И.Б. Фесенко
26/12/05

Аналитические вопросы в теории ζ-интегралов

классические объекты

$$\zeta_K(s) = \prod (1-q_x^{-s})^{-1}$$

K – глобальное поле q_x – мощность поля вычетов в x

x – точки гладкой кривой

гарм. анализ на локально компактных группах
(на аделях и иделях, асс. с K)

$$\zeta(f,s) = \int_{\mathbb{A}_K^\times} f(x)\,|x|^s\, d\mu_{\mathbb{A}_K^\times}(x) \quad \text{– Tate-Iwasawa}$$

ζ-интеграл

свойства $\zeta_K(s)$ $\mathbb{A}_K^\times = \mathbb{A}_K^1 \times \mathbb{R}^\times$

$$\mathbb{A}_K^1 = K^\times \times \mathbb{A}_K^1/K^\times$$

$$\to \zeta(f,s) = \zeta(s) + \zeta(1-s) + \omega(s)$$

$$\omega(s) = c\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}\right)$$

2мерная ситуация

$\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_q((t))$ – локально компактны

$\mathbb{Q}_p((x))$, $\mathbb{R}((x))$, $\mathbb{C}((x))$ – уже нет

μ д. принимать значения в 2-мерном объекте

$\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}((x))$, где x – инфинитезимально маленький эл-т

измеримое подмн-во

Каждан – Хрушевский   теория моделей

$$GL_2(F)$$

$$F \times F$$

Самый простой объект – эллиптическая кривая

$$E/_K \longrightarrow \mathcal{E}/_B$$

$$\zeta_E(s) = \prod_{x \in \mathcal{E}_0} (1-q_x^{-s})^{-1} \quad \text{– ζ-функция Хассе}$$

$$\zeta(f,s) = \int_{\mathbb{A}_\mathcal{E}^\times} f(x)\,|x|^s\, d\mu_{\mathbb{A}_\mathcal{E}^\times}(x) \in \mathbb{C}((x))$$

для всех центральных функций ∈ ℂ

∫ Фейнмана   ренормализация

Этот $\int$ также был способен

но у $w(s)$ бесконечно много полюсов, потому что

$$\frac{\zeta_K(s)\,\zeta_K(s-1)}{L_E(s)} = \zeta_E(s)$$

бесконечно нулей, и они не сокращаются

Далее: случай $k=0$

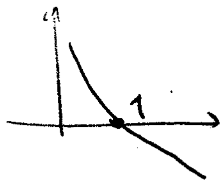
$$w(s) = \int_0^\infty (h(e^{-t}e^{2t})e^{-ts}\,dt$$

преобр. Лапласа

$$h = \int (n^2 f(m_n \gamma) - f(m_n^{-1}\gamma))\,d\gamma$$

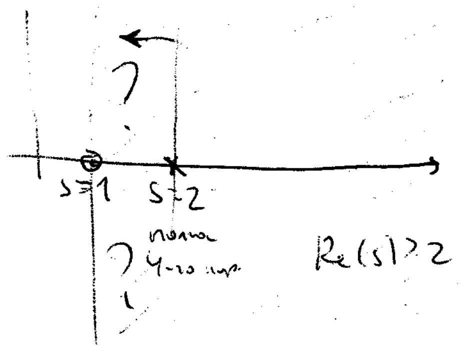
$$h(n^{-1}) = -n^2 h(n) \quad , \; h(1) = 0$$

$h \searrow$



нас интересует только поведение h в 0

$$h(n) \sim c(\log n)^3$$
$$h \to 0$$



$Re(s) > 2$

подправим h, чтобы не было сингулярности в $s=2$

$$\to h(n) - c(\log n)^3 = h_1(n)$$

$$(s-2)^3\left(w(s) - \frac{c_1}{(s-2)^4}\right)$$

$$\int_0^1 e^{-ts} \cdot e^{2t}\left(h(e^{-t}) - ct^3\right)''' dt$$

$$\Theta(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi k^2 x} \qquad x\Theta(x^2) = \Theta(x^{-2})$$

$$W_{a,b}(x) = \left(\Theta\left(\frac{a^2}{x^2}\right) - 1\right)\left(\Theta\left(\frac{b^2}{x^2}\right) - 1\right) - x^2\left(\Theta(a^2x^2) - 1\right)\left(\Theta(b^2x^2) - 1\right)$$

$\to$ p=2

$$Z_m(e^{-t}) = \int_0^\infty W_{a,\frac{m}{a}}(e^{-t})''''\,\frac{da}{a}$$

Нужно:

$$\sum_{m\geq 1} c_m Z_m(x)$$

сохр. знак на каком-то интервале рядом с 0: на $(0,x_0)$

$$c_m = m\sum_{d\mid m} 1$$

$\xi_E(s)$ Wiles

[redacted]

мероморфное прод.
и функц. уравнение

$$l(n) = \frac{h(n) - w(\log n)}{n} \rightsquigarrow l(n^{-1}) = -l(n)$$

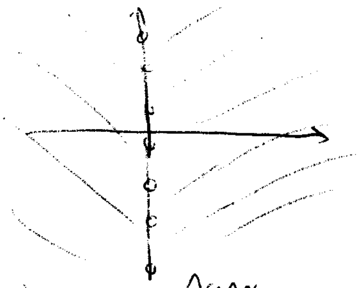
$$l(e^{t}) = -l(e^{-t})$$

д-ть, что $\int_0^\infty l(e^{-t}) e^{-ts}\,dt$ прод. на $\mathbb{C}$ и удовл. ф.у.

преобр. Лапласа-Карлемана

$\mathrm{Re}(s) > 0$ — обычное пр. Лапласа

$\mathrm{Re}(s) < 0$ $= -\int_0^\infty l(e^{t}) e^{-ts}\,dt$



Шварц

периодические в среднем функции

$$f \sim \sum p_i(x) e^{z_i x}$$

многочлены

или

зам. $\overline{f(x+a),\ a\in\mathbb{R}}$ порожд. $\neq C(\mathbb{R})$

$h(e^{-t})$ — период. в среднем $\Longrightarrow$ всё ок.