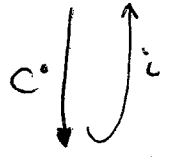


$$D^-(NS_{\omega T})$$



$$DM^-(F) = \{A^{\bullet} \mid \forall i \quad h^i(A^{\bullet}) \text{ — гомотоп. инв.}\}$$

Мы показали, что  $C^{\bullet}$  — левый сопр. к  $i$

$$\mathcal{A} = \text{Ker}(C^{\bullet}) \hookrightarrow D^-(NS_{\omega T})$$

$DM^-(F)$  — это локализация  $D^-(NS_{\omega T})$  по  $\mathcal{A}$

и  $C^{\bullet}$  — функтор локализации

**Предложение 1.14**

Категория  $\mathcal{A}$  порождена как триангулированная категория пучками вида  $\mathbb{Z}_{tr}(X \times A^1) / \mathbb{Z}_{tr}(X \times 0) =: \mathbb{Z}_{tr}(X \times A^1 / X \times 0)$

**Лемма 1.13**

$A^{\bullet} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A^{\bullet}$  изоморфен в  $D^-(NS_{\omega T})$  комплексу  $B^{\bullet}$  такому, что  $\forall i \quad B^i \in NS_{\omega T}$  — это  $A^1$ -стягиваемый пучок Нустевича с трансферами

Док-во " $\Rightarrow$ ": Если  $A^{\bullet} \in \mathcal{A}$ , то  $C^{\bullet}(A^{\bullet})$  ациклический, т.е. нулевой объект в  $D^-(NS_{\omega T})$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C^0(A^{\bullet}) & \xrightarrow{j_A} & C^{\bullet}(A^{\bullet}) & \longrightarrow & \text{coker}(j_A) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \cong & & \parallel & & \\
 & & A^{\bullet} & & 0 & & \text{— в } D^-(NS_{\omega T})
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{coker}(j_A) \cong C^0(A^{\bullet})[1] \xleftarrow{\cong} A^{\bullet}[1]$$

↑ состоит из  $A^1$ -стягиваемых пучков Нустевича с трансферами

" $\Leftarrow$ ": Пусть  $A^{\bullet}$  таков, что  $\forall i \quad A^i$  —  $A^1$ -стягиваем.

Тогда  $\forall i$  все члены комплекса  $C^{\bullet}(A^i)$  тоже  $A^1$ -стягиваемы. Поэтому все члены комплекса  $C^{\bullet}(A^{\bullet})$   $A^1$ -стягиваемы. С другой стороны,  $\forall i \quad h^i(C^{\bullet}(A^{\bullet}))$  гомотоп. инв.  $\Rightarrow C^{\bullet}(A^{\bullet})$  ациклический  $\Rightarrow A^{\bullet} \in \mathcal{A}$

Доказательство Предложения 1.14

(a)  $\mathbb{Z}_{t_2}(X \times A^1) / \mathbb{Z}_{t_2}(X \times 0) \in \mathcal{A}$  ?

Мы уже доказывали, что эти пучки  $A^1$ -стягиваемы.

$\leadsto$  по Лемме 1.13  $\mathbb{Z}_{t_2}(X \times A^1 / X \times 0) \in \mathcal{A}$

$\forall A^i \in \mathcal{A} \quad A^i \cong B^i \quad : \quad \forall i \quad B^i - A^1$ -стягиваемый пучок  
 $\uparrow$  в  $\mathcal{D}(NS_{\text{шт}})$  Нисневича с трансферами.

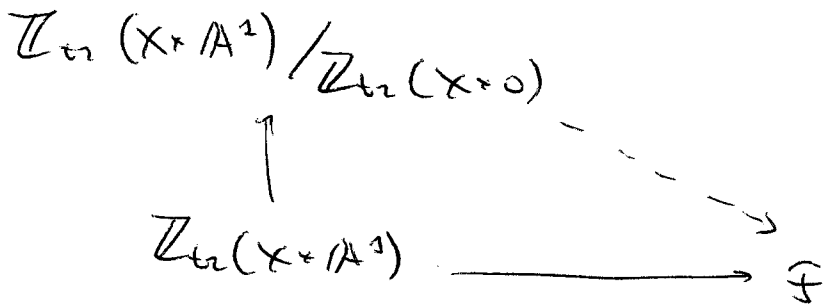
$\Rightarrow$  достаточно доказать, что любой  $A^1$ -стягиваемый имеет резольвенту, члены которой — прямые суммы пучков вида  $\mathbb{Z}_{t_2}(X \times A^1 / X \times 0)$ .

Более того, резольвенту указанного вида назовем  $\forall F \in \mathcal{A}$ , т.е. такой, что  $C^0(F)$  ациклический.

Для  $F$  хотим придумать морфизм  $\mathbb{Z}_{t_2}(X \times A^1) \xrightarrow{\varphi_s} F$   
 $\uparrow$  лемма Чокенды

$$s \in F(X \times A^1)$$

и хотим, чтобы  $\varphi_s$  пропущен через  $\mathbb{Z}_{t_2}(X \times A^1 / X \times 0)$



т.е.  $\varphi_s|_{\mathbb{Z}_{t_2}(X \times 0)} = 0$



$$s|_{X \times 0} = 0 \text{ в } F(X \times 0)$$

$$\text{при } \zeta_0^*: F(X \times A^1)$$

$$\downarrow \\ F(X \times 0)$$

т.е. задать морфизм  $\frac{\mathbb{Z}_{t_2}(X \times A^1)}{\mathbb{Z}_{t_2}(X \times 0)} \xrightarrow[\varphi_{x,s}]{\varphi_s} F$



задать  $s \in F(X \times A^1)$  т.ч.  $s|_{X \times 0} = 0$

Заметим, что

$C^0(F)$  ациклический  $\Rightarrow C^{-1}(F) \xrightarrow{\partial^1 - \partial^0} C^0(F) -$  сюръективный морфизм пучков

$$\bigoplus_{X \in S_{\text{шт}}} \bigoplus_{s \in F(X \times A^1)} \mathbb{Z}_{t_2}(X \times A^1 / X \times 0) \xrightarrow{\varphi_0 = \sum \varphi_{x,s}} F$$

$s|_{X \times 0} = 0$

Тогда  $\varphi_0$  — сюръекция в пучках Нисневича

Действительно, по замечанию выше

$$\forall X \forall s \in \mathcal{F}(X) \exists U \xrightarrow{\text{Нисн.}} X \exists t \in \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1):$$

$$t|_{U \times 1} - t|_{U \times 0} = s|_U \quad \text{Положим}$$

$$t^{\text{const}} = \rho_U(t|_{U \times 0}) \in \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1) \text{ и } t^{\text{new}} = t - t^{\text{const}}$$

при этом  $t^{\text{new}}|_{U \times 0} = 0$  и  $t^{\text{new}}|_{U \times 1} - t^{\text{new}}|_{U \times 0} = s|_U$

→ для  $s \in \mathcal{F}(X)$  мы нашли  $U \rightarrow X$

и  $t^{\text{new}} \in \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1)$  т.е.  $t^{\text{new}}|_{U \times 0} = 0$  →  $t^{\text{new}}$  задает

$$\mathbb{Z}_{t^{\text{new}}}(U \times \mathbb{A}^1 / U \times 0) \longrightarrow \mathcal{F}$$

→ мы построили

$$\begin{array}{ccccccc} K \xrightarrow{= \ker(\varphi_0)} & \bigoplus_{X \in S_{\text{м/р}}} & \bigoplus_{\substack{S \in \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1) \\ S|_{X \times 0} = 0}} & \mathbb{Z}_{t^{\text{new}}}(X \times \mathbb{A}^1 / X \times 0) & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow 0 \\ & & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & & \mathcal{A} & & \mathcal{A} & \end{array}$$

→  $K \in \mathcal{A}$  → контролируем процесс □

**Предложение 1.10**  $G, F$  — пучки Нисневича (сооб. из NSwt)

При этом ①  $G - \mathbb{A}^1$ -стягиваем; ②  $F$  строго гомологически инвариантен

( $\forall i \ X \rightarrow H^i(X, F)$  гомологически инвариантен)

// для NSwt достаточно, чтобы  $F$  был гомологически инвариантен

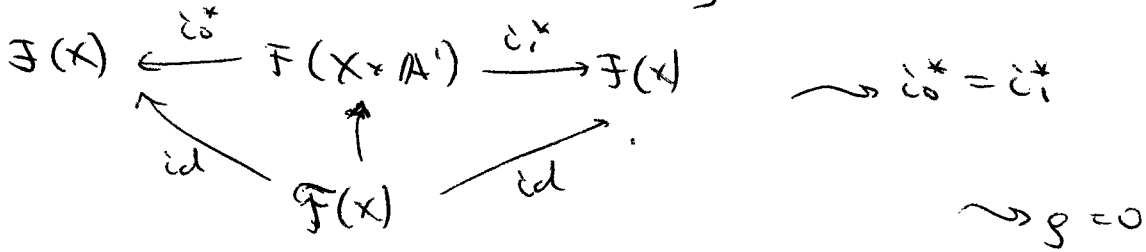
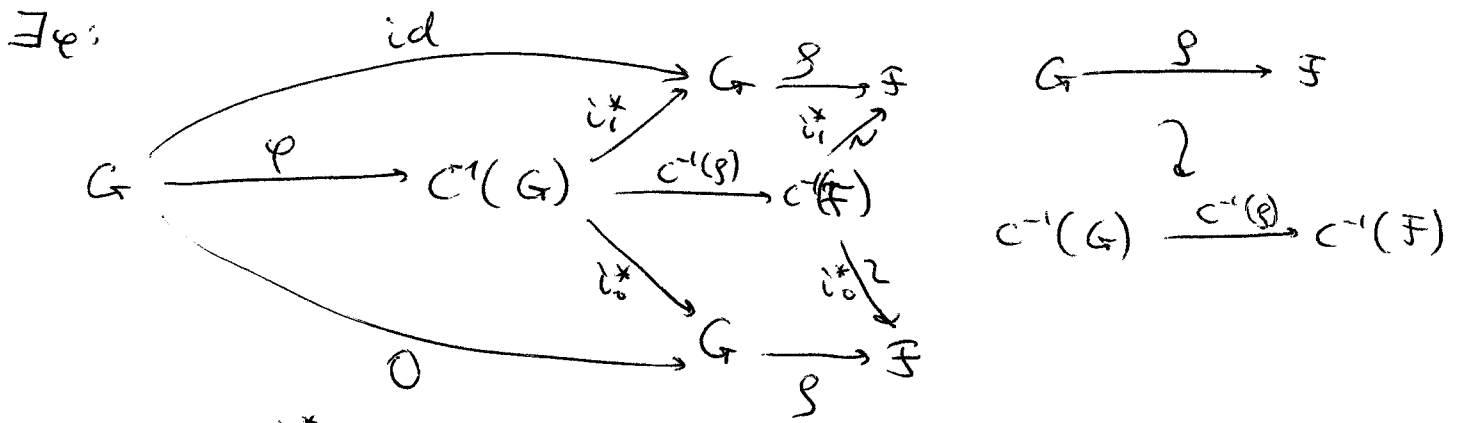
Тогда  $\forall j \ \text{Ext}^j(G, F) = 0$  (сооб.  $\text{Ext}_{\text{NSwt}}^j(G, F) = 0$ )

Почему  $\text{Hom}(G, F) = 0$ ?  $\varphi \in G \rightarrow F$

Взяли нулевое сечение  $G$ , его можно потянуть к 0,

поэтому образ можно потянуть к 0, но  $F$  гомологически инвариантен

→ этот образ равен 0



D-во Предложения 1.10

Пусть  $0 \rightarrow F \rightarrow I^\bullet$  — инъективная резольвента

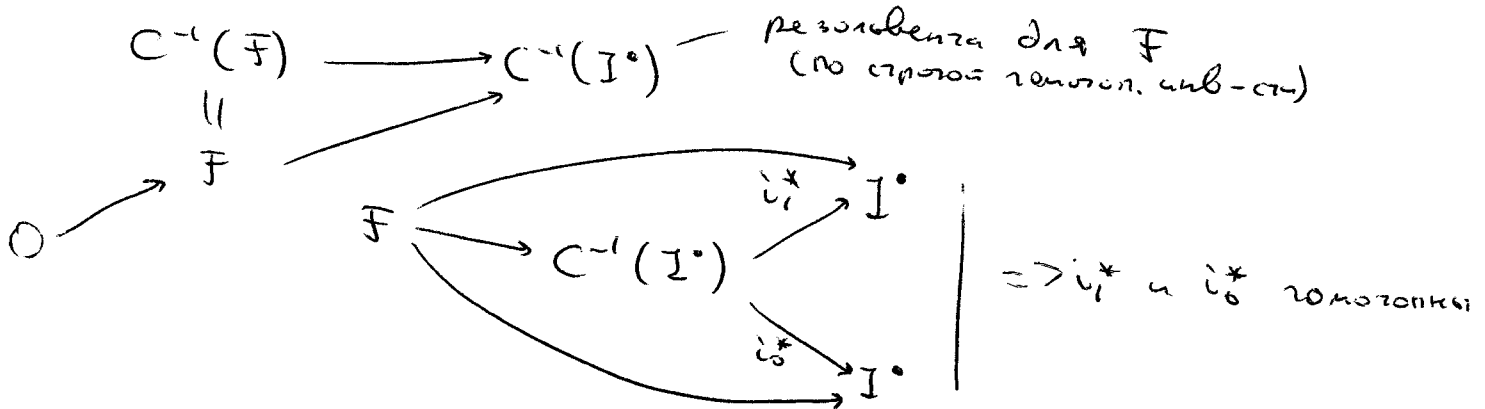
Предположим когомологический комплекс  $C^{-1}(I^\bullet)$  заданы так:

$$X \longmapsto H_{Nis}^i(X \times \mathbb{A}^1, F) \stackrel{(2)}{\downarrow} = H_{Nis}^i(X, F)$$

Если  $i > 0$ , то ассоциированные пути равны 0

$$H^0(X \times \mathbb{A}^1, F) = H^0(X, F) = F(X).$$

Итак,

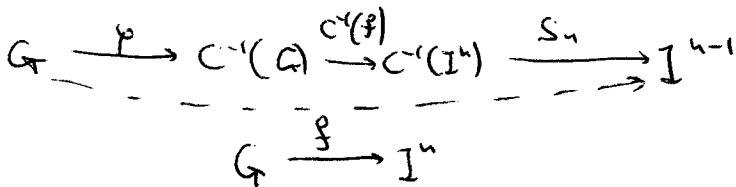


$$\Rightarrow \exists s_n: C^{-1}(I^n) \rightarrow I^{n-1} \quad ds_n + s_{n+1} C^{-1}(d) = i_1^* - i_0^*$$

Пусть  $\varphi: G \rightarrow C^{-1}(G)$  делает  $G$   $\mathbb{A}^1$ -стягиваемым

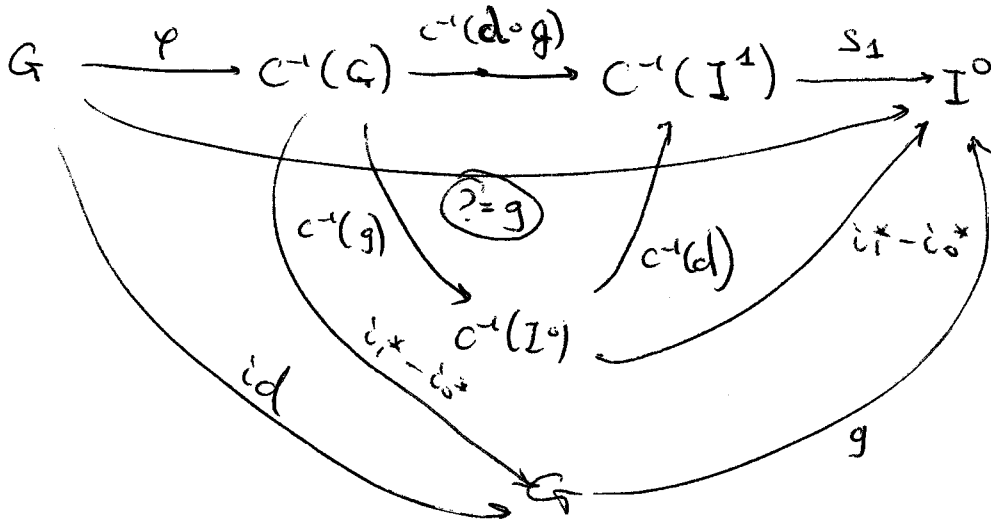
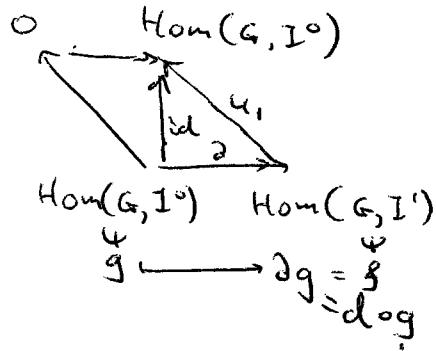
Мы хотим написать стягивающую гомологию для  $\text{Hom}(G, I^\bullet)$

$$\exists \in \text{Hom}(G, I^n) \xrightarrow{c_n} \text{Hom}(G, I^{n-1}) \quad c_n(\varphi) := s_n C^{-1}(\varphi)$$



Проверим, что это стягивающаяся гомотопия:  $\partial u_n + u_{n-1} \partial = id$   
 (только для первого члена):

$n=0$ :



□

5