12.09.2005

Геометрическое подобие алгебр

(алг. – в унив. смысле)

Θ – многообразие алгебр, $H \in \Theta$ => „алгебраическая геометрия Θ над H" – UAG

подобие – отношение между алгебрами, кот обеспечивает одинаковость геометрии

~> геом. св-ва алгебр $\longleftrightarrow$ логические св-ва

Отн между алгебрами:

- геом. эквивалентность
- геом. подобие
- ком. согласованность

① Унив. часть – $\forall$ многообразия и $\forall$ алгебра

② Специальные случаи:

1. $\Theta = Com\,P$ – комм. асс. алгебры над P = классическая AG
   $H = L \supset P$ (L – поле)
2. $\Theta = Ass\text{-}P$ – некоммутативная AG
3. $\Theta = Lie\text{-}P$
4. $\Theta = Mod\text{-}K$ (K – кольцо, не обяз. комм.)
   – групповая алгебра, унив. обертыв. алгебра алг. Ли.
   $K = PG$ $\quad K = U(L)$
5. $\Theta = Rep\text{-}K$ (K – комм. кольцо с 1)
   представление = пара (V, G) (V – модуль над K, G – группа)
6. Grp, SeG

7. Grp – F – группы с fixed свободной группой

Θ – $\forall$ многообр., $\forall\, G \in \Theta$.

$\forall$ категорию Θ^G: „объекты" = вложения $h: G \longrightarrow H$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h_1"] \arrow[dr, "h_2"'] & H_1 \arrow[d, "v"] \\ & H_2 \end{tikzcd}$$

– „морфизмы"

Θ^G – тоже многообразие, эл-ты из G – константы

Напр., для групп

Grp – G – больше, чем группы (в Grp константы – только 1)

Своб. объекты: $W(X) = G * W_\Theta(X)$

G – ест. вложение

Grp-F — частный случай: F — свободная группа констант в кач-ве H — $F = F(a_1, \dots, a_k)$

$\rightsquigarrow$ геометрия над F

$\forall$ своб. имеет вид $F(a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_n)$

Эта геометрия тесно связана с логикой в $F(a_1, \dots, a_k)$

Проблемы Тарского:

1. F_2, F_3 — неизоморфны. Можно ли распознать этот неизоморфизм средствами логики? $\rightsquigarrow$ Нельзя:

$\forall$ 2 своб. группы элементарно эквивалентны

2. Проблема разрешимости элем. теории: распознать, явл-ся ли предложение теоремой в своб. группе?

Θ, $G \supset H$

типа радикала

Def $H \in \Theta^a$ — вербально замкнута, если

H содержит каждую H_1: $H_1 \in Var(H)$, $H_1 \subset G$

Например: найти все верб. замкнутые подгруппы в абелевой группе.

Mod-K, $U \triangleleft K$.

Def Θ_u — многообр. модулей, подмногообр. в Mod-K:

$H \in \Theta_u \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ U аннулирует H: $uX = 0$ $\forall u \in U$.

$G \in$ Mod-K, $U \triangleleft K$

Радикал: $R_u(G)$ — наиб. модуль, аннулируемый U

сумма всех подмодулей в G, аннулируемых U

Допустим, что для $U \triangleleft K$ имеется $H \in$ Mod-K: $U = Ann\, H$

В таком случае $Ann\, R_u(G) = U$

$\triangleleft$ Var(H): $Var(H) = \Theta_u$, $U = Ann\, H$

$\boxed{\text{Thm}}$ Все верб. замкнутые подмодули G — это все радикалы по всем U, кот. аннулируют H.

Если H — в.з., то она вполне характеристична: $H^\sigma \subset H$ $\forall \sigma$ — автоморфизм G

В частности, в группах это всегда норм. делитель

$\triangleleft$ Grp. Θ_1, Θ_2, $\Theta_1 \wedge \Theta_2 = \{e\}$

$\triangleleft$ $G \in \Theta_1\Theta_2$, т.е. в G имеется H: $H \in \Theta_1$, $G/H \in \Theta_2$

$\Rightarrow$ H — вербально замкнута

— многообр.

Θ, Θ^0 — кат. своб. алгебр. в Θ $\quad W=W(X)$, и для люб. $X \subset X^0$ — универсальн-во

проблемы — изучение $Aut(\Theta^0)$

$$\overset{H}{\overline{}}$$

$Hom(W,H)$

$X=\{x_1,\dots,x_n\}$

$H^X = \{\nu: X\longrightarrow H\}$ — задается строкой $(a_1,\dots,a_n)$

$H^X = H^{(n)}$

точки: $\mu: W\longrightarrow H$

$w = w'$ — уравнение ; $w^\mu = w(a_1,\dots,a_n)$

μ — решение его, если $\quad w^\mu = w'^\mu$, т.е. $(w,w')\in Ker\,\mu$

$K^0_\Theta(H)$ — категория; объекты: афф. пространства

морфизмы: $\tilde{s}: Hom(W_1,H)\longrightarrow Hom(W_2,H)$

$s: W_2\longrightarrow W_1$

$\tilde{s}(\nu) = \nu s$.

$s \longmapsto \tilde{s}$ — контравар. функтор $\varphi: \Theta^0 \longrightarrow K^0_\Theta(H)$

Двойственность получается $\Leftrightarrow$ H порождает все Θ: $Var(H)=\Theta$.

$W=W(X)$ $\quad T$ — сист. уравнений

$w=w'$, (w,w') пара

$Hom(W,H)$

$\cup$

A

$T'_H = A = \{\mu: W\longrightarrow H, T\subset Ker\,\mu\}$ — локус, опр. системой T

$A'_W = T = \bigcap_{\mu\in A} Ker\,\mu$

$A = T'_H$, $T = A'_W$

H-замкн. конгруэнция

T — H-замкнуто $\Leftrightarrow W/T \in SC(H)$, C — декартова степень по некоторому мн-ву, S — подалгебра,

т.е. $W/T \hookrightarrow H^I$

$G \supset H$

$4\ \mathrm{Hom}(W, G) \supset \mathrm{Hom}(W, H)$
$$\mathrm{Hom}(W,H) = A$$

Когда A - алг. мн-во? $\Leftrightarrow$ H - вербально замкнута

$\Theta,\ H \in \Theta$

геом. инварианты H:

- категория алгебраических мн-в над H $\quad K_\Theta(H)$
- $C_\Theta(H)$ - категория координатных алгебр:

  „объекты" : алгебры вида W/T, где T - H-замкнута

  „морфизмы" - их гомоморфизмы

объекты: (X, A), $A \in \mathrm{Hom}(W(X), H)$

морфизмы: $[s] : (X, A) \longrightarrow (Y, B) \quad \overset{\text{двойств.}}{\longleftrightarrow} \quad s : W(Y) \longrightarrow W(X)$

$\tilde{s} : \tilde{s}(\nu) \in B \Leftrightarrow \nu \in A$

$\boxed{(X, A) \longmapsto W(X)/A'}$ — двойственность категорий

C - категория, $\tilde{C}$ - скелет

$\tilde{K}_\Theta(H)$: объекты - алг. многообразия

$\updownarrow$ двойственны

$\tilde{C}_\Theta(H)$: алг. из $C_\Theta(H)$ с точн. до $\simeq$

$Cl_H : \Theta^\circ \longrightarrow \mathrm{poSet}$ — контрвар.

$Al_H : \Theta^\circ \longrightarrow \mathrm{poSet}$ — ковар.

$Cl_H(W) = \{T : H\text{-замкнутые конгруэнции в } W\}$

$Cl_H(s) : Cl_H(W_1) \longrightarrow Cl_H(W_2)$, $\quad s : W_2 \longrightarrow W_1$ морфизм в Θ°.

$T \longmapsto s^{-1}T$

$Al_H(W) = \{$решетка алг. множеств$\}$ — двойств. к $Cl_H(W)$

H_1, H_2 — алгебры

$H \in \Theta$, $Var(H) = \Theta_1$

$K_\Theta(H) \cong K_{\Theta_1}(H)$

$$\begin{tikzcd}
K_\Theta(H_1) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & K_\Theta(H_2) \arrow[d, "\simeq"] & \text{— изо} \arrow[d, Leftarrow] \\
K_{\Theta_1}(H_1) \arrow[r] & K_{\Theta_2}(H_2) & \text{— изо}
\end{tikzcd}$$

F — изо, согласован с решетками, если

$\exists$ изо $\varphi : \Theta_1^0 \longrightarrow \Theta_2^0$:

$$F(Hom(W, H)) = Hom(\varphi(W), H_2)$$

и F задает изо между решетками алг. мн-в.

Говорят, что H_1 и H_2 имеют изоморфные геометрии, если $\exists$ такое F

имеют экв. геометрии,

если F — экв.

$\mathcal{E}$ — св-во алгебр — геометрическое, если из одинаковости геом. H_1 и H_2 и H_1 обл. $\mathcal{E}$ $\Rightarrow$ H_2 обл. $\mathcal{E}$.

Геом. эквивалентность двух алгебр

H_1, H_2 : $\forall W$, T — сист. :

$T''_{H_1} = T''_{H_2}$ $\longrightarrow$ одинаковость геометрий

$\longleftarrow$ — не всегда

Если H_1 и H_2 геом. экв., то

$qVar(H_1) = qVar(H_2)$ обратное — верно в класс. геометрии в общ. случае — нет

H — геометрически нетерова, если $\forall$ систем T $\exists$ $T_0 \subset T$ (конечн.) : $T''_H = T''_{0H}$

— логически нетерова, если $T''_H = \bigcup T''_{\alpha H}$, α — конечное

— неизвестно, геом. ли это свойство

$\exists$ H_1, H_2 — лог. нетеровы, H_1, H_2 — геом. экв. $\Leftrightarrow$ одинаковые qVar

Мясников, Ремесленников:

MR H_1 — не лог. нетерова, то некоторая ее ультрастепень $\tilde{H}$ не геом. экв. H

но у них одинаковые квазитожд-ва

Вопрос: $\exists$ ли не лог. нетеровы алгебры?

Для групп — есть

Для алг. Ли — нет

Проблемы:

F — своб. гр. кон. ранга — ОК

F — своб. ассоциативная (некомм.) алгебра над полем

$\left.\begin{array}{l}\text{— не геом. нетерова} \\ \text{лог. нетерова}\end{array}\right\} ?$ не решено

то же для своб. алг. Ли

Геометрическое подобие

H_1, H_2 — алгебры

$\Theta_1 = Var(H_1)$, $\Theta_2 = Var(H_2)$

$$\begin{tikzcd} \Theta_1^0 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "Cl_{H_1}"'] & & \Theta_2^0 \arrow[dl, "Cl_{H_2}"] \\ & poSet & \end{tikzcd}$$

φ — изоморфизм.

— диаграмма коммутативна, если $\exists$ изо функторов

$$\alpha(\varphi): Cl_{H_1} \longrightarrow Cl_{H_2}\varphi$$

согласованный с φ.

H_1, H_2 — геом. подобны, если такая КД $\exists$.

Thm H_1 и H_2 имеют изоморфные геометрии $\Longleftrightarrow$ они геом. подобны

$\exists$ H-модуль, над K ~~ ~~:

$U \triangleleft K: U = Ann\, H$

ν-такой ν: $\exists$ изо $\tau: K/U \longrightarrow K/\nu$

H — K/U модуль $\longrightarrow$ K/ν-модуль $\rightsquigarrow$ поднимем до K-модуля H^τ

Thm H_1, H_2 имеют изомор. гео $\Longleftrightarrow \exists \tau$: H_1^τ геом. эквив. H_2^τ

$Var(H_1) = Var(H_2) = \Theta$ (это всегда так для классич. AG)

$\Rightarrow \varphi$ — автоморфизм категорий, они все описаны для случаев 1) - 7)

$\Rightarrow$ проблема решена

если этого условия нет — плохо.

$Al_H(W)$, H-модуль $\Rightarrow$

$Hom(W, H)$ — абел. группа

A, B — алг.мн.ва $\rightsquigarrow$ $A + B$ — роль объединения алг.мн.-в.

подгруппы в $Hom(W,H)$ $\rightsquigarrow$ модулярная решетка

будет ли решетка алг. подгрупп подрешеткой? неизвестно