26.05.200

Конформные алгебры — от конформной теории поля

Алгебра Вейля

$\mathfrak{A}_1 = k\langle p, q \mid qp - pq = 1\rangle$ $\quad \operatorname{char} k = 0$

$\mathfrak{A}_1 \curvearrowright k[x]$ — точное неприводимое представление

$p : f \longmapsto xf$

$q : f \longmapsto f'$

как описать все подалгебры, действующие неприводимо? $S \subseteq \mathfrak{A}_1$

аналогично $S \subseteq M_n(\mathfrak{A}_1) \curvearrowright k[x]^2$ — не решена даже при $n = 1$

Алгебра Лейбница

$(L, [\cdot])$

$[x[yz]] = [[xy]z] + [y[xz]]$ $\qquad L^{alg} = L/\operatorname{Span}\{[xx]\}$

Ассоциативная диалгебра — (аналог обертывающей) (Loday, 1993)

$(A, \vdash, \dashv)$

$(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z$ $\qquad x(yz) = (xy)z$

$x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z)$ $\quad \oplus \quad$
$\begin{array}{cccc} \vdash & \vdash & \vdash & \vdash \\ \dashv & \dashv & \dashv & \dashv \\ \vdash & \dashv & \vdash & \dashv \end{array}$

$A^{(-)} : [xy] = x \vdash y - y \dashv x$ — алг. Лейбница $\longrightarrow$ единицы здесь нет

$Ud(L)$ — унив. обертывающая ассоц. диалгебра

PBW-теорема (Loday, 2001; ...)

$\boxed{Ud(L) \cong U(L^{alg}) \otimes L}$

? L - алг. Лейбница, $\dim L < \infty$; можно ли $L \subseteq A^{(-)}$, $\dim A < \infty$

G — лин. алг. группа $\quad H = k[G]$ — алг. Хопфа $\quad \Delta, S, \varepsilon$

// k - алг. замкнуто

<u>Опр.</u> Конформная алгебра над группой G

— H-модуль C с семейством лин. операций $({}_\gamma\,\cdot) : C \otimes C \longrightarrow C$, $\gamma \in G$

с условиями:

① $\forall a, b \in C \quad x \longmapsto (a_x b)$ полиномиальна — <u>регулярность</u> $\quad G \longrightarrow C$

② $(ha_\gamma b) = h(\gamma^{-1})(a_\gamma b) \qquad L_\gamma h : x \longmapsto h(\gamma x)$

③ $(a_\gamma hb) = (L_\gamma h)(a, b)$

Для $G = \mathbb{A}^1 \cong (k,+)$ – определение Каца (char $k=0$)

конформная алгебра (Kac, 1996)

$G \curvearrowright V$

$A = k[V]$

$\Delta_A : A \longrightarrow H \otimes A$ – двойств. к $G \times V \longrightarrow V$

M – левый A-модуль

$\measuredangle$ $a : G \longrightarrow \operatorname{End}_k M$ как в.п.

① $\forall u \in M$ $x \longmapsto a(x)u$ регулярна

② $a(\gamma)f = (L_\gamma f)a(\gamma)$ $f \in A, \gamma \in G$

$\longrightarrow \operatorname{Cend}^{G,V} M$

$a \in \operatorname{Cend} M$

$h \in H$

$(ha)(\gamma) = h(\gamma^{-1})a(\gamma)$

$(a_\gamma b)(z) = a(\gamma)b(z\gamma^{-1})$

2), 3) вып. всегда

1) выполняется, если либо $\dim A < \infty$

либо M – к/п A-модуль

→ получим конформную алгебру

даже ассоциативную:

$a_\gamma(b_z c) = (a_\gamma b)_{zy} c$

$C \longrightarrow \operatorname{Cend} C$

$a \longmapsto (a_x \cdot)$

[Kac, 1998] $M = M_n$ – свободный n-порожд. H-модуль

$G = V = \mathbb{A}^1$ $H = A = k[T]$

$\operatorname{Cend} M =: \operatorname{Cend}_n$

Задача: описать $C \subseteq \operatorname{Cend}_n$: M_n не имеет нетривиальных H-подмодулей, инвариантных относительно $a(\gamma)$, $a \in C, \gamma \in G$

– неприводимые подалгебры

Гипотеза: Bayallion, Kac, Liberati, 2003

$\mathrm{Cent}_n \cong k[T, v] \otimes M_n(k)$ — H-модуль — понятно

$A, B \in M_n(k[v])$

$A_\gamma B = A(v) B(v+\gamma)$

Если C — неприводимая подалгебра в Cend_n,

то либо $C \sim \mathrm{Cur}_n := k[T] \otimes M_n(k)$

либо $C = \mathrm{Cent}_{n,Q} = (k[T, v] \otimes M_n(k))\, Q(v-T)$,

где $Q \in M_n(k[T])$, $\det Q \neq 0$

теперь — $\boxed{\text{Теорема}}$

конф. алгебра с точным представлением кон. типа

$C \xrightarrow[\subseteq]{\rho} \mathrm{Cend}\, M$, $\mathrm{rank}_H M < \infty$

Cur_n, $\mathrm{Cent}_{n,Q}$ — все простые конф. алг. с точным предст. кон. типа

$\underline{\mathrm{GK}\dim \mathrm{Cend}_n = 1}$

размерность Гельфанда — Кириллов [Retakh, 2000] Alexander

(+) C — простая асс. конф. алгебра, к.п., содержащая $e \in C$ — „единица" $\leftarrow$ $e_x a = \sum \frac{x^n}{n!} a_n$, $a_0 = a$

$\mathrm{GK}\dim C = 1$

Тогда $C \cong \mathrm{Cend}_n$ $\qquad$ $e_x e = \sum \frac{x^n}{n!} a_n$, $a_0 = e$, $a_n = 0, n > 0$

Zelmanov, 2003

$\mathrm{Cend}\, M$ с операциями $\vdash$, $\dashv$:

$(a \vdash b)(\gamma) = a(e)\, b(\gamma)$ $\qquad$ $e \in G$ — единица

$(a \dashv b)(\gamma) = a(\gamma)\, b(e)$

превращается в ассоциативную диалгебру

$A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vec}_k$

Операда $\qquad$ мультикатегория

$\mathcal{C} = \mathrm{Alg}$ — операда бинарных деревьев (мультиморфизмы — термы: лин. комбинации неасс. слов)

$\to A$ — алгебра над полем

$\mathcal{C} = \mathrm{VarAlg}$ $\to$ A — алгебра многообразия Var —

многообр.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Alg} \arrow[r, "A"] \arrow[d] & \mathrm{Vec}_k \\ \mathrm{VarAlg} \arrow[ur, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

$\to A$ — алгебра многообразия Var.

Вместо Veck взять H-mod

$\rightsquigarrow$ конформная алгебра многообразия Var

(Beilinson – Drinfeld, 2004
– псевдоалгебры
(над произв. категорией))

Dialg $\leftarrow$ операда деревьев с маркированными вершинами

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Dialg} \arrow[r, "A"] \arrow[d] & \mathrm{Veck} \\ \mathrm{alg} \otimes \mathcal{E} \arrow[r] & \mathrm{VarAlg} \otimes \mathcal{E} \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

A – диалгебра

$\Rightarrow$ A явл. диалгеброй многообразия Var

$\boxed{\text{Теорема}}$ A — Var-диалгебра $\rightsquigarrow \exists$ C – конф. алгебра многообразия Var (над $G = \mathbb{A}^1$) т.ч. $A \subseteq C^{(0)}$

$a, b \in C$: $(a_* b) = \sum_i h_i \otimes c_i \in H \otimes C$

$(C, \vdash, \dashv)$:

$a \vdash b = \sum \varepsilon(h_i) c_i$

$a \dashv b = \sum S(h_i) c_i$