$\boxed{19.03.2012}$

Н.А. Вавилов

Roozbeh Hazrat
Alexei Stepanov
Nikolai Vavilov
Zhang Zuhong

G, E

GL_n, GU_{2n}, $G(\Phi, -)$] умеем

нечетные унитарные, изотропные редуктивные] хотим

R — кольцо (коммутативное, или квазиконечное — инд. предел почти коммутативных; конеч. как модуль над центром)

$I \trianglelefteq R$

$G(I) = G(R,I)$ $\quad E(I) = E(R,I)$

$GL(n,R,I)$ $\quad E(n,R,I)$

$GU(2n, R, I, \Gamma)$ $\quad EU(2n, I, \Gamma)$

$G(\Phi, R, I)$ $\quad E(\Phi, R, I)$

Немного истории

(1) Bass, 1964:

если $n > sr(R)$, то $[E(n,R), G(n,R,I)] = [G(n,R), E(n,R,I)] = E(n,R,I)$ (и $n > 2$)

или C

$$E(n,R) = \langle t_{ij}(\xi),\ 1 \le i \ne j \le n,\ \xi \in R \rangle$$

$$E(n,R,I) = \langle t_{ij}(\xi),\ 1 \le i \ne j \le n,\ \xi \in I \rangle^{E(n,R)} =$$

$$= \langle \underbrace{{}^{t_{ji}(\zeta)}t_{ij}(\xi)}_{= z_{ij}(\xi,\zeta)},\ 1 \le i \ne j \le n,\ \xi \in I,\ \zeta \in R \rangle$$

Stein, 1972
Васерштейн–Суслин, 1976
Tits, 1976

$${}^{x_{-\alpha}(\zeta)}x_\alpha(\xi) = z_\alpha(\xi,\zeta)$$

$$1 \longrightarrow GL(n,R,I) \longrightarrow GL(n,R) \longrightarrow GL(n,R/I)$$

(2) Bass–Vaserstein, 1969

$[GL(n,R), GL(n,R,I)] = E(n,R,I)$ при тех же n

(3) Mason–Stothers

$[GL(n,R,A), GL(n,R,B)] = [E(n,R,A), E(n,R,B)]$

$[E(n,R,A), C(n,R,B)] =$

$$1 \longrightarrow C(n,R,I) \longrightarrow GL(n,R) \longrightarrow PGL(n,R/I)$$

(4) Суслин, 1976:

$[GL(n,R), E(n,R,I)] = E(n,R,I)$

$[E(n,R), C(n,R,I)] = E(n,R,I)$ ← Васерштейн, Боревич–Вавилов 1980–1982

где R — произвольное коммутативное кольцо

(5) Равны ли $[GL(n,R), GL(n,R,I)]$ и $E(n,R,I)$?

Нет! — ван дер Каллен, Бак

$K_1(n,R,I) = GL(n,R,I)/E(n,R,I)$ — не всегда абелев

(6) $\boxed{\text{Теорема}}$ (2008, 2009, 2010)
SV HZh SV

R — квазиконечное кольцо. Тогда $\forall A, B \trianglelefteq R$

$$[E(n,R,A), GL(n,R,B)] = [E(n,R,A), E(n,R,B)]$$

или C — для коммутативных колец

Задача. Пусть $\delta(R) < \infty$

т.е. $Max(R) = X_1 \cup \ldots \cup X_t$

нетеровы, $\dim \leq d$

$\delta(R[t]) = \delta(R) + 1$ $\forall$ регулярного кольца

Тогда

$$[GL(n,R,I_0), GL(n,R,I_1), \ldots, GL(n,R,I_m)] \text{ при } m \geq \delta(R)$$
$$\parallel$$
$$[E(n,R,I_0), E(n,R,I_1), \ldots, E(n,R,I_m)]$$

где $[H_1, \ldots, H_m] = [\ldots[[H_1,H_2],H_3],\ldots]$

(7) Bak, 1991:

$SK_1(n,R,I)$ нильпотентно, если $\delta(R) < \infty$

K_1 — nilpotent-by-abelian

Hazrat — для унит. групп

Hazrat – Vavilov — для групп Шевалле

$[E, G, \ldots, G] = [E, E, \ldots, E]$ $A, B, C \trianglelefteq R$

$$[[E(n,R,A), GL(n,R,B)], GL(n,R,C)] \overset{?}{=} [[E(n,R,A), E(n,R,B)], E(n,R,C)]$$

$[E(n,R,A), GL(n,R,B)] = [E,E]$, т.е. $[[E,E],G]$

?- HZh, Multiple comm. formulas
Isr. Math. J., 2012

Теорема 1 $n \geq 3$

Образующие $[E(n,R,A), E(n,R,B)]$ как подгруппы:

$z_{ij}(\xi\zeta,\theta)$, $\xi\in A$, $\zeta\in B$, $\theta\in R$ и $z_{ij}(\zeta\xi,\theta)$

$[z_{ij}(\xi,\zeta), z_{ij}(\zeta,\eta)]$

$[z_{ij}(\xi,\theta), z_{ji}(\zeta,\eta)]$

H–?–V–Zh — Multiple commutator formulas for unitary groups

Теорема 2 $n\geq 3$, R — квазиконечно

$$[E(n,R,I_0), GL(n,R,I_1),\dots,GL(n,R,I_m)] =$$
$$= [E(n,R,I_0),E(n,R,I_1),\dots,E(n,R,I_m)]$$

для любой расстановки скобок, одинаковой слева и справа!

Теорема 3

$$[[E_{I_0},\dots,E_{I_k}],[E_{I_{k+1}},\dots,E_{I_m}]]$$
$$\parallel$$
$$[E_{I_0\dots I_k}, E_{I_{k+1}\dots I_m}]$$

НО $[[E_A,E_B],E_C] \neq [E_A,[E_B,E_C]]$

На самом деле

$$E_{AB+BA} \leq [E_A,E_B] \leq [E_A,G_B] \leq [G_A,G_B] \leq G_{AB+BA}$$

= для комм. колец

а все остальные неравенства могут быть разными

Теорема 4 (неизвестна для унитарной группы) — Степанов

$\exists\, Q(R,A,B)$ — мн-во образующих $[E_A,E_B]$ из т 1

$[x,y]$, $x\in E(n,R,A)$, $y\in GL(n,R,B)$ $\exists\, L$ — унив. константа (не зав. от R, A, B)

ширина в $Q(R,A,B)\leq L$

$\boxed{\text{Теорема 5}}$ (только для GL), R — коммутативно, $n\geq\delta(R)$

$$[GL(n,R,I_0), GL(n,R,I_1),\dots,GL(n,R,I_m)]$$
$$\parallel$$
$$[E(n,R,I_0),E(n,R,I_1),\dots,E(n,R,I_m)]$$

база индукции и т. Mason-Stothers

$$S^dL(n,R,I) = \bigcap_{\substack{\varphi:R\to R'\\ \delta(R')\leq d\\ I'=\varphi(I)R'}} \operatorname{Ker}\left(SL(n,R,I)\to SL(n,R',I')/E(n,R',I')\right)$$

superspecial linear group

$$[GL(n,R,A),GL(n,R,B)]$$
$$\parallel$$
$$[S^{n-2}L(n,R,A), S^{n-2}L(n,R,B)]$$

$$S^{\delta(R)}L(n,R,I) = E(n,R,I)$$