A^{*,*}(pt, i^*H^*_{2n}E) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & A^{*,*}(pt; i^*H^*_{2n}E\oplus\mathcal{O}^n) \arrow[u, dash, "\sim"]
\end{tikzcd}$$

$\square$

Можно написать трансферы: если $Y \xrightarrow{i} X$ проективный, то

$$A^{*,*}(Y, -[T_Y]\oplus i^*E) \to A^{*,*}(X, -[T_X]\oplus E)$$

трансфер в pt — см. пункт (3) в Th2.

Вообще, $A^{*,*}(\mathbb{P}^n, E)$ — своб. модуль (ранга 1 или 0) над $A^{*,*}(\mathbb{P}^n)$