26.10.2009

Конечные простые группы и модулярные формы

Г.В. Воскресенская

Frame-Shape Correspondence

Φ – точное представление $G \longrightarrow GL(V)$, $24 \mid \dim V$ такое, что

хар. многочлен $P_g(x) = \prod_{j=1}^{s} (x^{a_j} - 1)^{t_j}$ $\quad a_j, t_j \in \mathbb{N}$

$24 \mid \sum_{j=1}^{s} a_j t_j$

char $k = 0$ (как правило, $k = \mathbb{C}$)

$\forall g \in G$

$g \longrightarrow \eta_{g,\Phi}(z) = \eta_g(z) = \prod$

① Общие понятия

② Классификация групп, кот. соответствуют η-произведениям с мультипл. коэффициентами ($M\eta P$-гр.)

③ Однозначное определение группы наборами η-произведений (мод. ген. кода)

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n$$

и $a(mn) = a(m)a(n)$ при $(m,n) = 1$

$$f(z) = \prod_{j=1}^{s} \eta^{b_j}(a_j z) \qquad a(1) = 1$$

→ нужно рассматривать те, у которых $\sum a_j b_j = 24$

список таких $f(z)$

$$\eta^{24}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

ф. Рамануджана

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i z}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Если $f(z) \in S_k(N, \chi)$

пр-во параболических форм веса k уровня N с характером

и ① все нули $f(z)$ находятся в параболических вершинах ($\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$)

② $\operatorname{ord}_s f = 1$

Тогда $f(z)$ есть мультипликативное η-произведение

Теорема

Если g - такой эл-т G, что

$\eta_{g,\Phi}(z)$ — мулот. η-произв.,

то $\eta_{h,\Phi}(z)$ также будет МуР, где $h = g^e$

Определение МуР-группа — такая конечная группа G, что существует точное представление

$$\Phi : G \longrightarrow GL(V), \quad \dim(V) = 24,$$

что $\eta_{g,\Phi}(z)$ — мулот. η-произведение $\forall g \in G$

Открытая проблема — полностью описать все МуР-группы

① Описаны макс. абелевы МуР-группы

② $\langle a, b : a^m = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^u \rangle$ — метациклические

$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$

③ Все группы порядка 24 являются МуР-гр.

④ Группы порядков 16, 32

⑤ $G \subset SL(5, \mathbb{C})$, Φ — присоединенное

⑥ S_5, S_6 — МуР-группы

$\boxed{\text{Теорема}}$ Конечная простая группа G является МуР-группой $\Leftrightarrow G \subseteq M_{24}$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Все МуР-группы нечетного порядка являются подгруппами в след. группах:

① $G_1 \cong \langle a, b, c : a^3 = b^3 = c^3 = e, ab = bac, ca = ac, cb = bc \rangle$

$|G_1| = 27$

② $G_2 \cong \langle a, b : a^{21} = b^3 = e, b^{-1}ab = a^4 \rangle$

③ $G_3 \cong \langle a, b : a^{23} = b^{11} = e, b^{-1}ab = a^{12} \rangle$, $|G_3| = 23 \cdot 11$

④ $G_4 \cong \langle a, b : a^{11} = b^5 = e, b^{-1}ab = a^5 \rangle$

⑤ $G_5 \cong \mathbb{Z}_9$

⑥ $G_6 \cong \mathbb{Z}_{15}$

Д-во

По лемме выбираем из Атласа группы, у кот. порядки подходят (они опр. из списка форм), и нет подгрупп, запрещенных леммой

Остаются:

$\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{23}$,

$A_5, A_6, A_7, A_8, L_2(7), L_2(11), L_2(23)$,

$L_3(4), M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$

$\underline{L_2(8)}, \underline{U_3(3)}$ — исключены

$$|L_2(8)| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

	1A	2A	3A	7A	7B	7C	9A	9B	9C
χ_2	7	−1	−2	0	0	0	1	1	1

φ — искомое представление

$\operatorname{ord}(g) = 9 \rightsquigarrow g \longmapsto \eta^3(9z), \eta^3(3z)$

$\chi_\varphi(g) = 0$

$g^3, g^6 \longrightarrow \eta^6(3z), \eta^6(z) \qquad \chi_\varphi(g^3) = \chi_\varphi(g^6) = 6$

Элементы порядка 2 могут отвечать

$\eta^{12}(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z)$

$\langle \chi_\varphi, \chi_2 \rangle \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$|2A| = 63, \ |3A| = 56$,

$|7A| = |7B| = |7C| = 72$

$\chi_\varphi(g) = t, \ \operatorname{ord}(g) = 2$

$\langle \chi_\varphi, \chi_2 \rangle = \frac{1}{3} - \frac{t}{8} - 2$ — не целое

$\rightarrow \varphi$ не существует

Одно допустимое представление:

$\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{23}, M_{24}, M_{22}, M_{12}, L_2(23), A_7, A_8$

Два допустимых представления:

$L_2(11), M_{11}, L_3(4), \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$

Три допустимых: $L_2(7)$ Четыре: A_5

$L_2(7) = L_3(2)$

$|L_2(7)| = 168$

	1A	2A	3A	4A	7A	7B
		21	56	42	24	24
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	1	b_7	$\overline{b_7}$
χ_3	3	-1	0	1	$\overline{b_7}$	b_7
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	1	-1	0	0
χ_6	8	0	-1	0	1	1

$b_7 = \zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4$

Эл-ты порядка 7 соотв. $\eta^3(7z)\eta^3(z)$

порядка 4:

$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, η^6([illegible]), $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z$

пор. 3. $\eta^6(3z)\eta^6(z)$

порядка 1 $- \eta^{24}(z)$

$\Phi_1 \cong 3T_1 \oplus 3T_5$

$2A \longrightarrow \eta^{12}(2z)$

$3A \longrightarrow \eta^6(3z)\eta^6(z)$

$4A \longrightarrow \eta^6(4z)$

$7A, 7B \longrightarrow \eta^3(7z)\eta^3(z)$

$\Phi_2 \cong T_1 \oplus T_5 \oplus 2T_6$

то же, но

$3A \longrightarrow \eta^8(3z)$

$\Phi_3 \cong 5T_1 \oplus 2T_4 \oplus T_5$

Выбираем $\{f_j(z)\}$ — (G, Φ)-редуцированное множество, если каждая $f_j(z) = \eta_{g_j, \Phi}(z)$, где $\Phi : G \longrightarrow GL(V)$

без повторений

$(S_3, 4T_{reg})$

$\longrightarrow S = \{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z)\}$

Теорема Группы порядка 24 могут быть однозначно определены одним или двумя наборами η-произведений, причем кроме случаев $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$, η-произведение является мультипликативным

$S_3 \times \mathbb{Z}_4$ определяется

$$S_1 = \{\eta^{12}(2z), \eta^{4}(6z), \eta^{8}(3z), \eta^{6}(4z), \eta^{24}(z)$$

$$S_2 = \{\eta^{12}(2z), \eta^{4}(6z), \eta^{8}(3z), \eta^{8}(2z)\eta^{8}(z), \eta^{6}(4z), \eta^{24}(z)\}$$