О нулевой стабильной мотивной гомотопической группе аффинной кривой (продолжение)

Алексей Ананьевский

14.04.2016

1 Предварительные леммы

Мы остановились вот на чем: пусть $M \in \mathrm{SH}_{t=0}(k)$ (это означает, что $\underline{\pi_i}(M)_n = 0$ для всех $i \neq 0$). Возьмем $X \in \mathrm{Sm}_k$, $Z \hookrightarrow X$ — замкнутое. Мы написали комплекс Роста–Шмида $C^*_{RS}(X, U; M)$ (здесь $U = X - Z$):

$$\bigoplus_{\substack{x \in X^{(0)} \\ x \in Z}} M_0(\operatorname{Spec} k(x)) \to \bigoplus_{\substack{x \in X^{(1)} \\ x \in Z}} M_{-1}(\operatorname{Spec} k(x); \Lambda^X_x) \to \dots \to \bigoplus_{\substack{x \in X^{(n)} \\ x \in Z}} M_{-1}(\operatorname{Spec} k(x); \Lambda^X_x).$$

Здесь $M_m(\operatorname{Spec} k(x); L)$ по определению равно $\pi_0(M)_m(\operatorname{Spec} k(x); L)$, а $\Lambda^X_x = \det N^X_x$.

Лемма 1.1. $[X/U, M[m]] \cong H^m(C^*_{RS}(X, U; M))$.

Доказательство. Очевидно из построения комплекса Роста–Шмида. □

Пусть теперь E — векторное расслоение ранга r на X. Рассмотрим комплекс $C^*_{RS}(E, E - X; M[r])[r]$ и воспользуемся тем, что $N_{x/E} = N_{x/X} \oplus E_x$:

$$\bigoplus_{x \in X^{(0)}} M_0(\operatorname{Spec} k(x); \det E_x) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} M_{-1}(\operatorname{Spec} k(x); \lambda^X_x \otimes \det E_x) \to \dots$$
$$\dots \to \bigoplus_{x \in X^{(n)}} M_{-n}(\operatorname{Spec} k(x); \Lambda^X_x \otimes \det E_x).$$

Обозначим его $C^*_{RS}(X; E; M)$.

Получаем комплекс пучков $C^*_{RS}(-; E; M)$:

$$\bigoplus_{x \in X^{(0)}} (i_x)_* M_0(-; \det E_x) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} (i_x)_* M_{-1}(-; \Lambda^X_x \otimes \det E_x) \to \dots$$
$$\dots \to \bigoplus_{x \in X^{(n)}} (i_x)_* M_{-n}(-; \Lambda^X_x \otimes \det E_x),$$

где $(i_x)_* M_{-m}(-; \Lambda^X_x \otimes \det E_x)$ обозначает прямой образ в топологии Нисневича: заметим, что $M_{-m}(-; \Lambda^X_x \otimes \det E_x)$ — пучок на $(\operatorname{Spec} k(x))|_{\mathrm{Nis}}$, а прямой образ оказывается пучком на X_{Nis}.

Замечание 1.2. $C^*_{RS}(-; E; M) = C^*_{RS}(-; \det E; M)$.

В этих обозначениях лемму 1.1 можно сформулировать так:

Лемма 1.3. $[\mathrm{Th}(E), M(r)[r + m]] \cong H^m(C^*_{RS}(X; E; M))$.

Лемма 1.4. Пусть X — гладкое, $i\colon x \hookrightarrow X$ — точка, $\mathcal{F}$ — пучок на $(\operatorname{Spec} k(x))_{\mathrm{Nis}}$, $Z \hookrightarrow X$ — замкнутое. Тогда $N^m_{\mathrm{Zar}, Z}(X; i_* \mathcal{F}) = H^m_{\mathrm{Nis}, Z}(X; i_* \mathcal{F}) = 0$.

Доказательство. Указанные когомологии — это высшие прямые образы $R^m(\Gamma_Z(-)\circ i^*)$. Есть спектральная последовательность $H^p_{*,Z}(X, R^q i_*\mathcal{F}) \Rightarrow R^m(\Gamma_Z(-\circ i^*)$; при этом $R^q i_*\mathcal{F} = 0$ при $q \neq 0$. Композиция $\Gamma_Z(-)\circ i_*$ — тоже точный функтор, поэтому все оно равно нулю при $p+q \neq 0$. □

Значит, при помощи этих пучков можно считать гомологии, если мы получили резольвенту, то есть, если комплекс точен.

Лемма 1.5. Рассмотрим естественное отображение

$$M_0 \otimes \det E \to C^*_{RS}(X; E; M),$$
$$(M_0 \times \det E)(U) \to \bigoplus_{x \in U^{(0)}} M_0(\operatorname{Spec} k(x); \det E_x),$$

индуцированное стрелкой $M_0(U; \det E) \to bigoplus_{x\in U^{(0)}} M_0(\operatorname{Spec} k(x); \det E_x)$ (вложением в общую точку). Это отображение является резольвентой в топологих Zar и Nis.

Доказательство. Подставим какой-нибудь локальное кольцо (либо локализацию, либо гензелизацию в какой-нибудь точке). По лемме 1.3 получаем $H^m(C^*_{RS}(W; E; M) = [\mathrm{Th}(E|_W), M(r)[r+m]]$. Тривиализуем наше расслоение: $E|_W \cong \mathbf{1}^r_W$. Значит, получится

$$[W(r)[r], M(r)[r+m]] = [W, M[m]] = \pi_{-m}(M)_0(W) = \begin{cases} 0, & m \neq 0; \\ M_0(W), & m = 0. \end{cases}$$

Разумеется, $M_0(W) = M_0(W; \det E_W)$. □

Теорема 1.6. 1. $[X/U, M[m]] \cong H^m(C^*_{RS}(X, U; M)) \cong H^m_{\mathrm{Nis},Z}(X; M_0) \cong H^m_{\mathrm{Zar},Z}(X; M_0)$.

2. $[\mathrm{Th}(E), M(r)[r+m]] H^m(C^*_{RS}(X; E; M)) \cong H^m_{\mathrm{Nis}}(X; M_0 \otimes \det E) \cong H^m_{\mathrm{Zar}}(X; M_0 \otimes \det E)$.

Из этого следует, что $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(M)_0(-)$ — пучок, $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(M)_0(-; E)$ — пучок. Кроме того, M представляет SL^c-ориентированную теорию когомологий. Буква c здесь означает, что $[\mathrm{Th}(L_1 \otimes L_2^{\otimes 2}), M] = [\mathrm{Th}(L_1), M]$: это свойство выполнено, поскольку $\pi_i(M)_m(X; L_1 \otimes L_2^{\otimes 2}) \cong \pi_i(M)_m(X; L_1)$.

2 Когомологическая размерность

Определение 2.1. Говорят, что спектр $A \in \mathrm{SH}(k)$ имеет **когомологическую размерность** $\leq n$, если $[A, M[m]] = 0$ для всех $m > n$ и $M \in \mathrm{SH}_{t=0}(k)$. Спектр $A \in \mathrm{SH}(k)$ называется **когомологически n-связным**, если $[A, M[m]] = 0$ для всех $m \leq n$ и $M \in \mathrm{SH}_{t=0}(k)$. Соответствующие категории обозначаются через $\mathrm{SH}_{h\leq n}(k)$ и $\mathrm{SH}_{h\geq n+1}(k)$.

Лемма 2.2. $\mathrm{SH}_{h\leq n}(k) = {}^{\perp}(\mathrm{SH}_{t\geq n+1}(k))$.

Доказательство. Включение $\mathrm{SH}_{h\leq n}(k) \supseteq {}^{\perp}(\mathrm{SH}_{t\geq n+1}(k))$ очевидно по определению. Пусть $A \in \mathrm{SH}_{t\geq n+1}(k)$, $X \in \mathrm{SH}_{h\leq n}(k)$. Рассмотрим башню Постникова

$$\cdots \to A_{t\geq n+3} \to A_{t\geq n+2} \to A_{t\geq n+1} = A.$$

Конус правой стрелки лежит в $\mathrm{SH}_{t=0}(k)[n+1]$, следующей — в $\mathrm{SH}_{t=0}(k)[n+2]$. Все конусы ортогональны X, поэтому все получается. □

Следствие 2.3. Если $\mathcal{X} \in \mathrm{SH}_{h\leq 0}(k)$, $A \in \mathrm{SH}(k)_{t\geq 0}$, то морфизм $A \to H_0^t(A)$ индуцирует изоморфизм $[\mathcal{X}, A] \cong [\mathcal{X}, H_0^t(A)]$. (напомним, что $A_{t\geq 0} \to A \to H_0^t(A)$ — треугольник).

Теорема 2.4 (Hu, Kriz)**.** Пусть X — гладкое проективное. Тогда $(\Sigma^\infty_T X_+)^\vee \cong \mathrm{Th}(-T_X)$ (напомним, что $(-)^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}(-, \mathbb{S})$). Как следствие, $[\mathbb{S}, \Sigma^\infty_T X_+] \cong [\mathrm{Th}(-T_X), \mathbb{S}]$.

Доказательство. Трюк Jouanolou: рассмотрим $\mathbb{A}^s$-расслоение $\rho\colon \widetilde{X} \to X$, локально тривиальное в Zar. Тогда $\rho^* T_X \oplus E \cong \mathbf{1}^N$, и поэтому $\mathrm{Th}(-T_X) = \Sigma_T^{-N} \mathrm{Th}(E)$. $\square$

Лемма 2.5. $\mathrm{Th}(-T_X) \in \mathrm{SH}_{h\le 0}(k)$.

Доказательство. Пусть $m > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Th}(-T_X), M[m]] &= [\mathrm{Th}(E), M(N)[m+N]] \\
&= H^{m+n}(\widetilde{X}, M_n \otimes \det E) \\
&= H^{m+n}_{\mathrm{Nis}}(\widetilde{X}; M_n \otimes \rho^*\omega_X) \\
&= [\mathrm{Th}(\rho^*\omega_X), M(n+1)[n+1+m]] \\
&= [\mathrm{Th}(\omega_X), M(n+1)[n+1+m]] \\
&= H^{m+n}(C^*_{RS}(X; \omega_X; M(n))) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Здесь $\mathrm{rk}\, E = N - n = N - \dim X$. $\square$

Вопрос 2.6. Пусть $A \in \mathrm{SH}_{t\ge 0}(k)$. Правда ли, что $A^\vee \in {}^\perp(\mathrm{SH}_{t\ge 1})$?

Теорема 2.7 (Asok, Haesemayer)**.** Пусть X — гладкое проективное размерности n. Тогда

$$[\mathbb{S}, X] = H^n_{\mathrm{Nis}}(X; K_n^{MW} \otimes \omega_X) = H^n(C^*_{RS}(X; \omega_X; H_0^t(\mathbb{S})(n))).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
[\mathbb{S}, X] &= [\mathrm{Th}(-T_X), \mathbb{S}] \\
&= [\mathrm{Th}(-T_X), H_0^t(\mathbb{S})] \\
&= [\mathrm{Th}(E), H_0^t(\mathbb{S})(N)[N]] \\
&= H^n(C^*_{RS}(X; \omega_X; H_0^t(\mathbb{S})(n))) \\
&= H^n_{\mathrm{Nis}}(X; K_n^{MW} \otimes \omega_X),
\end{aligned}$$

поскольку $\pi_0(H_0^t(\mathbb{S})(n))_0 = \pi_0(H_0^t(\mathbb{S}))_n = K_n^{MW}$. $\square$

Замечание 2.8. Каждая точка $x \in X(k)$ задает морфизм $\Sigma_T^\infty(i_x)_+ \in [\mathbb{S}, X]$. Этому морфизму соответствует $\langle 1 \rangle$ в компоненте, соответствующей точке x в прямой сумме $\bigoplus_{x \in X^{(n)}} GW(k(x))$.

В следующий раз мы вернемся к кривой C, в которой есть $C_0 \subseteq C$ с дополнением D; нужно узнать, что такое $C_0^\vee$.