

**Лемма 1.6**

Пусть  $f: Y \xrightarrow{\quad} X$  — покрытие по Нисневичу многообразия  $X$ .  
 $\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$   
 $S_m \quad \quad \quad S_m$

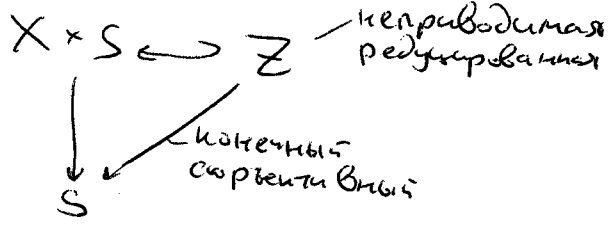
Тогда следующая последовательность пучков Нисневича точна:

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z}_{t_2}(X) \longleftarrow \mathbb{Z}_{t_2}(Y) \longleftarrow \mathbb{Z}_{t_2}(Y \times_X Y) \longleftarrow \dots$$

Ф-во: достаточно доказать, что для любой гладкой кензеловой схемы  $S$  последовательность абелевых групп

$$A_*(S) = (0 \longleftarrow \mathbb{Z}_{t_2}(X)(S) \longleftarrow \mathbb{Z}_{t_2}(Y)(S) \longleftarrow \mathbb{Z}_{t_2}(Y \times_X Y)(S) \longleftarrow \dots)$$

Фиксируем замкнутую подсхему  $Z \subset X \times S$ :

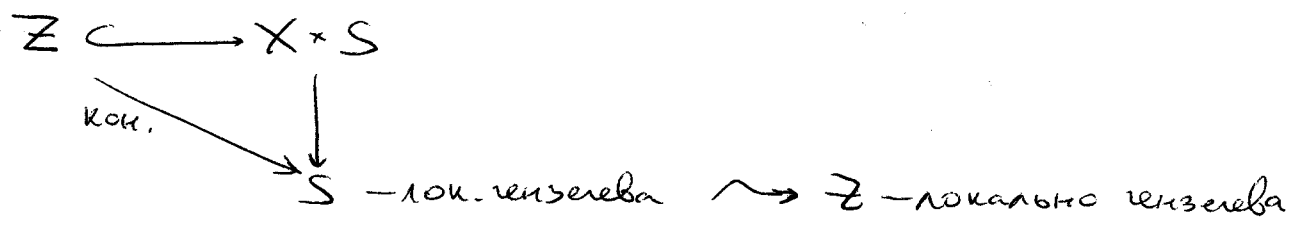


Обозначим через  $A_n^Z(S) \subseteq A_n(S)$  подгруппу, порожденную замкнутыми неприводимыми  $T \subset (Y \times_X Y \times_X \dots \times_X Y) \times S$  таким, что

образ  $T$  в  $X \times S$  равен  $Z$  и  $\downarrow$  — конечный сюръективный

Наблюдение:  $A_n(S) = \bigoplus A_n^Z(S)$  и, более того,  
 $A_*(S) = \bigoplus A_*^Z(S)$

Поэтому достаточно доказать, что  $\forall Z \subset X \times S$  как выше  $A_*^Z(S)$  точна. Явно выпишем гомологию



(канонично:  $A$  — локальное полное нетерово,  $A \rightarrow A'$  — область, конечно порожденная или  $A$ -модуль  $\Rightarrow A'$  — локальное полное)



$$A_1^Z(S) \xleftarrow{(p_1)_* - (p_2)_*} A_2^Z(S)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\mathbb{Z}_2(Y)(S) \qquad \qquad \mathbb{Z}_2(Y \times_Y Y)(S)$$

$$\begin{array}{ccc} Z & \xleftarrow{u_0 = f \circ g} & T \\ \uparrow & & \uparrow \\ X \times S & \xrightarrow{(p_1, f \circ g, p_2)} & Y \times_Y Y \times S \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \\ f(Z) \subset Y \times S \end{array}$$

$$(p_2)_*(\tau) = (p_2, p_2)(\tau) = \tau$$

$$(p_1)_*(\tau) = f(Z)$$

— то, и далее аналогично

□

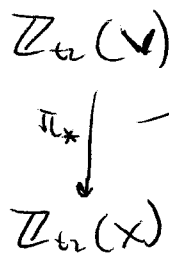
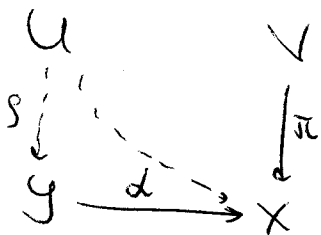
Первое применение

$\mathbb{F}: \text{Cor} \longrightarrow \text{Ab}$  — предпучок с трансферами.

Тогда на  $\text{am}_S(\mathbb{F})$  существует единственная структура пучка с трансферами такая, что  $\mathbb{F} \longrightarrow \text{am}_S(\mathbb{F})$  — гомоморфизм предпучков с трансферами.

Д-во ① Нужно доказать, что  $\mathbb{F}^{\text{loc}} \subset \mathbb{F}$  выдерживает трансферы, имеющиеся на  $\mathbb{F}$ .

Возьмем  $X \in \text{Sm}$ ,  $s \in \mathbb{F}^{\text{loc}}(X) \implies \exists$  покрытие по Хисневичу  $V \xrightarrow{\pi} X$  такое, что  $\pi^*(s) = 0$  в  $\mathbb{F}(V)$ . Пусть  $Y \in \text{Sm}$ ,  $\alpha: Y \longrightarrow X$ :  
 $\alpha \in \text{Cor}(Y, X) = \mathbb{Z}_2(X)(Y)$ . Докажем, что  $\alpha^*(s) \in \mathbb{F}^{\text{loc}}(Y)$ .

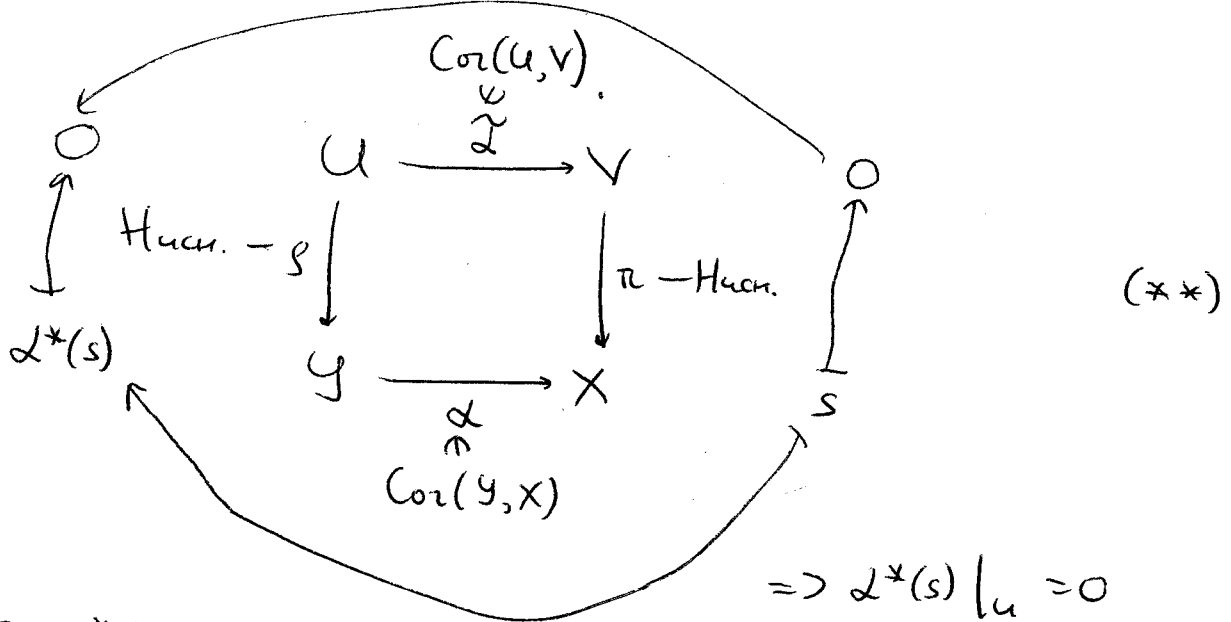


— локально сорганизовано в топологии Хисневича. После изменения  $Y$  в топологии Хисневича:  $\alpha$  приходит с сечения  $\mathbb{Z}_2(V)$

т.е.  $\alpha \in \mathbb{Z}_2(X)(Y) \implies$  найдется покрытие по Хисневичу  $U \xrightarrow{\tilde{g}} Y$  такое, что  $\tilde{g}^*(\alpha) = \pi \circ \tilde{\alpha}$  для некоторого  $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}_2(V)(U)$

3

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{t_2}(V)(Y) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{t_2}(V)(U) \ni \tilde{\alpha} \in \text{Cor}(U, V) \\ \downarrow \pi(Y) & & \downarrow \pi(U) \\ \mathbb{Z}_{t_2}(X)(Y) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{t_2}(X)(U) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \alpha|_U = \pi \circ \tilde{\alpha} \end{array}$$



$$\Rightarrow \alpha^*(s)|_U = 0$$

$\Rightarrow \alpha^*(s)$  локально тривиально:  
 $\uparrow$   
 $\mathbb{F}^{\text{loc}}(Y)$

Отсюда следует, что на  $\mathbb{F}/\mathbb{F}^{\text{loc}}$  есть трансферры.

$\mathbb{F}/\mathbb{F}^{\text{loc}}$  — отделим.

Поэтому можно считать, что с самого начала  $\mathbb{F}$  — отделим.

Построим трансферры на  $\mathcal{A}_{\text{Nis}}(\mathbb{F})$

Пусть  $s \in \mathbb{F}(V)$ :  
 $\parallel \leftarrow \text{Joneida}$   
 $s \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}_{t_2}}(\mathbb{Z}_{t_2}(V), \mathbb{F})$   
 $\downarrow \pi^* - \rho^*$   
 $0 \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}_{t_2}}(\mathbb{Z}_{t_2}(V \times_X V), \mathbb{F})$

$$\begin{array}{c} V \times_X V \\ \rho_1 \downarrow \quad \downarrow \rho_2 \\ V \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

$$\rho_1^*(s) - \rho_2^*(s) = 0$$

$$\mathbb{Z}_{t_2}(V \times_X V) \xrightarrow{\rho_1^* - \rho_2^*} \mathbb{Z}_{t_2}(V) \xrightarrow{s} \mathbb{F}$$

— в категории предлучше.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Coker}(\rho_1^* - \rho_2^*) & \\ & \swarrow & \searrow \\ & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\text{Nis}}(S) : \mathcal{A}_{\text{Nis}}(\text{Coker}(\rho_1^* - \rho_2^*)) & \longrightarrow & \mathcal{A}_{\text{Nis}}(\mathbb{F}) \\ \parallel & \parallel \leftarrow \text{по Лемме} & \uparrow \\ \mathcal{S}_{\text{Nis}} & \mathbb{Z}_{t_2}(X) & \text{— в } \text{Sh}_{\text{Nis}} \text{ на } S_m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha \uparrow & & \\
 \text{Cor}(Y, X) & \xrightarrow{\quad} & (\overline{S_{Nis}})(\alpha) \\
 \parallel & & \uparrow \\
 \mathbb{Z}_{tr}(X)(Y) & \xrightarrow{\quad} & a_{Nis}(\mathcal{F})(Y)
 \end{array}$$

→ для любого отображения  $\alpha: Y \rightarrow X$  мы получим некоторый  $(\overline{S_{Nis}})(\alpha) \in \mathcal{F}_{Nis}^{\sim}(Y)$

Определим  $\alpha^*(s) = (\overline{S_{Nis}})(\alpha)$ ; осталось проверить, что

$$\forall Z \xrightarrow{\beta} Y \xrightarrow{\alpha} X, \quad \forall s \in \mathcal{F}_{Nis}^{\sim}(X) \text{ выполнено.}$$

$$\beta^*(\alpha^*(s)) = (\alpha \circ \beta)^*(s)$$

— используя пару раз диаграмму типа (\*\*), это доказывается.