2.03.2009
А.В. Степанов

Подгруппы между $G(\Phi, R)$ и $G(\Phi, A)$, где R — подкольцо A

на самом деле $E(\Phi, R)$

Стандартный ответ:

$\forall H: E(\Phi,R) \leq H \leq G(\Phi, A)$

$\exists !$ подкольцо P: $R \leq P \leq A$

такое, что

$$E(\Phi, \mathbf{R}) \leq H \leq N(P),$$

где $N(P)$ — нормализатор $E(\Phi, \mathbf{P})$ в $G(\Phi, A)$

① $\Phi = A_l, D_l, E_l$

② $\Phi = B_l, C_l, F_4$

③ $\Phi = G_2$ — мы не рассматриваем.

В ② $2 \in R^*$ => стандартный ответ

$2 = 0$ — гипотеза: станд. ответ верен

$2 \in A^* \setminus R^*$ — гипотеза, что станд. ответ неверен

Книга Титса-74; форменный параметр для $\Phi = F_4$

$A = R[t]$, $\Phi = A_l$ — ответ нестандартный

~~Def~~ Если $\exists$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \\ F \arrow[r] & F[t] & \end{tikzcd}$$

, где F — поле,

то $R \leq A$ называется <u>квази-трансцендентным</u>;

иначе — <u>квази-алгебраическим</u>

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть R — конечнопорожденная алгебра над $\mathbb{Z}$ или над полем, A — область целостности.

A — квази-алгебраично над $R \Leftrightarrow$

$\dim R \leq 1$ и $A \subseteq$ алг. замыкание поля частных R

или A целое над R.

$\boxed{\text{Гипотеза}}$ $\Phi = A_\ell, D_\ell, E_\ell$

Расположение подгрупп стандартно

$\Leftrightarrow$ $R \leq A$ квази-алгебраическое

„$\Rightarrow$" доказано.

$\boxed{\text{Теорема}}$ Все поля вычетов кольца R бесконечны, A — целое расширение R $\Rightarrow$ расположение стандартно

$\boxed{\text{Лемма}}$ Если т. верна для всех локализаций,
(т.е. для всех пар $R_{\mathfrak{m}} \subseteq (R \setminus \mathfrak{m})^{-1} A$),

$(R \setminus \mathfrak{m})^{-1} A \cong R_{\mathfrak{m}} \otimes_R A$

то т. верна
и для пары $R \leq A$.

$\boxed{\text{Лемма}}$ A — полулокальное, R — любое подкольцо A.

$\Rightarrow \forall\, a \in G(\Phi, A)\ \exists\, b \in G(\Phi, R)$

т.ч. $ab = b_1 w_0 b_2$, $b_1, b_2 \in B(\Phi, A)$,

w_0 — самый длинный элемент группы Вейля

γ — макс. корень

$$x_\gamma(1)^{w_0} = x_{-\gamma}(\xi)$$

Потом хочется, чтобы $b_1, b_2 \in U(\Phi, A)$

и ξ — целое над R, не леж. в R. Пусть это так. Тогда:

Берем $x_\gamma(R)^{b_1 w_0 b_2} = x_{-\gamma}(R\xi)^{b_2}$

и есть $x_\gamma(R)^{b_2} = x_\gamma(R)$

Лемма Диксона:

$$\langle x_{-\gamma}(R\xi), x_\gamma(R)\rangle = \langle x_{-\gamma}(R[\xi]), x_\gamma(R[\xi])\rangle \overset{[P]}{\cong} SL_2(R[\xi])$$