

В проилке раз

**Лемма**  $A$  — нерегулярная область целостности,  $B$  — алгебра конечного типа,  
 $M \in B\text{-mod} \rightarrow \exists f \in A, f \neq 0 : M_f$  — свободный  $A_f$ -модуль

**Лемма**  $A$  нерегулярна,  $B$  — алгебра кон. типа,  $M \in B\text{-mod}$   
 $\rho \in \text{Spec}(B)$   $\sigma = \rho \cap A : M_\rho$  — плоский над  $A_\sigma$

Тогда  $\exists g \in AB, g \neq 0$  т.ч.

①  $(M/gM)_g$  — плоский над  $A/g$

②  $\text{Tor}_1^A(M, A/g)_g = 0$

Д-во Применим предыдущую лемму к  $A/g$

$\rightarrow \exists f \in A \setminus g : (M/gM)_f$  — плоский  $A/g$ -модуль

$\rightarrow 0 = \text{Tor}_1^A(M_\rho, A/g) = \text{Tor}_1^A(M, A/g)_\rho$

$\exists h \in B \setminus \rho : \text{Tor}_1^A(M, A/g)_h = 0 \rightsquigarrow g := f \cdot h \quad \square$

**Лемма** В условиях предыдущей Леммы пусть

$\rho' \in \text{Spec } B : \rho' \cap A = g, g \notin \rho' \Rightarrow M_{\rho'}$  — плоский  $A/g$ -модуль.

Д-во  $M_{\rho'}/gM_{\rho'}$  — плоский  $A/g$ -модуль,  $\text{Tor}_1^A(M_{\rho'}, A/g) = 0$

$\rightsquigarrow$  применим лок. критерий к  $A, B_{\rho'}, M_{\rho'}, g \quad \square$

**Теорема**  $f: X \rightarrow Y$  — морфизм локально нерегулярных схем  
 $\mathcal{F}$  — когерентный  $\mathcal{O}_X$ -модуль локально конечного типа

$\Rightarrow U = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \text{ плоский над } \mathcal{O}_{f(x)}\}$  — открыто.

Д-во  $\forall x \in U$  (1)  $\forall x' : x \in \overline{\{x'\}} \Rightarrow x' \in U$   
 нужно проверить (2)  $U \cap \overline{\{x\}}$  — окрестности  $x$  в  $\overline{\{x\}}$

$X = \text{Spec } B, Y = \text{Spec } A \quad M \in B\text{-mod}$

$\rho \in U, \rho \in \overline{\{\rho'\}} \Rightarrow \rho \supset \rho' \Rightarrow \rho' \in U \Rightarrow$  (1)

подберем  $D(g)$ :  $D(g) \cap \overline{\{\rho\}} \subset U \cap \overline{\{\rho\}}$  — нужно взять  $g$  из Леммы  $\Rightarrow$  (2) □ 1

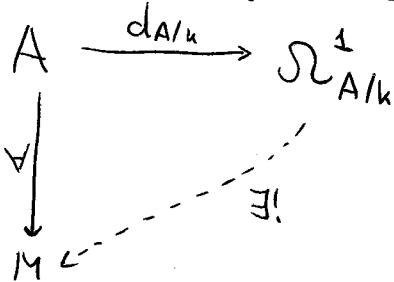
**Определение**  $A$  — алгебра над полем  $k$

$M \in A\text{-mod}$   $\text{Der}_k(A, M) = \left\{ h: A \rightarrow M : \begin{array}{l} h - k\text{-линейно и} \\ h(fg) = f \cdot h(g) + g \cdot h(f) \end{array} \right\}$

**Замечание**  $h: A \rightarrow M$ , удовл. тождеству Лейбница  $\uparrow$   
 $h(f) = 0 \forall f \in k \Leftrightarrow h - k\text{-линейно}$

$\text{Der}_k(A, M)$  — эндоморфизм в  $A\text{-mod}$

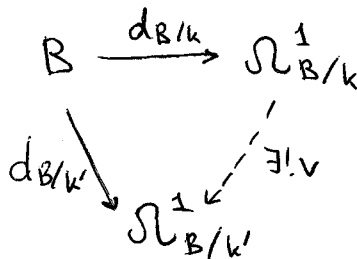
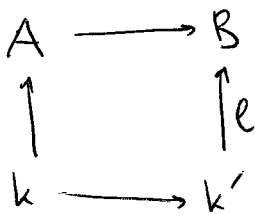
**Опр.** если этот функтор представим, то представляющий его объект называется модулем дифференциалов  $A$  над  $k$



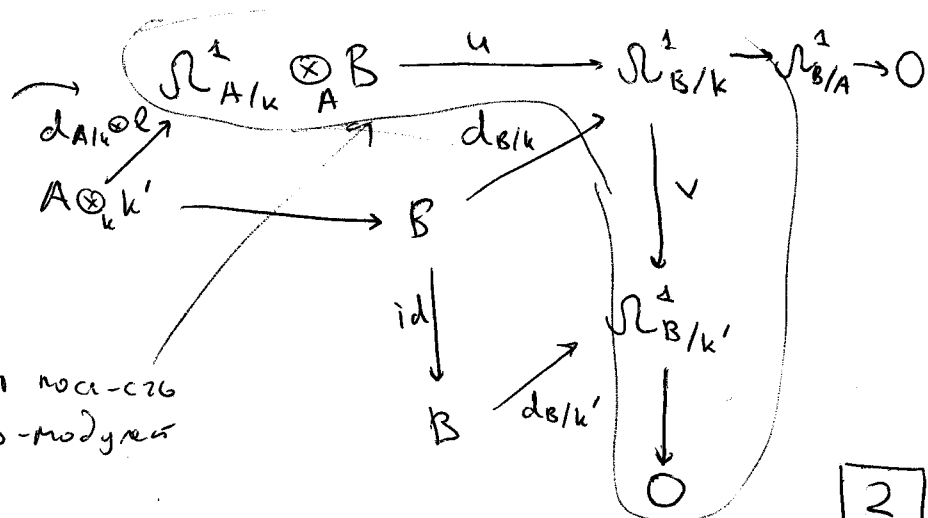
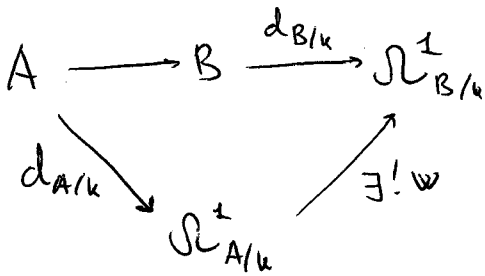
**Пример**  $A = k[\{T_\alpha\}]$ ;  $\Omega^1_{A/k}$  существует и  $\langle dT_\alpha \rangle$  — свободный модуль

$d_{A/k}: A \rightarrow \Omega^1_{A/k}$   
 $p(T) \mapsto \sum_\alpha \frac{\partial p}{\partial T_\alpha} dT_\alpha$

— упражнение



— любое  $k'$ -дифференцирование является и  $k$ -дифференцированием



Утверждение: это точная последовательность  $B$ -модулей

Фиксируем  $M \in B\text{-Mod}$

$\Rightarrow$  есть точная последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Der}_{A/k}(B, M) \longrightarrow \text{Der}_k(B, M) \longrightarrow \text{Der}_{k'}(A, M)$$

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}^1, M) \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{B/k}^1, M) \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{A/k}^1 \otimes_A B, M)$$

**Теорема** Пусть  $B = A/I$ . Тогда  $\exists \Omega_{B/k}^1$  и есть точная последовательность:

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/k}^1 \longrightarrow 0$$

$\searrow \quad \nearrow$   
 $A/I^2$

Доказ

$$0 \longrightarrow \text{Der}_k(B, M) \longrightarrow \text{Der}_k(A, M) \longrightarrow \text{Hom}(I/I^2, M) \text{ — точна}$$

$\nearrow \quad \searrow$   
 $A/I^2 \quad B$

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B \longrightarrow M$$

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B \longrightarrow \text{Coker } \delta \longrightarrow 0$$

применяя  $\text{Hom}(-, M) \rightsquigarrow$  получим, что  $\text{Coker } \delta = \Omega_{B/k}^1$

**Замечание**  $\forall A/k \exists \Omega_{A/k}^1$

**Лемма**

$$A \xrightarrow{d} \Omega_{A/k}^1$$

$k$ -дифференцирование

$$\Omega_{A/k}^1 = \langle d(a) \rangle \rightsquigarrow w \text{ — изоморфизм}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \Omega_{A/k}^1 \\ & \searrow & \uparrow w \\ & & \Omega_{A/k}^1 \end{array}$$

Доказ

$$wd = d_{A/k} \quad w'd_{A/k} = d$$

$w'$  — обратный

$$\rightsquigarrow w'wd = w'd_{A/k} = d$$

$$ww'd_{A/k} = wd = d_{A/k}$$

гиперкасность  $\Omega^1$

$$\rightsquigarrow ww' = id_{\Omega^1}$$

□

Следствие:  $\Omega^1$  порождается элементами вида  $d_{A/k}(a)$

Утверждение  $B_1, B_2$  —  $k$ -алгебры

$$A = B_1 \otimes_k B_2 \rightsquigarrow \Omega_{A/k}^1 = \left( \Omega_{B_1/k}^1 \otimes_{B_1} A \right) \oplus \left( \Omega_{B_2/k}^1 \otimes_{B_2} A \right)$$

Доказ.  $\text{Der}(B_1 \otimes_k B_2, M) = \text{Der}(B_1, M) \oplus \text{Der}(B_2, M)$  □

Утверждение

Пусть  $B$  —  $k$ -алгебра,  $A = B \otimes_k B$

$$\begin{aligned} p: B \otimes B &\longrightarrow B \\ f \otimes g &\longmapsto fg \end{aligned} \quad I := \ker(p)$$

Тогда последовательность

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/k}^1 \longrightarrow 0$$

и, кроме того,  $I/I^2 \cong \Omega_{B/k}^1$  точна

$$\begin{aligned} d(f) &= f \otimes 1 - 1 \otimes f \\ B &\rightarrow I/I^2 \end{aligned}$$

Лемма  $I = \langle 1 \otimes f - f \otimes 1 \rangle$

$$\sum f_i \otimes g_i = \sum (f_i \otimes 1)(1 \otimes g_i - g_i \otimes 1) \quad \sum f_i g_i = 0$$

покажем, что  $0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B$  расщепляется:

$$\begin{array}{ccc} I/I^2 & \xrightarrow{\delta} & \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B \\ \uparrow & & \uparrow \text{pr}_2 \\ B & \xrightarrow{d_{B/k}} & \Omega_{B/k}^1 \end{array}$$

$(\Omega_{B/k}^1 \otimes A) \oplus (\Omega_{B/k}^1 \otimes A)$

проверим, что  $\text{pr}_2 \circ \delta = \text{изоморфизм}$

$$f \in B \xrightarrow{d} f \otimes 1 - 1 \otimes f \xrightarrow{\delta} -d_{B/k}^1 f \oplus d_{B/k}^1 f \xrightarrow{\text{pr}_2} d_{B/k}^1 f$$

→ эта диаграмма коммутативна

Пример  $B = k[T_x] \rightsquigarrow A = B \otimes_k B = k[T_x, U_x]$ ;  $h_x = U_x - T_x$

$$\begin{aligned} I/I^2 &= \langle h_x \rangle; \quad \delta(I/I^2) \longrightarrow \Omega_{B/k}^1 \\ h_x &\longmapsto dT_x \end{aligned}$$

→ для  $p(T)$   $p(T+h) - p(T)$  с точн. до  $I^2 \rightsquigarrow \sum \frac{\partial p}{\partial T_x} h_x$