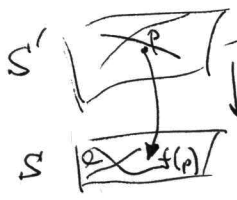
5.03.2012

Теория ветвления в размерности 2

И.Б. Жуков



$\hat{\mathcal{O}}_{f(P),S} \xrightarrow{\simeq} \hat{\mathcal{O}}_{(P,S')} \Leftrightarrow$ неразветвленность в точке P

остальные точки образуют область ветвления

ramification locus — чистая коразмерность 1; ее образ — тоже область ветвления

↓

branch locus

хочется запас инвариантов для этой ситуации

есть теория в размерности 1:

локальные поля (дискр. нормир.) $\rightsquigarrow$ L/K — расширение локальных полей; есть теория ветвления для них

инв. ветвления L/K

$\Downarrow$

$L/M/K$ — инв. ветвления L/M и M/K

$L_1 L_2$

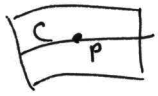
L_1 L_2 $\rightsquigarrow$ L_1L_2/K

K

S — алг. поверхность,

C — дивизор $\rightsquigarrow$ нормирование $v_C : k(S)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow$ $k(S)_{v_C}$ — полное д.н. поле с полем вычетов $k(C)$



$Q(\hat{\mathcal{O}}_{P,S})_{v_C}$ — двумерное локальное поле, его поле вычетов — тоже полное д.н. поле $\widehat{k(C)}_P$

Более общо:

конечный гомоморфизм

$A \longrightarrow B$

полные двумерные локальные кольца

L/K — расширение Артина-Шрайера: $x^p - x = \pi^{-N} + \pi^{-m} t$

сначок ветвления

$(N, p) = 1$

$m < N$

$t \in \mathcal{O}_K$, $t \notin \bar{K}^p$

Возьмем композит таких расширений:

$M + \frac{N_2 - N_1}{p}$ / N_1 — в класс. ситуации

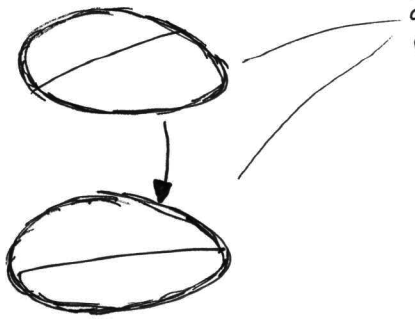
L_1 L_2

N_1 N_2

K

сначки ветвления

в этой ситуации сначки зависят от m

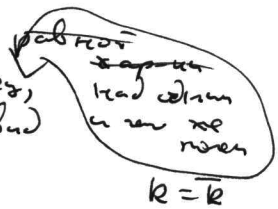


Двумерные локальные кольца (точнее, их спектры)

можно обеспечить, чтобы обл. вложения были гладкими и сост. из одной компоненты

Модельный гомоморфизм:

гомоморфизм двумерных полных регулярных локальных колец, которые при опр. выборе регулярных лок. параметров имеют вид



$h : k[[x,y]] \longrightarrow k[[t,u]]$ такой, что

$h(x) = \varepsilon \cdot \alpha(t)$ $\quad \alpha \in T\, k[[T]]$

$h(y) \equiv \delta \cdot \beta(u) \mod t$

$J(h) = \nu \cdot t^m$ $\quad \varepsilon, \delta, \nu \in k[[t,u]]^*$

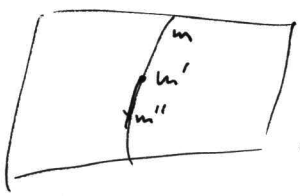
якобиан

Инвариант φ должен обладать следующими свойствами:

$X \xrightarrow{f} \mathbb{N}$

① $\sup\limits_X f < \infty$

② $\forall n \in \mathbb{N}$ $\{x \in X \mid f(x) \le n\}$ — замкнуто



$m' < m$
$m'' < m$
⋮
и доходим до 0

$f_{sep} \cdot f_{ins} \cdot e_t \cdot e_w = [L:K]$

$f_{ins} \cdot e_t \cdot e_w = 1$

$=p$ ~~инсеп.~~ $\quad =p$ ~~дикое~~ свирепое $\quad \neq p$ дикое

В случае не простой степени расширения:

$v(D) = \sum\limits_{g \in G \setminus \{id\}} a_g$ — например, такой инвариант полунепрерывен

$\mathcal{O} = k[[x,y]]/(f)$. Число Милнора $\mu_{\mathcal{O}} = \dim_k k[[x,y]] / \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

δ-инвариант: $\delta = \dim_k \left(\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}\right)$

Пусть A, B – полные двумерные регулярные локальные кольца с алгебр. замкнутым полем вычетов k

конечный k-гомоморфизм $A \xrightarrow{h} B$ наз. несмешанным,

если $h(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$, $h(\mathfrak{m}_A) \not\subset \mathfrak{m}_B^2$

h называется разложимым,

если он раскладывается в композицию несмешанных

r – образующая идеала в B, задающего область ветвления

$\mathcal{O}$ – полное дискретно нормированное кольцо размерности 1.

$\overline{\mathcal{O}}$ – целое замыкание // например, $\mathcal{O} = k[[t^2, t^2]]$, $\overline{\mathcal{O}} = k[[t]]$

$C_{\mathcal{O}} = \{x \in \overline{\mathcal{O}} \mid x \cdot \overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}\}$ = максимальный общ идеал в $\mathcal{O}$ и $\overline{\mathcal{O}}$

\ кондуктор

f – неприводимый элемент A т.ч $h(f)$ неприводимый эл-т B

C_f – кондуктор $A/(f)$

$C_{h(f)}$ – – – – $B/(h(f))$

$K = Q(A/(f))$ $\quad K' = Q(B/(h(f)))$

$D_{h,f}$ – дифферента K'/K

$R_{h,f}$ – образ r в $B/(h(f))$

Тогда

$$C_{h(f)} \cdot \underbrace{C_f^{-1}}_{\text{"1 у регулярных}} = R_{h,f} \cdot D_{h,f}^{-1}$$

Для плоских кривых $v_{K'}(C_{h(f)}) = 2\delta(B/(h(f)))$

$R_{h,f}$ пропорционально индексу пересечения

прообраз пробной кривой f и области ветвления