Вопросы представимости в теории $\mathbb{A}^1$-гомотопий*

Александр Лузгарев

8 октября 2015 г.

Напомним, что в прошлый раз мы обсуждали следующую теорему.

thm:I-5.1.3 **Теорема 1.** *Пусть $\mathcal{F}$ — симплициальный предпучок на категории Sm_S. Предположим, что*

1. *$\mathcal{F}$ удовлетворяет условию аффинного вырезания по Нисневичу;*
2. *предпучок $\pi_0(\mathcal{F})$ $\mathbb{A}^1$-инвариантен на аффинных схемах.*

Тогда симплициальный предпучок $R_{\mathrm{Zar}} \operatorname{Sing}^{\mathbb{A}^1} \mathcal{F}$ Нисневич-локален и $\mathcal{A}^1$-инвариантен. Более того, для любой аффинной схемы U над S каноническое отображение

$$\pi_0\mathcal{F}(U) \to [U, \mathcal{F}]_{\mathbb{A}^1}$$

является изоморфизмом.

Напомним, что здесь R_{Zar} обозначает функтор фибрантной замены (на уровне гомотопической категории это просто левый сопряженный функтор к включению полной подкатегории Зариски-локальных симплициальных предпучков — аналог шифификации для симплициальных предпучков).

Сегодня мы выведем из теоремы thm:1 ?? следующее утверждение.

thm:2.2.5 **Следствие 1.** *Пусть G — конечно представимая гладкая групповая схема над S. Если предпучок $H^1_{\mathrm{Nis}}(-, G)$ $\mathbb{A}^1$-инвариантен на $\mathrm{Sm}^{\mathrm{aff}}_A$, то симплициальный предпучок $R_{\mathrm{Zar}} \operatorname{Sing}^{\mathbb{A}^1} B_{\mathrm{Nis}}G$ Нисневич-локален и $\mathbb{A}^1$-инвариантен. Более того, для любой аффинной схемы U над S каноническое отображение*

$$H^1_{\mathrm{Nis}}(U, G) \to [U, BG]_{\mathbb{A}^1}$$

является биекцией, функториальной по U.

Напомним, что через BG мы обозначаем предпучок отмеченных симплициальных множеств с n-симплексами G^n и обычными отображениями грани и вырождения. Далее, пусть $B_tG = R_tBG$ — его t-локальная замена, где t — некоторая топология Гротендика (например, $t = \mathrm{Zar}$ или $t = \mathrm{Nis}$).

Доказательство Теоремы thm:2.2.5 *1.* 1. Пучок $B_{\mathrm{Nis}}G$ является Нисневич-локальным по определению. Поэтому он удовлетворяет условию вырезания по Нисневичу (теорема Воеводского, см. I-3.2.5).

*по работам Asok–Hoyois–Wendt

2. $\pi_0(B_{\mathrm{Nis}}G) \cong H^1_{\mathrm{Nis}}(-, G)$ (лемма lemma:2.2.2 1).

3. Теперь можно применить теорему thm:I-5.1.3 1 к пучку $B_{\mathrm{Nis}}G$ и заключить, что $H^1_{\mathrm{Nis}}(U, G) \to [U, B_{\mathrm{Nis}}G]_{\mathbb{A}^1}$ — биекция, функториальная по U.

4. Наконец, морфизм $BG \to B_{\mathrm{Nis}}G$ является Нисневич-локальной эквивалентностью (вообще, морфизм f называется **t-локальной эквивалентностью**, если $R_t(f)$ — слабая эквивалентность), и потому $[U, B_{\mathrm{Nis}}G]_{\mathbb{A}^1} \cong [U, BG]_{\mathbb{A}^1}$.

□

Для того, чтобы закончить доказательство, нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, t — топология Гротендика на $\mathcal{C}$, G — пучок групп на $\mathcal{C}$ в топологии t, $X \in \mathcal{C}$. **G-торсор над** X — это тройка (P, π, a), где P — t-пучок на $\mathcal{C}$, $a\colon P \times G \to P$ — правое действие G на P, и $\pi\colon P \to X$ — G-эквивариантный морфизм (где X снабжен тривиальным G-действием) такие, что

1. морфизм $(\mathrm{pr}_1, a)\colon P \times G \to P \times_X P$ — изоморфизм;

2. π **локально расщепляется в топологии** t, то есть, набор морфизмов $U \to X$ в $\mathcal{C}$ таких что $P \times_X U \to U$ имеет сечение, является покрытием X в топологии t.

Всевозможные G-торсоры над всевозможными объектами $X \in \mathcal{C}$ образуют категорию $\mathrm{Tors}_t(G)$ расслоенную в группоидах над $\mathcal{C}$. Обозначим через $B\mathrm{Tors}_t(G)$ симплициальный предпучок, сопоставляющий объекту $U \in \mathcal{C}$ нерв группоида G-торсоров над U (на самом деле, тут нужно позаботиться о функториальности: нерв группоида сечений $\mathrm{Tors}_t(G)$ над $\mathcal{C}/U$). Хорошо известно, что $\mathrm{Tors}_t(G)$ является стэком в топологии t (это эквивалентно тому, что $B\mathrm{Tors}_t(G)$ t-локален). Имеется морфизм $BG \to B\mathrm{Tors}_t(G)$, посылающий единственную вершину $BG(U)$ в тривиальный G-торсор над U. Из t-локальности $B\mathrm{Tors}_t(G)$ следует, что имеется морфизм симплициальных предпучков

$$B_tG \to B\mathrm{Tors}_t(G).$$

lemma:2.2.2 **Лемма 1.** *В предыдущих обозначениях*

1. *этот морфизм является слабой эквивалентностью симплициальных предпучков;*

2. *имеется естественный изоморфизм* $\pi_0(B_tG)(-) \cong H^1_t(-, G)$*;*

3. *имеется каноническая слабая эквивалентность* $R\Omega B_tG \cong G$.

Сейчас мы сформулируем относительную версию теоремы thm:I-5.1.3 1. Напомним, что гомотопическая последовательность расслоения — это гомотопически декартов квадрат, в котором один угол (правый верхний или левый нижний) является точкой.

thm:2.1.5 **Теорема 2.** *Пусть* $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *— гомотопическая последовательность расслоения отмеченных симплициальных предпучков на* Sm_S. *Предположим, что*

1. *предпучки* $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{H}$ *удовлетворяют аффинному вырезанию по Нисневичу;*

2. *предпучки* $\pi_0(\mathcal{G})$ *и* $\pi_0(\mathcal{H})$ $\mathbb{A}^1$*-инвариантны на аффинных схемах.*

Тогда последовательность

$$\mathrm{R_{Zar}\,Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{F} \to \mathrm{R_{Zar}\,Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{G} \to \mathrm{R_{Zar}\,Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{H}$$

является гомотопической последовательностью расслоения, и входящие в нее симплициальные предпучки Нисневич-локальны и $\mathbb{A}^1$-инвариантны. Более того, для каждой гладкой схемы U над S каноническое отображение

$$\pi_0(\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{F})(U) \to [U, \mathcal{F}]_{\mathbb{A}^1}$$

является биекцией.

Доказательство. 1. Для каждой гладкой схемы U над S последовательность

$$\mathrm{R_{Zar}\,Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{F} \to \mathrm{R_{Zar}\,Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{G} \to \mathrm{R_{Zar}\,Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{H}$$

является гомотопической последовательностью расслоения по лемме lemma:2.1.1 2.

2. Симплициальные предпучки $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{G}$ и $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{H}$ удовлетворяют аффинному вырезанию по Нисневичу по лемме Lemma:I-4.2.4 3. Поэтому и $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{F}$ удовлетворяет аффинному вырезанию по Нисневичу (это формальное рассуждение, см. Лемма 2.1.3)

3. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{H} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{R_{Zar}\,Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathrm{R_{Zar}\,Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathrm{R_{Zar}\,Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{H}.
\end{array}$$

Вертикальные стрелки являются слабыми эквивалентностями на аффинных схемах (было в прошлый раз, Теорема I-3.3.5(i)). Поэтому и нижний ряд является гомотопической последовательностью расслоения. Объекты нижнего ряда Нисневич-локальны (тоже было в прошлый раз, Теорема I-3.3.5(ii)), и потому $\mathbb{A}^1$-инвариантны (по лемме I-5.1.2).

4. Осталось применить π_0 к левой вертикальной стрелке.

□

lemma:2.1.1 **Лемма 2.** *Если $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ — гомотопическая последовательность расслоения отмеченных симплициальных предпучков, и предпучок $\pi_0(\mathcal{H})$ $\mathbb{A}^1$-инвариантен, то*

$$\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{F} \to \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{G} \to \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{H}$$

также является гомотопической последовательностью расслоения.

Доказательство. Рассмотрим квадрат бисимплициальных множеств

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^{1^\bullet}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(X \times \mathbb{A}^{1^\bullet}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
* & \longrightarrow & \mathcal{H}(X \times \mathbb{A}^{1^\bullet})
\end{array}$$

Мы знаем, что он гомотопически декартов в каждой степени. Предпучок $\pi_0(\mathcal{H})$ $\mathbb{A}^1$-инвариантен, поэтому симплициальное множество $\pi_0\mathcal{H}(X \times \mathbb{A}^{1^\bullet})$ постоянно. Из этого следует (см. Лемма I-4.2.1), что диагональ этого квадрата гомотопически декартова, что и требовалось. □

mma:I-4.2.4 **Лемма 3.** *Пусть $\mathcal{F}$ — симплициальный предпучок на $\mathrm{Sm}_S^{\mathrm{aff}}$. Предположим, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет аффинному вырезанию по Зариски (Нисневичу), и что $\pi_0\mathcal{F}$ $\mathbb{A}^1$-инвариантен. Тогда и $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathcal{F}$ удовлетворяет аффинному вырезанию по Зариски (Нисневичу).*

Мы будем писать rX для предпучка на категории S-схем, представленного S-схемой X, и $r'X$ для ограничения этого предпучка на Sm_S. Наконец, из теоремы thm:2.1.5 2 можно извлечь полезное следствие.

cor:2.3.2 **Следствие 2.** *Пусть G — конечно представимая гладкая групповая схема над S, и $H \subseteq G$ — конечно представимая гладкая замкнутая групповая подсхема над S такая, что фактор G/H существует как схема над S. Предположим, что*

1. *морфизм $G \to G/H$ расщепляется локально по Нисневичу;*

2. *предпучки $H^1_{\mathrm{Nis}}(-, G)$ и $H^1_{\mathrm{Nis}}(-, H)$ $\mathbb{A}^1$-инвариантны на аффинных схемах.*

Тогда симплициальный предпучок $R_{\mathrm{Zar}}\,\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(G/H)$ Нисневич-локален и $\mathbb{A}^1$-инвариантен. Более того, для любой аффинной схемы U над S каноническое отображение

$$\pi_0(\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(G/H))(U) \to [U, G/H]_{\mathbb{A}^1}$$

является биекцией, функториальной по U.

Доказательство. 1. В статье Anantharaman показано, что $r(G/H) \cong a_{\mathrm{fppf}}(rG/rH)$. Поэтому $G \to G/H$ является H-торсором. По теореме из EGA IV из гладкости G следует гладкость G/H. Из локального расщепления следует, что $rG \to r(G/H)$ является эпиморфизмом пучков Нисневича. По теореме из SGA теперь из этого следует, что следующая диаграмма является коуравнителем в категории пучков Нисневича:

$$rG \times_{r(G/H)} rG \xrightarrow{\cong} rG \times rH \rightrightarrows rG \longrightarrow r(G/H)$$

Но это означает, что $r(G/H) \cong a_{\mathrm{Nis}}(rG/rH)$.

2. Рассмотрим гомотопическую последовательность расслоения симплициальных предпучков $rG/rH \to BH \to BG$. Применив функтор локализации R_{Nis}, получаем гомотопическую последовательность расслоения Нисневич-локальных симплициальных предпучков
$$r'(G/H) \cong a_{\mathrm{Nis}}(rG/rH) \to B_{\mathrm{Nis}}H \to B_{\mathrm{Nis}}G.$$

3. Симплициальные предпучки $B_{\mathrm{Nis}}G$ и $B_{\mathrm{Nis}}H$ Нисневич-локальны, и потому удовлетворяют условию вырезания по Нисневичу (теорема Воеводского, см. I-3.2.5).

4. Применяя теорему thm:2.1.5 2, получаем, что хотели; осталось учесть, что $\pi_0(B_{\mathrm{Nis}}G)(-)$ естественно изоморфно $H^1_{\mathrm{Nis}}(-, G)$ по Лемме lemma:2.2.2 1.

□