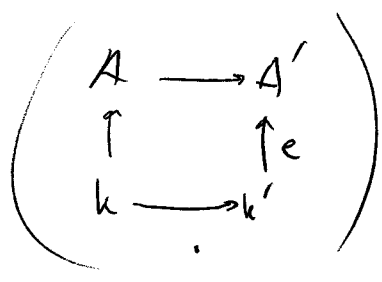


Узв. $A = B_1 \times B_2$
 \swarrow
 k -алгебра

$\Rightarrow \Omega_{A/k}^1 = \Omega_{B_1/k}^1 \oplus \Omega_{B_2/k}^1$

Узв. $A' = A \otimes_k k'$

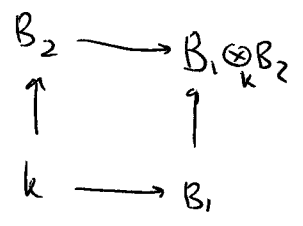


\Downarrow
 $\Omega_{A'/k'}^1 = \Omega_{A/k}^1 \otimes_A A'$

Средство $A = B_1 \otimes_k B_2$

$\rightsquigarrow 0 \longrightarrow \Omega_{B_1/k}^1 \otimes_{B_1} A \longrightarrow \Omega_{A/k}^1 \longrightarrow \Omega_{A/B_1}^1 \longrightarrow 0$
 (точка рассматривается)

Доказ:



$\Omega_{B_1/k}^1 \otimes_{B_1} A \oplus \Omega_{A/B_2}^1 \otimes_{B_2} A$

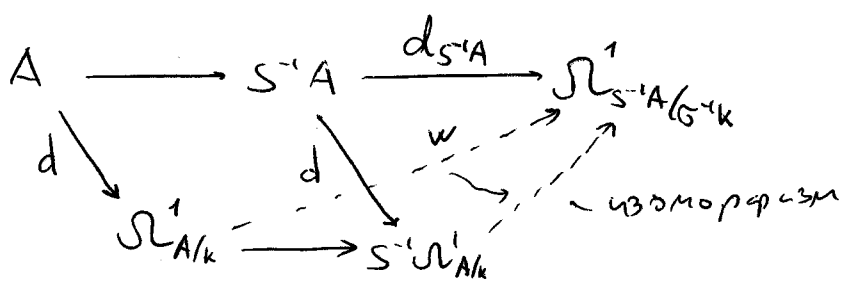
Узв - канонический нулок

Узв. A - k -алгебра, G - групп. схема в k
 S - групп. схема в A $G \subseteq S$

Тогда $\Omega_{S^{-1}A/G^{-1}k}^1 = S^{-1} \Omega_{A/k}^1$

$d\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{sda - ads}{s^2}$

Доказ:



□

$X \longrightarrow S$ - морфизм схем

$(\Omega_{X/S}^1, d_{X/S})$ - квазигермитовый пучок
- дифференциальных форм

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{d_{X/S}} \Omega_{X/S}^1$$

Если X локально конечно типа над S , то $\Omega_{X/S}^1$ - конечно типа

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array} \rightsquigarrow f^* \Omega_{X/S}^1 \longrightarrow \Omega_{X/S}^1 \longrightarrow \Omega_{X/y}^1 \longrightarrow 0$$

$i: X \longrightarrow y$ - вложение, y - совм. пучок идеалов: $y \longrightarrow \mathcal{O}_y \longrightarrow i_* \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$

$$i^*(y/y^2) \xrightarrow{d} i^* \Omega_{y/S}^1 \longrightarrow \Omega_{X/S}^1 \longrightarrow 0$$

y/y^2 называется конормальным пучком

$\Delta_{X/S}: X \longrightarrow X \times_S X$ - замкнутое вложение

$$\rightsquigarrow \Omega_{X/S}^1 = (\Delta_{X/S})_* \left(y_{X/S} / y_{X/S}^2 \right)$$

$$X' = X \times_S S'$$

$$f: X' \longrightarrow X \rightsquigarrow f^* \Omega_{X/S}^1 \cong \Omega_{X'/S'}^1$$

Квазилокальные морфизмы

Опр. X, Y - схемы, $f: X \longrightarrow Y$ - морфизм локально конечно типа
 f называется квазилокальным, если $\forall x \in X$

$\mathcal{O}_{X,x}$ квазилокальная алгебра над $\mathcal{O}_{y, f(x)}$

то есть, $\mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X,x}$ - конечномерное векторное пр-во над $k(y)$

Замечание Конечный морфизм квазилокален

Узв. X, Y, f как выше, $y = f(x) \Rightarrow$ равносильны:

- ① $\mathcal{O}_{X,x}$ квазиконечно над $\mathcal{O}_{Y,y}$
- ② x изолирован в слое, то есть, $\{x\}$ открыто в $f^{-1}(y)$
- ③ а) $\exists r: m_x^r \subset m_y \mathcal{O}_{X,x}$
 б) $k(x)$ - конечное алгебраическое расширение $k(y)$

Д.во: $y \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \quad \text{Spec } A = X$

$f^{-1}(y) = \text{Spec } B \quad B = A / m_y A$

I - ядро локализации $B \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} / m_y \mathcal{O}_{X,x}$; $I = 0$ без непродуманности считаем
 т.е. $B \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x} / m_y \mathcal{O}_{X,x}$

Предположим, что (1) выполнено

Тогда $B \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x} / m_y \mathcal{O}_{X,x}$ - к/н в.п. над $k(y)$

$\rightsquigarrow B$ - к/н в.п. над $k(y) \rightsquigarrow$ это артиново кольцо

\rightsquigarrow его спектр дискретен $\rightsquigarrow \forall$ точка - изолированная \rightsquigarrow (2)

$(m_x / m_y \mathcal{O}_{X,x})^n = 0 \rightsquigarrow$ (3а)

$k(x)$ - фактор этого кольца \rightsquigarrow это тоже к/н в.п. над $k(y) \rightsquigarrow$ (3б)

Предположим, что (2) выполнено.

можно считать, что $f^{-1}(y) = \{x\} \rightsquigarrow B = \mathcal{O}_{X,x}$

и $\mathcal{O}_{X,x} / m_y \mathcal{O}_{X,x}$ имеет один простой идеал \rightsquigarrow по т. Гильберта о нулях \rightsquigarrow (1) \rightsquigarrow (3)
(например, непрерывно $\dim \mathcal{O} \in \mathbb{Z}$ артиновы)
 алг. кон. типа над $k(y)$

(3) \Rightarrow (1): **Лемма** $\mathcal{O} = m_1 \dots m_k \Rightarrow \forall$ простой идеал - один из этих; и A артиново; если A / m_i - алг. кон. типа / к $\Rightarrow A$ - конечномерна.

Узв. X, Y, f как выше, $f(x) = y$

$\mathcal{O}_{X,x}$ квазиконечно над $\mathcal{O}_{Y,y} \Leftrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ - квазиконечно над $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$

До-во: $\overset{=}{\Rightarrow}$ $k(y)^n \rightarrow \mathcal{O}_{x,x} / \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{x,x}$
 $\mathcal{O}_{y,y}^n \rightarrow \mathcal{O}_{x,x}$

∃ $\hat{\varphi}: \hat{\mathcal{O}}_{y,y}^n \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{x,x}$

Лемма

$M / \mathfrak{a}M \xrightarrow{\varphi''} N / \mathfrak{a}'N$ $\mathfrak{a}B \subseteq \mathfrak{a}' \subseteq \text{rad} B$

$A \xrightarrow{\varphi} B$
 $\mathfrak{a} \downarrow \quad \mathfrak{a}' \downarrow$

$M / \mathfrak{a}M \xrightarrow{\varphi'} N / \mathfrak{a}'N$

1) $\hat{\varphi}: \hat{M} \rightarrow \hat{N}$ — сюръективно,
 если β, φ'' — сюръективны

2) $\hat{\varphi}$ — сюръективно $\Rightarrow \beta$ — сюръективно и φ'' — сюръективно

" \Leftarrow " доказывается по (2) а с учетом того, что
 если $\hat{\mathfrak{m}}_x \subseteq \hat{\mathfrak{m}}_y \subseteq \hat{\mathcal{O}}_{x,x}$, то $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathfrak{m}_y \subseteq \mathcal{O}_{x,x}$

Лемма

$A \xrightarrow{f} B$ $\hat{\mathfrak{n}}^r \subseteq \hat{\mathfrak{m}}^1 B \Rightarrow \mathfrak{n}^r \subseteq \mathfrak{m}B$
 $\mathfrak{a} \downarrow \quad \mathfrak{a}' \downarrow$

До-во: $\beta: \mathfrak{n}^r \rightarrow B / \mathfrak{m}B \xrightarrow{\sim} \hat{\beta}: \hat{\mathfrak{n}}^r \rightarrow \hat{B} / \hat{\mathfrak{m}}^1 \hat{B}$ и $\hat{\beta} = 0$

Значит, и $\beta = 0$ (пот. Крулля о пересечении)