

G — простая расщепимая алг. группа

$$\hookrightarrow \text{Inv}^3(G, \mathbb{Z})_{\text{ind}} \cong H^2(X)_{\text{tors}}$$

X — версальное флатово многообразие

Если G полупроста, то есть сюръекция, и ядро описано в терминах Λ, T^*

k — поле, $\text{char } k = 0$

• Кохомологич. инварианты

$$F/k, \quad H^1(F, G) = \text{мн-во } G\text{-торсоров над } F$$

$$\parallel$$

$$H_{\text{et}}^1(F, G)$$

R — F -алгебра, Y — F -торсор $\Leftrightarrow G(R) \curvearrowright Y(R)$ свободно и транзитивно

торсор трив. $\Leftrightarrow Y(R)$ всегда $\neq \emptyset \Leftrightarrow Y(F) \neq \emptyset$

Пусть $H: \text{Fields}/F \rightarrow \text{Ab}$ — функтор

Кохомолог. инвариант G с коэфф. в H — естеств. преобр.

$$H^1(-, G) \longrightarrow H(-)$$

$\text{Inv}(G, H) = \text{группа инвариантов } G \text{ с коэфф. в } H$

$$\parallel$$

$$\text{Inv}(G, H)_{\text{tors}} \oplus H(F)$$

$$\parallel$$

$$\{u \mid u(\text{tors}) = 0\}$$

p — простое; $\mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p(d) = \varinjlim_n \mu_{p^n}^{\otimes d}$ — Gal-модуль

$$H(F) = \bigoplus_{p\text{-простое}} H^d(F, \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p(d-1))$$

$$\text{Inv}(G, d) := \text{Inv}(G, H^d(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1)))$$

$$d=2 \leadsto \text{получаем } H^2(F, \mu_{p^n}) = p^n B_2$$

$$\leadsto H^2(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = B_2(F)$$

• Инварианты степени 2

Группа односвязна $\leadsto$ все инв-ты постоянны.

Иначе: $1 \longrightarrow C \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1$

$$\leadsto H^1(F, C) \longrightarrow H^1(F, \tilde{G}) \longrightarrow H^1(F, G) \longrightarrow H^2(F, C)$$

$$\chi: C \longrightarrow G_m \leadsto H^2(F, C) \xrightarrow{\chi^*} H^2(F, G_m) = B_2(F)$$

— это инв-т степени 2 $\leadsto C^* \xrightarrow{\beta} \text{Inv}(G, 2)_{\text{полн}}$

• Инварианты степени 3

$\alpha \in k^*$, $\chi \in C^*$ $\leadsto$ по $\mathcal{U}$ -торс./ F определим

$$u(\mathcal{U}) = (\alpha) \cup \beta_x(\mathcal{U}) \in H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

Группа, порожд. такими — $\text{Inv}^3(G, 2)_{\text{dec}}$ (decomposable)

$$\text{Inv}^3(G, 2)_{\text{ind}} = \text{Inv}^3(G, 2)_{\text{полн}} / \text{Inv}^3(G, 2)_{\text{dec}}$$

• Версальный торсор и версальный флаг

Классифицирующее многообразие:

V — представление G : $\exists \mathcal{U} \xrightarrow[\text{откр.}]{} V$, $\text{codim } V \setminus \mathcal{U} \geq 3$,
 $G \curvearrowright \mathcal{U}$ свободно

Таких много: $G \hookrightarrow GL(W) \curvearrowright M(W)$

$GL(W)$ действует свободно на $GL(W)$ — $\text{codim } 1$ в $M(W)$

$$GL(W) \curvearrowright M(W) \oplus M(W)$$

Итак, $G \curvearrowright U$ свободно $\Rightarrow \exists U/G; U \rightarrow U/G - G$ -тортор

- классифицирующая G -тортор:

$$\begin{array}{ccc} \forall F/k & \forall \text{ тортора } U & \xrightarrow{\quad} U \\ & \downarrow \text{Spec } F & \downarrow \\ & \text{Spec } F & \xrightarrow{x} U/G \end{array}$$

. Проверим это для $F=k$:

$$\begin{array}{ccc} U \times Y/G & & \\ \swarrow \downarrow & \searrow & \\ Y/G & & U/G \\ \text{Spec } k & & \end{array}$$

U открыт в V ($V - G$ -пр-во)

$\Rightarrow U \times Y/G$ открыт в $V \times Y/G$
вект. пр-во

$\Rightarrow \exists$ рац. точка

$$\text{Spec } k \xrightarrow{x} U \times Y/G$$

- она индуцирует тортор Y

Теперь фиксируем класс пр-ва (ответы не зависят от выбора)

Версальный тортор - свой класс пр-ва в данной точке $z \in U/G$:

$$\begin{array}{ccc} Y_z & \xrightarrow{\quad} & U \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ z & \xrightarrow{\quad} & U/G \end{array} \quad z = \text{Spec}(k(U/G))$$

Версальный флаг: $X_z = Y_z/B$ (удобнее Y_z/T :
СН тот же)

$$\begin{array}{ccc} \text{Inv}^3(G, 2) & \xrightarrow{\Theta} & H^3(k(U/G), 2) \\ U & \xrightarrow{\quad} & U(Y_z) \end{array}$$

Утверждение: Θ инъективно

Рассмотрим Zar-пучок $\mathcal{H}^3$, ассоц. с предпучком

$$W \mapsto H^3(W, \mathbb{Z}) \quad \text{на } \mathcal{U}/G$$

$$H_{Zar}^0(\mathcal{U}/G, \mathcal{H}^3) = \text{Ker}(H^3(k(\mathcal{U}/G), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in \mathcal{U}/G^{(1)}} H^2(k(x), \mathbb{Z}))$$

$$\text{Im } \partial = H_{Zar}^0(\mathcal{U}/G, \mathcal{H}^3)$$

$$Y \longrightarrow \mathcal{U}$$

$$\downarrow$$

$$F$$

$$\downarrow$$

$$x$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{U}/G$$

$$\mathcal{U}(Y) = X^*(\mathcal{O}) \in H_{Zar}^0(F, \mathcal{H}^3) = H^3(F, \mathbb{Z})$$

$$\text{Inv}^3(G, \mathbb{Z})_{\text{norm}} = \text{Ker}(H_{Zar}^0(\mathcal{U}/G, \mathcal{H}^3) \longrightarrow H^3(k(Y_Z)))$$

$$0 \rightarrow A'(X_Z, K_Z) \rightarrow k(\mathcal{U}/G)^* \otimes \Lambda \xrightarrow{\rho} \widetilde{H}^3(k(\mathcal{U}/G), \mathbb{Z}) \xrightarrow{d} (H^2(X_Z))_{\text{tors}} \rightarrow 0$$

$$\downarrow \partial^*$$

$$\downarrow d$$

$$\downarrow \partial$$

$$0 \rightarrow \bigoplus_{Z \in \mathcal{U}/G^{(1)}} A'(X_Z, K_Z) \rightarrow \bigoplus \Lambda \rightarrow \bigoplus \widetilde{H}^2(k(Z), \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Λ -решетка весов G

$$A'(X_Z, K_Z) = H(K_Z(k(X_Z))) \rightarrow \bigoplus K_1(\mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus K_0(\mathbb{Z})$$

$$\parallel$$

$$H_{Zar}^1(X_Z, K_Z), \quad K_Z \text{ - пучок, ассоц. с } W \mapsto K_2(W)$$

$$\widetilde{H}^3(k(\mathcal{U}/G), \mathbb{Z}) = \text{Ker}(H^3(k(\mathcal{U}/G), \mathbb{Z}), H^3(k(X_Z), \mathbb{Z}))$$

$$k(\mathcal{U}/G)^* \otimes \Lambda = (A'(X_Z^{\text{sep}}, K_Z))^{\Gamma_{k(\mathcal{U}/G)}}$$

$$X_3^{\text{sep}} = X_3 \times \text{Spec } k(u/\mathbb{A})^{\text{sep}} \quad - \text{расщеп. форм}$$

$$A'(X_3^{\text{sep}}, k_2) = k(u/\mathbb{A})^{\text{sep}} \otimes \underbrace{A'(X_3^{\text{sep}}, k_1)}_{\text{Pic}(X_3^{\text{sep}}) = \Lambda}$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \Lambda / T^* = C^* \\ \lambda & \longmapsto & \bar{\lambda} \end{array} \quad 1 \longrightarrow C \longrightarrow \widehat{C} \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

$$\varphi: \varphi \otimes \lambda \longmapsto (\varphi) \cup \beta_{\bar{\lambda}}(y_3)$$

$$H^2(k(u/\mathbb{A}), 1)$$

Почему лере для Zar и ét:

$$\mathcal{H}^q - \text{группы Zar, ассо. с } W \longmapsto H^q(W, \dots)$$

$$\leadsto E_2^{p,q} = H_{Zar}^p(X_3, \mathcal{H}^q) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X_3, \dots)$$

= почему для

$$p=1, q=2 \leadsto H_{Zar}^1(X_3, \mathcal{H}^2) \xrightarrow{\text{композиция}} \mathcal{H}_{\text{ét}}/X_3 \longrightarrow \mathcal{H}_{Zar}/X_3 \longrightarrow ab$$

$$\text{Ker}(H_{\text{ét}}^3(X_3, \dots) \longrightarrow H^3(k(X_3), \dots))$$

$$H_{Zar}^0(X_3, \mathcal{H}^3)$$



$$H(H^2(k(X_3), \mu_{p^n}^{\otimes 2}) \longrightarrow \bigoplus_{Z \in X_3^{(1)}} H^1(Z, \mu_{p^n}) \longrightarrow \bigoplus_{Z \in X_3^{(2)}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})$$

$$K_2(k(X_3)) \longrightarrow \bigoplus K_1(Z) \longrightarrow \bigoplus K_0(Z)$$

$$\downarrow \cdot p^n \quad \downarrow \cdot p^n \quad \downarrow \cdot p^n$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$H^2(k(X_3), \mu_{p^n}^{\otimes 2}) \longrightarrow H^1(k(Z), \mu_{p^n}) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$$

$$\hookrightarrow H_{Zar}^1(X_Z, \mathcal{H}^2) \rightarrow H^2(X_Z) \xrightarrow{\cdot p^n} CH^2(X_Z)$$

Строим d :

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{H}^3(k(U/G), 2) & \rightarrow & \text{Ker } \partial(H_{\text{et}}^3(X_Z, 2)) & \rightarrow & H^3(k(X_Z), 2) \\ & & \parallel & & \\ & & H_{Zar}^1(X_Z, \mathcal{H}^2) & & \\ & \searrow d & \downarrow & & \\ & & CH^2(X_Z)_{\text{tors}} & & \end{array}$$

d — сюръекция, поскольку $\text{Pic}(U/G) = 0$:

$$\begin{array}{c} U \text{ — } G\text{-тортор} \rightsquigarrow \\ \downarrow \\ X \quad G^* \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(U) \rightarrow B_2(X) \\ \text{дан } U \nearrow \text{"0} \quad \quad \quad \text{"0} \\ \downarrow \\ U/G \end{array}$$

$$\hookrightarrow \text{Ker } \partial \xrightarrow{=} \text{Inv}^3(G, 2)_{\text{tors}} \rightarrow CH^2(X_Z)_{\text{tors}}$$

это ядро: $\text{im } g \cap \text{Ker } \partial$

$$\begin{array}{c} \text{Ker } d \rightarrow \text{im } g \cap \text{Ker } \partial \rightarrow \text{Coker } \partial^* \rightarrow 0 \\ \parallel \\ K^* \otimes \Lambda \end{array}$$

$$g(\text{Ker } d) = \text{Inv}^3(G, 2)_{\text{dec}}$$

$$0 \rightarrow \text{Coker } \partial^* \rightarrow \text{Inv}^3(G, 2)_{\text{ind}} \rightarrow CH^2(X_Z)_{\text{tors}} \rightarrow 0$$

Опишем $\text{Coker } \partial^*$

$$U/\Gamma \xrightarrow{f} U/G$$

$\hookrightarrow$ есть спектр посл-ств для топологии Фоста

$$A^p(U/G, A^q(f, K_2)) \Rightarrow A^{p+q}(U/G, K_2)$$

$$A^q(X_3, K_2) \rightarrow \bigoplus_{Z \in U/G^{(1)}} A^q(X_Z, K_1) \rightarrow \dots$$

$$CH^2(X) = A^2(X, K_2)$$

$$\text{Coker } \partial^x = A^1(U/G, A^1(f, K_2))$$

$$CH^2(U/G) \rightarrow CH^2(U/T) \rightarrow CH^2(X_3)$$

$$\begin{array}{c}
 \uparrow A^0(A^2) \\
 A^0(A^1) \xrightarrow{\quad} A^1(A^1) \\
 A^0(A^0) \xrightarrow{\quad} A^1(A^0) \xrightarrow{\quad} A^2(A^0) \\
 \downarrow \\
 CH^2(X_3) \\
 \vdots \\
 \text{Coker } \partial^x \\
 \vdots \\
 CH^2(U/G) / \dots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \bigcirc A^0(X_3, K_2) \rightarrow \bigoplus_{Z \in X_3^{(1)}} A^0(X_Z, K_1) \\
 \downarrow \\
 \bigoplus_{Z \in X_3^{(2)}} A^0(X_Z, K_0) \\
 \parallel \\
 \mathbb{Z} \\
 \uparrow \\
 \bigoplus k[X_Z]^x \rightarrow \mathbb{Z} \\
 \uparrow \\
 \bigoplus k[\mathbb{Z}]^x \\
 \sim CH^2(U/G)
 \end{array}$$

$$\text{coker } \partial^x = H[CH^2(U/G) \rightarrow CH^2(U/T) \rightarrow CH^2(X_3)]$$