23.05.2011
В. Васильев

(2,3)-порождение симплектических групп

$\Gamma: z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ $\qquad a,b,c,d \in \mathbb{Z}$

(2,3)-порождена $\qquad ad-bc=1$

$\Gamma \cong C_2 * C_3 \cong PSL_2(\mathbb{Z})$

Миллер (1901): A_n, S_n — (2,3)-пор. $n \geq 3$, кроме $A_3, A_6, A_7, A_8, S_5, S_6, S_8$

Тамбурини (1986): $SL_n(q)$ — (2,3)-порождена при $n \geq 25$

ДиМартино, Васильев (1994, 1996) $SL_n(\mathbb{F}_q)$ — (2,3)-пор. при $n \geq 5$, q — нечетно, $q \neq 9$

. . . : $GL_n(\mathbb{Z}), SL_n(\mathbb{Z})$ — (2,3)-порождены в точности при $n \geq 5$

$Sp_{2n}(R) = \{ g \in GL_{2n}(R) : g^{\tau} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$

Тамбурини, Уилсон, Гавиоли (1994):

R — ком. пор. кольцо, пор. $t_1, \dots, t_d$

t_1 — обратимый эл-т конечного мульт. порядка

$n \geq 12d + 25$

и ① R эвклидово ② R полулокально ③ R — область Хассе глоб. поля

$\rightsquigarrow Sp_{2n}(R)$ — (2,3)-порожден, если $2 \in R^*$

Тамбурини, Санньяни (1994): $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$ — (2,3)-порождена, $n \geq 25$, q — нечетно

Тамбурини, ... (1999): $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$ — гурвицева, $n \geq 371$

$\boxed{T}$ R — комм. кольцо, $s \in R^*$

Пусть R адд. порождается $\{ s^{2k} \mid k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ 2s^{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$\Rightarrow ESp_{2n}(R)$ — (2,3)-пор. при $n \geq 25$

$ESp_{2n}(R)$:

$$E^{(1)}_{i,j}(r) = \begin{cases} I_{2n} + r e_{i,n+j} + r e_{j,n+i}, & 1 \leq i \neq j \leq n \\ I_{2n} + r e_{i,n+i}, & 1 \leq i = j \leq n \end{cases}$$

$$E^{(2)}_{i,j}(r) = \left(E^{(1)}_{i,j}(r) \right)^T$$

$$E^{(3)}_{i,j}(r) = I_{2n} + r e_{i,j} - r e_{n+j,n+i}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

$ESp = Sp$ для комм. эвклидовой области

$\boxed{\Rightarrow}$ ① $Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ — (2,3)-пор. при $n \geq 25$

② $Sp_{2n}(\mathbb{F}_{2^n})$ — (2,3)-пор. при $n \geq 25$

③ $ESp_{2n}(\mathbb{Z}[\varepsilon])$ — // — // — // — // —

$\varepsilon^k = 1$, k — нечетно

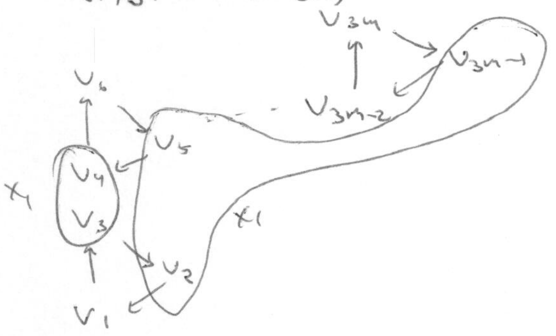
④ $Sp_{2n}(\mathbb{Z}[\omega])$ — // — // — // —

$\omega^3 = 1$

$n = 3m + r \quad m \geq 8$ ч, $1 \leq r \leq 3$

$v_1, \dots, v_n$

$x_1, y_1 \in GL_n(R)$



$x_1|_{\langle v_1, v_2\rangle} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$

$(x_1^T)^{-1}$ $\quad \underset{\substack{\| \\ y_1}}{(y_1^T)^{-1}}$ на нижних

$(x_1^T)^{-1}|_{\langle v_{n+1}, v_{n+2}\rangle} = \begin{pmatrix} -1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x_1^2 = y_1^3 = 1$

$z \in GL_{2n}(R)$

1) z тождеств. везде, кроме $\langle v_{11}, v_{14}, v_{n+11}, v_{n+14}\rangle$

2) $z|_{\langle v_{11}, v_{14}, v_{n+11}, v_{n+14}\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s^{-1} \\ s^{-1} & 0 & -s^{-1} & 0 \\ 0 & -s & 0 & s^{-1} \\ s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\pi : GL_n(R) \hookrightarrow Sp_{2n}(R)$

$g \longmapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & (g^T)^{-1} \end{pmatrix}$

$x := \pi(x_1) z$
$y := \pi(y_1)$ $\quad \to \quad x^2 = y^3 = 1$, $\quad x, y \in ESp_{2n}(R)$

$\gamma = (y^{-1} x y x)^{12}$

① $\exists\, \alpha \in Alt(\Delta)$, $\Delta = \{v_{3m-8}, \dots, v_{3m+r}\}$

$\gamma = \pi(\alpha)$

② $\langle \gamma, \gamma^{y}, \gamma^{y^2} \rangle = \pi(Alt(\Delta))$

③ $\gamma^{\langle x, y\rangle} \geqslant \pi(Alt(\{v_1, \dots, v_n\}))$

$\langle x, y \rangle \ni \pi(h_{1,2}) z \pi(w^{\varepsilon}_{3,4})$

$h_{i,j}|_{\langle v_i, v_j\rangle} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$ $\quad w_{i,j}$ — перест. v_i и v_j $\quad \varepsilon = 0, 1$

$\boxed{T}$ Если R — комм. кольцо, $s \in R^*$, R порождается s $\Rightarrow ESp_{2n}(R)$ — $(2,3)$-пор. при $n \geq 37$

$\boxed{T}$ $Sp_{2n}(\mathbb{Z}[s, s^{-1}])$ — $(2,3)$-пор. при $n \geq 37$

$\boxed{\text{T}}$ $Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ — $(2,3)$-пор. при $n=4$, $n=5$

$Sp_{2n}(\mathbb{Z})$, $n \leq 4$

$\left.\begin{array}{l} Sp_2(\mathbb{Z}) \\ Sp_4(\mathbb{Z}) \end{array}\right\}$ не $(2,3)$-пор.

Гипотеза: $Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ — $(2,3)$-пор. при $n \geq 4$