17.02.2014

А. Ананьевский

M — комплексное многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$,

$p \in M \rightsquigarrow T_{\mathbb{R},p}(M)$ — $2n$-мерное вещ. касательное пр-во

$$\| \ \mathbb{R}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}$$

$z_i = x_i + i y_i$ — локально голоморфные коорд.

(2) $T_{\mathbb{C},p}(M) = T_{\mathbb{R},p}(M) \otimes \mathbb{C}$

$$\mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\} = \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar z_i}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

(3) $T_p'(M) = \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial z_i}\right\}$ - голоморфное кас. пр-во

дифференцирования, $=0$ на антиголоморфных

$$T_p''(M) = \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar z_i}\right\}$$

$$T_{\mathbb{R},p}(M) \hookrightarrow T_{\mathbb{C},p}(M) \longrightarrow T_p'(M), \qquad T_{\mathbb{R},p}(M) \xrightarrow{\sim} T_p'(M)$$

На $T_{\mathbb{C},p}(M)$ есть сопряжение, $T_p'(M) = \overline{T_p''(M)}$

$$\downarrow$$

$$\Lambda^k T^*_{\mathbb{C},z}(M) = \bigoplus_{p+q} \underbrace{\Lambda^p T_z'^*(M) \otimes \Lambda^q T_z''^*(M)}_{A_z^{p,q}(M)}$$

Опр. Эрмитова метрика:

$$(\ ,\ )_z : T_z'(M) \otimes \overline{T_z'(M)} \longrightarrow \mathbb{C}$$

— непр., билин., полож. опр.

$$ds^2 = \sum h_{ij}\, dz_i \wedge d\bar z_j = \sum \varphi_i \otimes \overline{\varphi_j}$$

локально можно ортогонализовать

$\mathrm{Re}(ds^2):\quad T_{\mathbb{R},z}(M)\otimes T_{\mathbb{R},z}(M)\longrightarrow \mathbb{R}$ — риманова метрика

$\omega = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(ds^2):\ T'_z(M)\otimes T''_z(M)\longrightarrow \mathbb{R}$

(1,1)-форма

$\varphi_i = \alpha_i + i\beta_i \rightsquigarrow ds^2 = \sum(\alpha_i\otimes\alpha_i + \beta_i\otimes\beta_i) + i(-\alpha_i\otimes\beta_i + \beta_i\otimes\alpha_i)$

$\rightsquigarrow \omega = \frac{i}{2}\sum \varphi_i\wedge\overline{\varphi_i}$

$d\mu = \alpha_1\wedge\beta_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n\wedge\beta_n$ — элемент объема

$\quad \| \ \frac{\omega^n}{n!}$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $S\subset M$ — комплексное подмногообразие, $\dim S = d$

$$\to \mathrm{vol}(S) = \frac{1}{d!}\int_S \omega^d$$

$\boxed{\text{Примеры}}$ ① $\mathbb{C}^n$, метрика $ds^2 = \sum dz_i\wedge d\bar{z}_i$

② $\mathbb{C}^n/\Lambda \quad ds^2 = \sum dz_i\wedge d\bar{z}_i$

③ $M = \mathbb{P}^n \quad \omega = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|z\|^2$, где z — лок. сечение

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \arrow[r, bend right, "z"'] & \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$d: A^n(M)\longrightarrow A^{n+1}(M)$

$\| \ \partial + \bar{\partial} \qquad \partial: A^{p,q}(M)\longrightarrow A^{p+1,q}(M)$

$\qquad\qquad \bar{\partial}: A^{p,q}(M)\longrightarrow A^{p,q+1}(M)$

ассоц. метрика Фубини–Штуди

$\boxed{\text{Лемма}}$ $ds^2 = \sum \varphi_i \otimes \overline{\varphi_i} \rightsquigarrow \exists !\ \psi_{ij} \in A^1(M)$ т.ч.

① $\psi + \overline{\psi}^t = 0$

② $d\varphi_i = \sum\limits_j \psi_{ij} \wedge \varphi_j + \tau_i, \quad \tau_i \in A^{2,0}(M)$

Док-во: $\psi = \psi' + \psi'' \rightsquigarrow d\varphi_i = \underset{A^{2,0}}{\underset{\cap}{\partial\varphi_i}} + \underset{A^{1,1}}{\underset{\cap}{\bar\partial\varphi_i}}$

$\rightsquigarrow \bar\partial\varphi_i = \sum\limits_j \psi''_{ij} \wedge \varphi_j \longrightarrow$ знаем ψ''_{ij}

$\psi + \overline{\psi}^t \Rightarrow \psi' = -\overline{\psi''}^t$

$\boxed{\text{Опр.}}$ τ – кручение метрики

$\boxed{\text{Опр.}}$ M – комплексное многообразие с эрмитовой формой $ds^2 = \sum \varphi_i \otimes \overline{\varphi_i}$ – эрмитова, $\omega = \sum \varphi_i \wedge \overline{\varphi_i}$

M – кэлерово, если выполняется одно из:

① $d\omega = 0$

② $\tau = 0$

③ в окр-сти любой точки z_0 $\exists$ голоморфные коорд. z_i:

$$ds^2 = \sum (\delta_{ij} + g_{ij})\, dz_i \wedge d\bar z_j, \quad \text{где } g_{ij}(z_0) = 0, \ dg_{ij} = 0$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2): легко

(3) $\Rightarrow$ (1): очевидно

(1) $\Rightarrow$ (3): сначала $ds^2 = \sum(\delta_{ij} + a_{ijk} z_k + a_{ij\bar k} \bar z_k + O(2))\, dz_i \wedge d\bar z_j$

$z_k = w_k + \sum b_{klm} w_l w_m$ – замена

$\boxed{\text{Примеры}}$ ① $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n/\Lambda$ – эвкл. метрики

② Римановы поверхности: $d\omega \in A^3(M) = 0$

③ M, N – кэлеровы $\Rightarrow M\times N$ кэлерово

$S\subset M$ – подмногообразие, M кэлерово $\Rightarrow S$ кэлерово

④ $\mathbb{P}^n$ с метрикой Фубини-Штуди

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial \log\|z\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \partial\bar\partial = -\bar\partial\partial}}{=} \frac{i}{4\pi}(\partial+\bar\partial)(\partial-\bar\partial)\log\|z\|^2$$

$\rightsquigarrow$ комплексные проективные многообразия кэлеровы

$\boxed{\text{Предл.}}$ M – компактное кэлерово | Ω^q – пучок голоморфных q-форм

① $b_{2q}(M)>0$

② $\underset{\substack{\| \\ A^{q,0}(M)}}{H^0(M,\Omega^q)} \hookrightarrow H^q_{DR}(M)$

③ $V\subset M$ – аналитическое подмногообразие

$\rightsquigarrow [V]\neq 0$ в $H_*(M)$

<u>Док-во</u> (1) $\omega^q\in A^{2q}(M)$. Если $\omega^q = d\varphi$, то

$$\underset{\substack{\| \\ \mathrm{vol}\,M}}{\int_M \omega^n} = \int_M d(\varphi\wedge\omega^{n-q}) = 0 \quad (?!)$$

(2) $\eta = \sum_I \eta_I\varphi_I \in A^{q,0}(M)$, φ_I – лок. унит. базис

$$\eta\wedge\bar\eta\wedge\omega^{n-q} = \underset{\substack{\# \\ 0}}{c}\cdot\sum_I|\eta_I|^2\omega^n$$

Пусть $\eta = d\varphi \rightsquigarrow d\eta=0,\ d\bar\eta=0$

$$c\cdot\sum|\eta_I|^2\cdot\mathrm{vol}\,M = \int_M \eta\wedge\bar\eta\wedge\omega^{n-q} = \int_M d(\varphi\wedge\bar\eta\wedge\omega^{n-q}) = 0 \quad \rightsquigarrow \eta_I = 0 \rightsquigarrow \eta = 0$$

$d\eta \in A^{q+1,0}(M)$ — точная голоморфная $\Rightarrow d\eta = 0$ (выше)

(3) $\frac{vol(V)}{d!} = \int_V \omega^d \neq 0 \Rightarrow [V] \neq 0$

$\square$

M — связное компактное комплексное, $\dim M = n$

$ds^2, \omega \rightsquigarrow$ есть метрика на $T^{*(p,q)}(M)$

$A^{p,q}(M)$ можно снабдить скалярным произведением:

$$(\psi, \eta) \longmapsto \int_M (\psi(z), \eta(z)) \frac{\omega^n}{n!}$$

Вопрос: $\psi \in Z^{p,q}_{\bar\partial}(M)$, $\varphi = \psi + \bar\partial \eta$, $\eta \in A^{p,q-1}(M)$

(т.е. $\bar\partial \psi = 0$)

Какая форма из этих имеют наим. норму?

Сделаем вид, что это ограниченный оператор, а пространство гильбертово

$\rightsquigarrow$ есть $\bar\partial^*$

$\boxed{\text{Лемма}}$ φ мин. нормы $\Longleftrightarrow \bar\partial^* \varphi = 0$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $H^{p,q}_{\bar\partial}(M) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(M) = \{\varphi \in A^{p,q}(M) \mid \overbrace{(\bar\partial \bar\partial^* + \bar\partial^* \bar\partial)}^{\Delta_{\bar\partial}} \varphi = 0\}$

$= \{\varphi \mid \bar\partial \varphi = 0, \bar\partial^* \varphi = 0\}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $*: A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{n-p,n-q}(M)$

т.ч. $(\psi(z), \eta(z)) \frac{\omega^n}{n!} = \psi(z) \wedge *\eta(z)$

локально: $\eta = \sum_{I,J} \eta_{IJ} \varphi_I \wedge \bar\varphi_J$ $\quad I^0 = \{1, \dots, n\} \setminus I$

$\rightsquigarrow * \eta = 2^{p+q-n} \sum_{I,J} (\pm \bar\eta_{IJ} \varphi_{I^0} \wedge \bar\varphi_{J^0})$ $\quad J^0 = \{1, \dots, n\} \setminus J$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\bar\partial^* = - * \bar\partial *$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Ходжа)

① $\dim \mathcal{H}^{p,q}(M) < \infty$

② Пусть $\mathcal{H}: A^{p,q}(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{p,q}(M)$ — ортогональная проекция

$\rightarrow \exists!\ G: A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p,q}(M)$ т.ч.

a) $G(\mathcal{H}^{p,q}(M)) = 0$ — G — функция Грина

b) $\bar\partial G = G\bar\partial$, $\bar\partial^* G = G\bar\partial^*$

c) $\mathrm{Id} = \mathcal{H} + \Delta G$ на $A^{p,q}(M)$

$\boxed{\text{Следствие:}}$

$$\psi = \mathcal{H}(\psi) + \bar\partial\bar\partial^* G\psi + \bar\partial^*\bar\partial G\psi$$

$$\rightsquigarrow A^{p,q}(M) = \mathcal{H}^{p,q}(M) \perp \bar\partial A^{p,q-1}(M) \perp \bar\partial^* A^{p,q+1}(M)$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Дольбо)

$$H^p(M, \Omega^q) \simeq H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$$

пучковые

$$A^{p,q-1}(M) \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,q}(M) \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,q+1}(M)$$

Док-во: $0 \longrightarrow Z^{p,q}_{\bar\partial} \longrightarrow A^{p,q} \longrightarrow Z^{p,q+1}_{\bar\partial} \longrightarrow 0$ точна (аналог Леммы Пуанкаре) $\longrightarrow$ длинная точная посл-сть

$$H^n_{\bar\partial}(M, Z^{p,q}_{\bar\partial}) \simeq H^{n-1}_{\bar\partial}(M, Z^{p,q+1}_{\bar\partial})$$

$\square$

M — компактное кэлерово

$d, \partial, \bar\partial, d^*, \partial^*, \bar\partial^*$

$d^c = \frac{i}{4\pi}(\bar\partial - \partial)$, $\quad L: A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p+1,q+1}(M)$

$\eta \longmapsto \eta \wedge \omega$

$\boxed{\text{Предл.}}$ ① $[L^*, d] = -4\pi d^{c*}$ ② $[L, d^*] = 4\pi d^c$

Д-во: раскладывая по типу, достаточно проверить $[L^*, \partial] = i\bar{\partial}^*$ a) считаем на $\mathbb{C}^n$; b) метрика близка к эвклидовой $\rightsquigarrow$ Ok □

$\boxed{\text{Следствия}}$ ① $[L, \Delta_d] = 0$, $[L^*, \Delta_d] = 0$

② $\Delta_d = 2\Delta_{\bar\partial} = 2\Delta_\partial$

③ $\Delta_d : A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p,q}(M)$

Разложение Ходжа

$$\mathcal{H}^n(M) = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}^{p,q}(M), \quad \mathcal{H}^{p,q}(M) = \overline{\mathcal{H}^{q,p}(M)}$$

$\mathcal{H}^n(M) = H^n_{dR}(M)$, $\mathcal{H}^{p,q}(M) = H^{p,q}(M)$

$$\rightsquigarrow H^n(M, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(M)$$

$$H^{p,q}(M) = \overline{H^{q,p}(M)}$$

$$H^{p,q}(M) \cong \mathcal{H}^{p,q}_d(M) = \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial(M)} \simeq H^{p,q}_{\bar\partial}(M) \simeq H^q(M, \Omega^p)$$

Замечание: $\mathcal{H}^{p,0}(M) = H^0(M, \Omega^p)$,

т.е. голоморфные формы на M гармонические

Ромбик Ходжа:

центр. симметрия: $*$

$\leftrightarrow$: сопряжение

$$H^{n,n}(M)$$

$$H^{n,0}(M) \qquad H^{n/2, n/2}(M) \qquad H^{0,n}(M)$$

$$H^{0,0}(M)$$

$\boxed{\text{Следствия}}$ ① b_{2q+1} четно

② $H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^p) = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ \mathbb{C}, & p = q \end{cases}$

L, L^*, $h = \sum_{k=0}^{2n} (n-k)\Pi^k$, $\Pi^k : A^*(M) \to A^k$

$[L, L^*] = h$, $[h, L] = -2L$, $[h, L^*] = 2L^*$