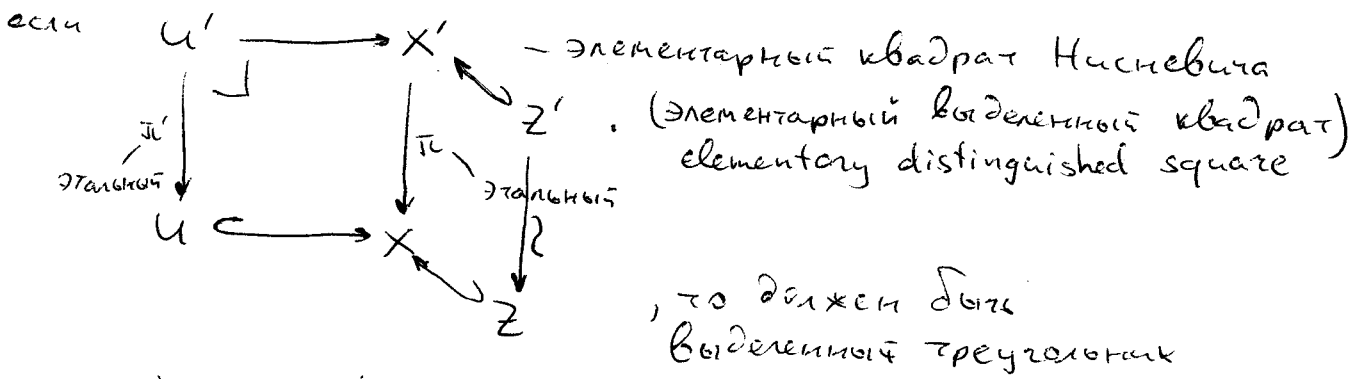


Желаем построить тензорную триангулированную категорию Mot/k (позже это будет $\text{DM}^-(k)$)

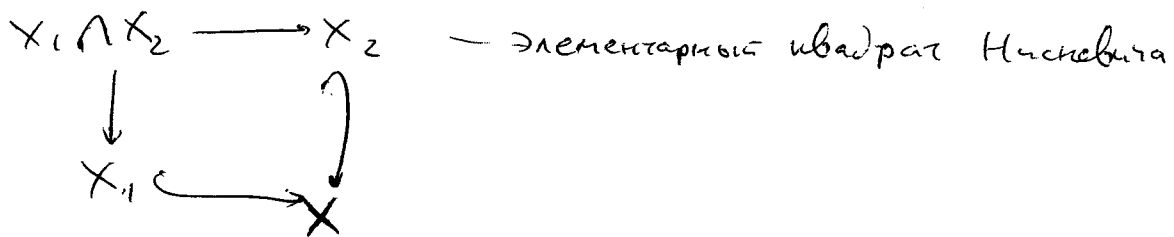
и тензорный ~~триангулированный~~ функтор $S_m/k \xrightarrow{M} \text{Mot}/k$
 такой, что $X \longmapsto M(X)$

① ~~Элементарный квадрат~~



$$M(U') \longrightarrow M(U) \oplus M(X') \longrightarrow M(X) \longrightarrow M(U')[1]$$

для обычного покрытия по Зариски $X = X_1 \cup X_2$,



② $M(X \times \mathbb{A}^1) \xrightarrow{p_{X,*}} M(X)$ — изоморфизм в Mot/k

③ Этапное вырезание:

для любого квадрата, как в (1),

$$M(X') / M(U') \quad \text{— изоморфизм}$$

$$\downarrow$$

$$M(X) / M(U)$$

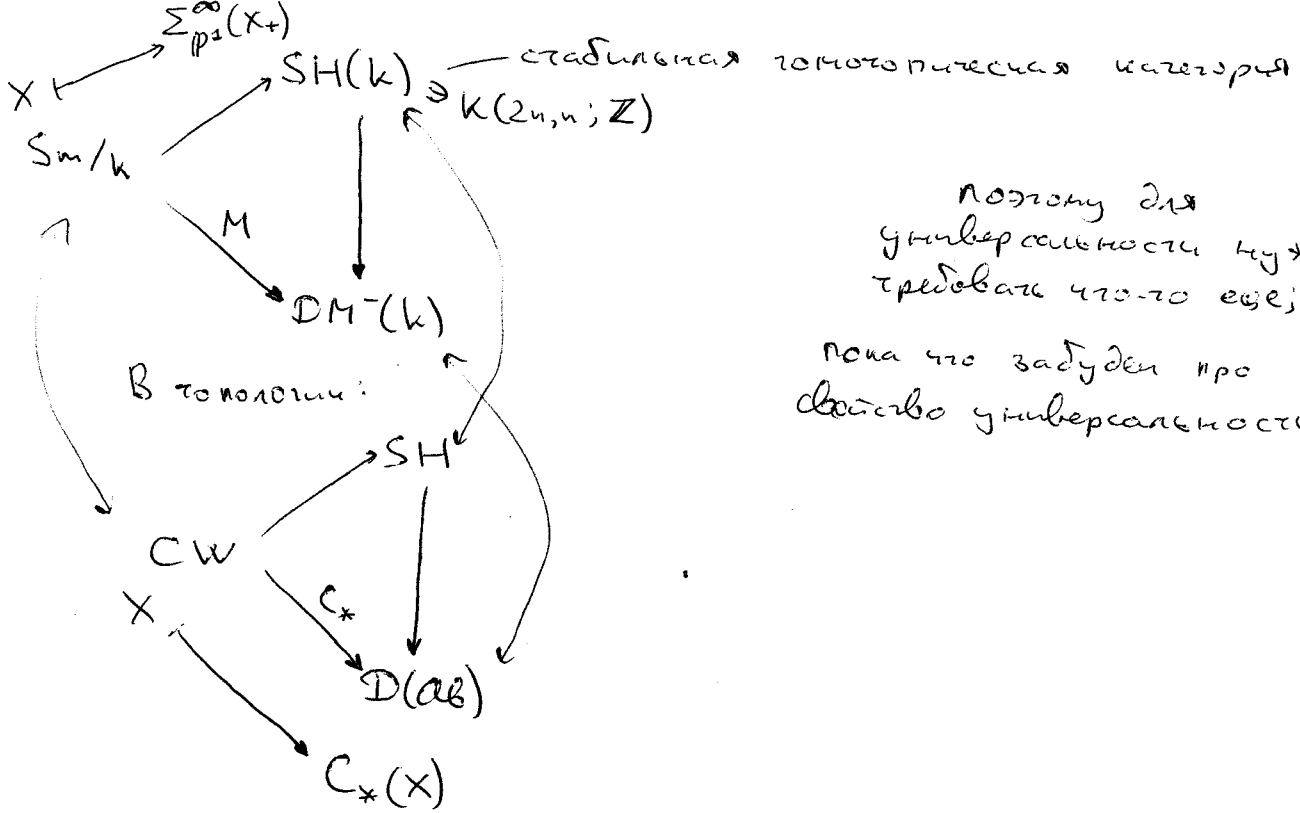
④ тензорность: $M(X \times Y) = M(X) \otimes M(Y)$

Еще хочется, чтобы пара $(\text{Mot}/k, S_m/k \xrightarrow{M} \text{Mot}/k)$ была «универсальной» среди всех пар с такими же свойствами

⑤ Должны существовать объекты $\mathbb{Z}(n) \in \text{Mot}/k$ такие, что

$$\forall \text{ гладкого } X \quad \text{Hom}_{\text{Mot}/k}(M(X), \mathbb{Z}(n)[2n]) = \mathbb{C}H^n(X)$$

$$\text{в частности, } \text{Hom}_{\text{Mot}/k}(M(X), \mathbb{Z}(1)[2]) = \mathbb{C}H^2(X) = \text{Pic}(X).$$

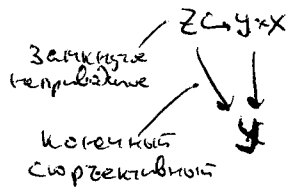


$\text{Cor}(k)$ — категория:

$$\text{ob}(\text{Cor}(k)) = \text{ob } Sm/k$$

$$\text{Mor}_{\text{Cor}(k)}(Y, X) = \text{Cor}(Y, X)$$

$$= \bigoplus \mathbb{Z} [Z]$$



композиция: $\text{Mor}(Y, X) \times \text{Mor}(X, W) \longrightarrow \text{Mor}(Y, W)$

$$(Z_1, Z_2) \longmapsto P_{Y, W, *}((Z_1 \times W) \cdot (Y \times Z_2))$$

где $(Z_1 \times W) \cdot (Y \times Z_2)$ — «правильное» пересечение

вычисляется по Тор-формуле

$$Y \times X \times W$$

$$\downarrow P_{Y, W}$$

$$Y \times W$$

Проверяется (благодаря ассоциативности произведения циклов), что композиция ассоциативна.

$$\text{Cor}(X, X) \ni \text{id}_X = [\Delta(X)].$$

Эти данные задают категорию Cor/k

Замечание

$$Sm/k \xrightarrow{i} \text{Cor}/k \quad \text{— функтор}$$

$$X \longmapsto X$$

$$(Y \xrightarrow{f} X): f \longmapsto (\Gamma(f) \subset Y \times X) \in \text{Cor}(Y, X)$$

Определение Предпучок абелевых групп с трансферами на S_m/k — это функтор $(\text{Cor}/k)^{\text{op}} \xrightarrow{F} \text{Ab}$ такой, что

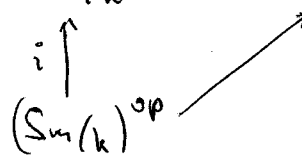
$F(X_1 \amalg X_2) \rightarrow F(X_1) \times F(X_2)$ — изоморфизм,
 (и сумма морфизмов переходит в сумму?)
 Иначе говоря — это аддитивный функтор

$X_1 \oplus X_2 := X_1 \amalg X_2 \rightsquigarrow \text{Cor}/k$ — аддитивная категория

PreSwT — категория предпучков с трансферами.

Определение Пучок Нисневича с трансферами на S_m/k —

это такой предпучок $F: \text{Cor}/k^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$, с трансферами, что композиция $F \circ i$ — это пучок Нисневича на $S_{m_{\text{nis}}}/k$.



Категория пучков Нисневича с трансферами — NSwT

см. Voevodsky, Suslin, "Bloch-Kato conjecture and..."

Определение Для $X \in S_m/k$ положим

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] := \text{Cor}(-, X) \in \text{NSwT}$$

т.е. это пучок Нисневича.

Одна конструкция: если $F \in \text{PreSwT}$, образуем предпучки $C^{-n}(F)$.

$$C^{-n}(F)(U) := F(\Delta^n \times U),$$

это предпучки с трансферами.

$$C^{-n}(F)(U) \rightarrow C^{-(n-1)}(F)(U)$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$F(\Delta^n \times U) \xrightarrow{\partial^{-n}} F(\Delta^{n-1} \times U)$$

Получаем комплекс предпучков с трансферами $C^*(F)$

Лемма Предпучок $U \mapsto H^i(C^*(F)(U))$ —

$$\parallel$$

$$H^i(C^*(F)(U))$$

гомотопически инвариантен, то есть,

$$H^i(C^*(F)(U)) \xrightarrow{\sim} H^i(C^*(F))(A^1 \times U)$$

Определение $M(X) = C^*(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]) \in \mathcal{D}^-(\text{NSwT})$

полная подкатегория в $\mathcal{D}^-(\text{NSwT})$, состоящая из A^1 таух, что пучки Нисневича $H^i(A^1)$ гомотопически инвариантны

$\mathcal{D}M^-(k)_k$ — абелева категория
 C^* — локализующий функтор — будет позже
 C^* убивает объекты $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X + A^1] / \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X + 0]$

Теорема 1 Для любого гомотопически инвариантного предпука $\mathcal{F} \in \text{PreSwT}$ ассоциированный пучок Нисневича \mathcal{F}_{Nis} тоже гомотопически инвариантен

Следствие $M(X) \in \mathcal{DM}^-(k)$

Определение Категория $\mathcal{DM}^-(k)$ называется триангулированной категорией мотивов, и $M(X)$ называется мотивом X .

Если категория $\mathcal{DM}^-(k)$ удовлетворяет свойствам категории Mot/k

Еще одно пожелание:

$$\textcircled{6} \forall X \in \text{Sm}/k \quad H_{Nis}^i(X, A^\bullet) = \text{Hom}_{\mathcal{DM}^-(k)}(M(X), A^\bullet[i])$$

$$\forall A^\bullet \in \mathcal{DM}^-(k)$$

Частный случай: пусть $\mathcal{F} \in \text{NSwT}$ - гомотопически инвариантный.

$$\left(\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{(-2)} 0 \xrightarrow{(-1)} \mathcal{F} \xrightarrow{(0)} 0 \rightarrow \cdots \right) \in \mathcal{DM}^-(k)$$

$$\Rightarrow H_{Nis}^i(X, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{DM}^-(k)}(M(X), \mathcal{F}[i])$$

$$H_{Nis}^i(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{DM}^-(k)}(M(X \times \mathbb{A}^1), \mathcal{F}[i])$$

$$M(X)$$

$$M(\rho) \uparrow \cong$$

$$M(X \times \mathbb{A}^1)$$

Итак, если пожелание выполнено, то имеет место

Теорема 2 Для гомотопически инвариантного $\mathcal{F} \in \text{NSwT}$ $\forall i$

$$H_{Nis}^i(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H_{Nis}^i(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})$$

Можно предположить, что если мы докажем эту теорему 2 независимо, то докажется и пожелание (и многое другое)

Принцип (который будет реализован)

- а) доказать теорему 2 саму по себе,
- б) вывести из теоремы 2 тот факт, что $\mathcal{DM}^-(k)$ — триангулированная подкатегория в $\mathcal{D}^-(NSWT)$;
- с) проверить все остальные свойства пары $(Sm/k, Sm/k \xrightarrow{M} \mathcal{DM}^-(k))$, сформулированные в начале этого разговора.

Лемма $\mathcal{F} \in \text{PreSwT} \Rightarrow \exists!$ структура предпушка с трансферами на \mathcal{F}_{Nis} такая, что канонический морфизм $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{Nis}$ является морфизмом предпушков с трансферами

— пока поверим в эту Лемму

План доказательства Теоремы 1:

а) **Лемма** $X \in Sm/k, \mathcal{F}$ — как в Теореме 1, $x \in X \text{ Spec}(x) \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^1_x$
 $\sim \mathcal{F}_x = \mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \hookrightarrow \mathcal{F}_x = \mathcal{F}(k)$

Замечание $X \mapsto \frac{k[X]^*}{\text{Mod}((k[X] \otimes H)^*)}$ — гомотопически инвариантный предпушок с трансферами

б) **Следствие** $X \in Sm/k, \mathcal{F}$ как в Теореме 1 $\Rightarrow \forall U \hookrightarrow X$ отпр.

$\mathcal{F}_{Nis}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_U$
Следствие $\mathcal{F}_{Nis}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{Nis}(V)$

$\forall V \hookrightarrow U \hookrightarrow X$
отпр.

на U есть 1) пост. пушок со смен \mathcal{F}_U

2) $\mathcal{F}_{Nis}|_U$

3) $\mathcal{F}_{Nis}|_U \rightarrow (\mathcal{F}_U)_{\text{const}}$

функция под. сечения точки севы

с) $\forall X, \forall \mathcal{F}$ как в Теореме 1 рассмотрим

$\mathcal{F} \left(\mathbb{A}^1_{k(X)} \right)_{Nis}$
 малый сайт Нисневича

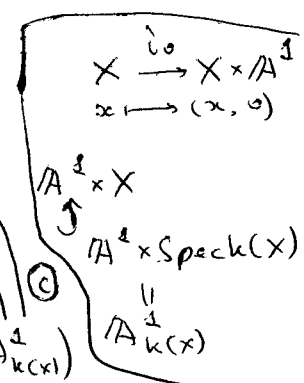
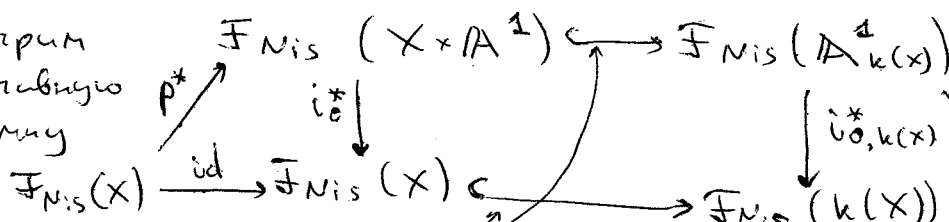
— предпушок.

Утверждение

мохо! правильную формулировку см. ниже.
 Это уже пушок Нисневича на малом сайте $(\mathbb{A}^1_{k(X)})_{Nis}$

(а) + (б) + (с) \Rightarrow Теорема 1. Покажем это:

Рассмотрим коммутативную диаграмму



$\rightarrow i_0^*$ — инъекция, $i_0^* p^* = \text{id} \Rightarrow i_0^*$ — сюръекция
 $\rightarrow i_0^*$ — изоморфизм \Rightarrow теорема 1.

следует из гомотопической инвариантности \mathcal{F} **5**

Правильная формулировка (с):

$$\forall X \forall \mathbb{F} \text{ как в Теореме 1 } \forall U \subset \mathbb{A}_{k(X)}^{\pm}$$
$$\mathbb{F}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{\text{Mis}}(U)$$