27.02.2012

К. Пименов

Теорема Пусть R — регулярное локальное кольцо, содержащее поле вычетов k, k — бесконечно

(V, q) — квадр. форма над R

в случае $\mathrm{char}\, k = 2$ q — полурегулярная, то есть

$$q(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = \sum_{i \geq j} a_{ij} x_i x_j$$

и определитель обратим (т.е. квадрика гладкая)

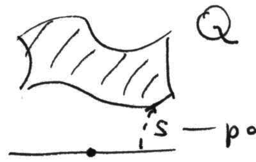
Пусть K — поле частных R

Предположим, что $(V, q) \otimes_R K$ изотропна, т.е. $\exists v \neq 0 : q(v) = 0$

Тогда (V, q) — изотропна, т.е. $\exists v \in V$ $q(v) = 0$

унимодулярный

$Q \subset \mathbb{P}^n_R$ определенная q

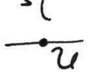


Доказываем в геометрической ситуации:

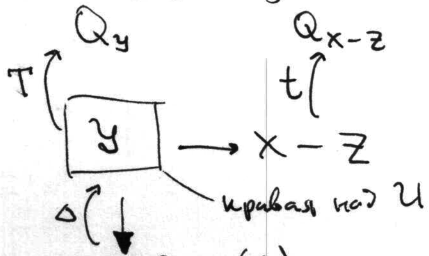
$R = \mathcal{O}_{X,x}$, X — многообразие над k

Panin (2003), $\mathrm{char}\, K = 0$, использует лемму о сдвиге

задача: построить сечение $Q_U \subset \mathbb{P}^n_U$



$\exists$ замкнутое $Z \subset X$:

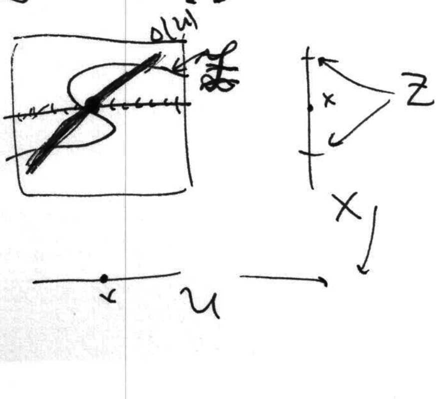


как построить Y?

если бы $\Delta^* Q_Y \cong Q_U$, мы бы перетащили сечение в 2 шага

$\Delta : U \longrightarrow U \times \{x\}$

$Y = U \times X$



Простой случай:
квадрика определена над k

Тогда несложно „сдвинуть" $\Delta(U)$ так, чтобы оно не задевало Z

„Можно считать, что X — кривая"
(впрочем, тогда R — кольцо дискретного норм-я, и теорема проста)

на самом деле

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1_S \\ S & \end{tikzcd}$$ — конечный морфизм

можно взять

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[d, phantom, "\cap"] & & Z \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ \mathcal{Y} = \mathcal{U}\times_S X \arrow[d, shift left] \arrow[rr] & & X \\ \mathcal{U} \arrow[u, shift left, "\Delta"] & & \end{tikzcd}$$

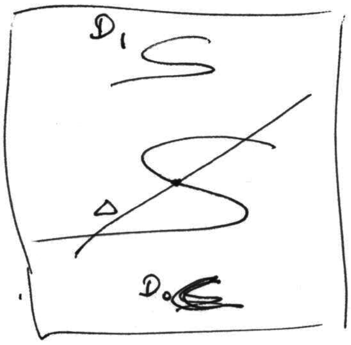
относительная кривая над $\mathcal{U}$

<u>Лемма</u> $\exists$ морфизм $\pi: \mathcal{Y} \to \mathbb{A}^1_S$ такой, что

1) $D_1 = \pi^{-1}(0)$, $\pi^{-1}(1)$ — этальные над $\mathcal{U}$

2) $D_1 = \Delta(\mathcal{U}) \sqcup D_0$

3) $(D_0 \sqcup D_1) \cap \mathcal{Z} = \emptyset$



$D_1 \sim \Delta + D_0$

$\deg_{\mathcal{U}} \pi^{-1}(0) = \deg_{\mathcal{U}} \pi^{-1}(1)$

$\Downarrow$

$\deg_{\mathcal{U}} D_0$ или $\deg_{\mathcal{U}} D_1$ нечетна

$\deg_{\mathcal{U}} \Delta(\mathcal{U}) = 1$

Пусть $D_{\bullet}$ — тот, степень которого нечетна

$$\begin{tikzcd} D_{\bullet} \arrow[r, "\text{неч.}"] \arrow[d, hook] & \mathcal{U} \\ \mathcal{Y} - \mathcal{Z} & \end{tikzcd}$$ — конечный этальный морфизм неч. степени

Как перенести сечение с $D_{\bullet}$ на $\mathcal{U}$?

т. Спрингера (аналог, Panin'03)

$$\begin{tikzcd} Q_{\mathcal{U}} \arrow[d] & Q_{D_{\bullet}} \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathcal{U} & D \arrow[l] \arrow[u, dashed, bend right, "t"'] \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ простой случай закончен

<u>Общий случай</u>

$$\begin{tikzcd} D_{\bullet} \arrow[r, hook, "Q^{(u)}_{\mathcal{Y}}"] & \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d] & X \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$ $Q^{(x)}_{\mathcal{Y}}$

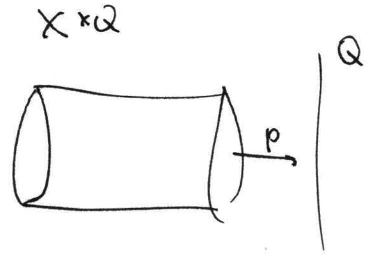
<u>Лемма</u>

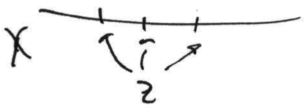
$\exists$ конечный этальный $\widetilde{\mathcal{Y}} \to \mathcal{Y}$ такой, что

① $Q^{(u)}_{\widetilde{\mathcal{Y}}} \cong Q^{(x)}_{\widetilde{\mathcal{Y}}}$ ③ $\widetilde{\Delta}^* Q^{(u)}_{\widetilde{\mathcal{Y}}} = Q_{\mathcal{U}}$

② $\exists\, \widetilde{\Delta}: \mathcal{U} \xrightarrow{\widetilde{\Delta}} \widetilde{\mathcal{Y}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "\widetilde{\Delta}"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \widetilde{\mathcal{Y}} \arrow[d] \\ & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$





$$\begin{tikzcd}
 & X\times Q \arrow[r, "p"] & Q \\
X-Z \arrow[ur, "s"] \arrow[urr, bend left, "f_s"] \arrow[r, hook] & X \arrow[u, phantom, "x"] & \\
D_0, D_1 \arrow[u] \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[r, bend right, "\pi_0"'] & \mathcal{U} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[uur, dashed, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

— хотим построить

бленция

сечения $X\times Q$ над $X-Z$	$s \longmapsto p\circ s$ $\Gamma_f \longleftarrow\!\shortmid f$	Отобр. $X - Z \longrightarrow Q$

Плохо, если $x \in \overline{Z}$

$D_1|\mathcal{U}$ этально

$D_0|\mathcal{U}$ этально

$\underbrace{deg_{\mathcal{U}} D_1}_{\text{нечетно}} = deg_{\mathcal{U}} D_0 + 1$

$$\begin{tikzcd}
D_1\times Q & & \\
 & X-Z \arrow[r] & Q \arrow[d] \\
D_1 \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "\text{этально неч. степени}"'] & & \mathcal{U} \arrow[u, bend right, "\text{по Шпрингеру}"']
\end{tikzcd}$$