$\boxed{24.02.2014}$

А. Ананьевский

$\boxed{\text{Утв}}$ M — кэлерово, компактное (?)

$$L: A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p+1,q+1}(M)$$
$$\eta \longmapsto \omega \wedge \eta$$

$$\rightsquigarrow [L, L^*]\Big|_{A^{p,q}(M)} = p+q-n$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $\Pi^k: A^*(M) \longrightarrow A^k(M)$, $h = \sum_{k=0}^{2n} (n-k) \cdot \Pi^k$

$$\rightsquigarrow [L, L^*] = h, \ [h, L] = -2L, \ [h, L^*] = 2L^*$$

Получили представление sl_2 на дифф. формах

L, L^* коммутируют с лапласианом

$\rightsquigarrow$ есть представление sl_2 на $\mathcal{H}^*(M)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $L^k: H^{n-k}(M) \longrightarrow H^{n+k}(M)$ — изоморфизм

$\boxed{\text{Опр.}}$ $E \longrightarrow M$ — векторное расслоение

$D: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{E}$: $D(f\xi) = df \otimes \xi + f D\xi$

$\forall f \in \mathcal{A}^0(\mathcal{U}), \xi \in \mathcal{E}(U), U \subseteq M$

связность

$$X, Y \in TM \rightsquigarrow \nabla_X Y = (DX, Y)$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ E – эрмитово, D — метрическая связность, если

1. $D = D' + D''$ $\quad D'' = \bar\partial : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}^{0,1} \otimes \mathcal{E}$

(если e_i – голоморфный фрейм, то $D''(\sum f_i e_i) = \sum \bar\partial f_i \otimes e_i$)

2. $d(\xi, \eta) = (D\xi, \eta) + (\xi, D\eta)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\exists!$ метрическая связность

<u>Д-во</u> e_i — голоморфный унитарный фрейм,

$h_{ij} = (e_i, e_j)$ $\quad De_i = \sum \theta_{ij} \otimes e_j$, где $\theta_{ij} \in \mathcal{A}^{1,0}$

$$dh_{ij} = d(e_i, e_j) = \sum_k \underset{\mathcal{A}^{1,0}}{\underset{\cap}{\theta_{ik}}} h_{kj} + \sum_k \underset{\mathcal{A}^{0,1}}{\underset{\cap}{\bar\theta_{jk}}} h_{ik}$$

$\rightsquigarrow \partial h_{ij} = \sum \theta_{ik} h_{kj}$, $\quad \bar\partial h_{ij} = \sum \bar\theta_{jk} h_{ik}$

т.е. $\partial h = \theta h$, $\bar\partial h = h^t \bar\theta$

$\rightsquigarrow \theta = \partial h \cdot h^{-1}$ $\square$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $e = \{e_i\}$, $e' = \{e_i'\}$, $\theta_e = \theta_{ij}$

$e_i' = \sum g_{ij} e_j \quad \rightsquigarrow \theta_{e'} = dg \cdot g^{-1} + g\theta_e g^{-1}$

$\rightsquigarrow$ локально $\exists$ фрейм такой, что $\theta_e = 0$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $D: \mathcal{A}^p \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}^{p+1} \otimes \mathcal{E}$

$D(\psi \otimes \xi) = d\psi \otimes \xi + (-1)^p \psi \wedge D\xi$

При этом $D^2: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}^2 \otimes \mathcal{E}$ линейно над $\mathcal{A}^0$.

$\rightsquigarrow \Theta \in A^2(E^* \otimes E)$ — <u>кривизна</u>

$\boxed{\text{Замечание}}$ $\Theta_e = d\theta_e - \theta_e \wedge \theta_e$

$\Theta_e \in A^2(M)$ — матрица Θ в базисе e

(это почти класс Черна)

$$\left(\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 \\ \rightsquigarrow H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z}) \end{array}\right)$$

если связность метрическая, то

$D'' = \bar\partial \rightsquigarrow (D'')^2 = 0 \rightsquigarrow \Theta^{0,2} = 0$

если фрейм унитарный, то $\Theta_{ij} = -\overline{\Theta_{ji}}$

$\rightsquigarrow \Theta_e$ косоэрмитова $\rightsquigarrow \Theta^{2,0} = -\overline{\Theta^{0,2}} = 0$

т.е. $\Theta_e \in A^{1,1}(M)$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $L \longrightarrow M$ – линейное расслоение

L – <u>положительное</u> лин. расслоение, если $\exists$ метрика на L т.ч. $\frac{i}{2\pi}\Theta$ – положительная $(1,1)$-форма

(ω – положительная, если $i\langle \omega(z), v \wedge \overline{v} \rangle > 0$ $\forall v \in T_z(M)$)

L – <u>отрицательное</u>, если $L^\vee$ положительное

$\boxed{\text{Лемма}}$ D – метрич. связность на лин. рассл. L

$\rightsquigarrow [L^*, \overline{\partial}] = -\frac{i}{2} D'^*$

<u>Док-во:</u> следует из $[L^*, \overline{\partial}] = -\frac{i}{2}\partial^*$ на $A^{p,q}(M)$ $\square$

Теория Ходжа

$E \longrightarrow M$ – вект. рассл., M кэлерово, компактно

$\overline{\partial}: A^{p,q}(E) \longrightarrow A^{p,q+1}(M) \rightsquigarrow H^{p,q}_{\overline{\partial}}(E)$

аналог когомологий Дольбо

$\rightsquigarrow H^q(M, \Omega^p(M)) \simeq H^{p,q}_{\overline{\partial}}(E)$

есть эрмитова метрика на $E \rightsquigarrow$ есть скал. произв.

$(\eta, \psi) = \int_M (\eta(z), \psi(z)) \frac{\omega^n}{n!} \rightsquigarrow$ есть внешнее произв.

$\wedge: A^{p,q}(E) \otimes A^{p',q'}(E^\vee) \longrightarrow A^{p+p',q+q'}(M)$

$(\eta \otimes s) \wedge (\eta' \otimes s') = \langle s, s' \rangle \cdot \eta \wedge \eta'$

$\rightsquigarrow$ есть звездочка Ходжа

$$*_E : A^{p,q}(E) \longrightarrow A^{n-p,n-q}(E^\vee) \quad \text{т.ч. } (\eta,\psi) = \int_M \eta \wedge *_E \psi$$

$$\bar\partial^* = -*_E \bar\partial *_E, \quad \Delta = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial : A^{p,q}(E) \longrightarrow A^{p,q}(E)$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Ходжа)

$\mathcal{H}^{p,q}(E) \cong H^{p,q}_{\bar\partial}(E)$ — конечномерное

$$*_E : H^q(M,\Omega^p(E)) \cong H^{n-q}(M,\Omega^{n-p}(E^\vee))^\vee$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ При $p=0$ получаем двойств-сть Кодаиры–Серра:

$$H^q(M,E) \cong H^{n-q}(M, K_M \otimes E^\vee)^\vee$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Kodaira — Nakano)

M — компактное комплексное, $\mathcal{L} \longrightarrow M$ — полож. лин. рассл

$\Rightarrow \quad H^q(M,\Omega^p(\mathcal{L})) = 0$ при $p+q>n$

Д-во Рассмотрим метрику на $\mathcal{L}$ т.ч. $\Theta = \frac{2\pi}{i}\omega$, где ω — полож. (1,1)-форма. Рассмотрим метрику на M, ассоц. с $\omega \rightsquigarrow M$ — кэлерово

$H^q(M,\Omega^p(\mathcal{L})) \cong \mathcal{H}^{p,q}(\mathcal{L})$

Пусть $\eta \in \mathcal{H}^{p,q}(\mathcal{L})$. $\Theta = D^2 = \bar\partial D' + D'\bar\partial$

$$\Theta\eta = \bar\partial D'\eta \rightsquigarrow 2i(L^*\Theta\eta,\eta) = 2i(L^*\bar\partial D'\eta,\eta) =$$
$$= 2i\left(\left(\bar\partial L^* - \tfrac{i}{2}D'^*\right)D'\eta,\eta\right)$$
$$= 2i(\underbrace{\bar\partial L^* D'\eta,\eta}_{\shortparallel}) + (D'^*D'\eta,\eta) = (D'\eta,D'\eta) \geq 0$$
$$(L^*D'\eta, \bar\partial^*\eta) = 0$$

Аналогично, $2i(\Theta L^* \eta, \eta) = -(D'^* \eta, D'^* \eta) \leq 0$

$\rightsquigarrow 2i([L^*, \Theta]\eta, \eta) \geq 0$

$\Theta = \frac{2\pi}{i} L \rightsquigarrow 2i([L^*, \Theta]\eta, \eta) = 4\pi([L^*, L]\eta, \eta)$

$= 4\pi(n-p-q)\|\eta\|^2 \geq 0 \rightsquigarrow$ если $p+q>n$, то $\|\eta\| = 0$ $\square$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $H^q(M, \Omega^p(\mathcal{L})) = 0$ при $p+q<n$ и $\mathcal{L}$-отриц.

$\boxed{\text{Теорема}}$ M — компактное комплексное

$\mathcal{L} \longrightarrow M$ — положительное, $E \longrightarrow M$ — голом. вект. рассл.

$\rightsquigarrow \exists m_0 \in \mathbb{N}: H^q(M, \mathcal{L}^m \otimes E) = 0 \ \forall m \geq m_0, \forall q > 0$

<u>Д-во:</u> аналогично $\square$

M — компактное комплексное, $\mathcal{L} \to M$ — лин. рассл.

$V \leq H^0(M, \mathcal{L}) \longrightarrow |V| = \{(s)\}_{s \in V} \subset \operatorname{Div} M$

лин. система

M — компактное $\longrightarrow (s) = (s') \iff s = \lambda s'$

$\rightsquigarrow |V|$ параметризуется $\mathbb{P}(V)$

Пусть $|V|$ не имеет базисных точек, т.е. $\bigcap (s) = \emptyset$

$\rightsquigarrow \forall p \in M \ \{s \in V \mid s(p) = 0\} = \widetilde{H}_p \leq V$

гиперплоскость

$\rightsquigarrow H_p \subseteq \mathbb{P}(V)$

Получаем $i_V: M \longrightarrow \mathbb{P}(V)^\vee$

$p \longmapsto H_p$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $s_0, \ldots, s_N$ — базис V

$\rightsquigarrow p \longmapsto [s_0(p) : s_1(p) : \cdots : s_N(p)] \in \mathbb{P}^N$

$i_{\mathcal{L}} = i_{H^0(M,\mathcal{L})} : M \longrightarrow \mathbb{P}^N$ — вложение, если

(0) $H^0(M,\mathcal{L}) \xrightarrow{r_x} \mathcal{L}_x \ \forall x \in M$

(1) $H^0(M,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}_x \oplus \mathcal{L}_y \quad \forall x \neq y \in M$

(2) $H^0(M, I_x(\mathcal{L})) \longrightarrow T_x^{*,\prime} \otimes \mathcal{L}_x$

пучок $=0$ в x сечений $\mathcal{L}$

$\boxed{\text{Теорема}}$ M — компактное комплексное, $\mathcal{L} \longrightarrow M$ — положит. лин. рассл. $\rightsquigarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$ т.ч. $\forall k \geq k_0 \quad i_{\mathcal{L}^k} : M \longrightarrow \mathbb{P}^N$ — вложение.

Д-во (1) $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — раздутие M в x, y

$E_x = \pi^{-1}(x)$, $E_y = \pi^{-1}(y)$ $\qquad \widetilde{\mathcal{L}} = \pi^*\mathcal{L}$

$E = E_x + E_y$ — искл. дивизор

$\pi^* : H^0(M, \mathcal{L}^k) = H^0(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{L}}^k)$

(Hartog's theorem: f голом. на $\mathcal{U} - \{x\}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$
$\rightsquigarrow f$ продолж. на $\mathcal{U}$)

$$\begin{array}{ccc} H^0(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{L}}^k) & \xrightarrow{r_E} & H^0(E, \widetilde{\mathcal{L}}^k|_E) \\ \| & & \| \\ H^0(M, \mathcal{L}^k) & \xrightarrow{r_{x,y}} & \mathcal{L}_x^k \oplus \mathcal{L}_y^k \end{array}$$

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes L(-E) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}^k \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}^k|_E \longrightarrow 0$$

$H^1(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes L(-E)) = 0$ — из т. Кодаиры (см. выше)

$\boxed{\text{Теорема}}$ M — комп. комплексное $\rightarrow$ M вкладывается в $\mathbb{P}^N \Leftrightarrow \exists$ замкнутая полож. (1,1)-форма ω т.ч. $[\omega] \in H^*(M, \mathbb{Q})$