

Опр. $f: X \rightarrow Y$ неразветвлен в точке $x \in X$, если $y = f(x)$, ~~если~~

- ① $f_y^{-1}(m_y) \mathcal{O}_{X,x} = m_x$
- ② $k(x) \leftarrow k(y)$ — конечный сепарабельный

Лемма k — поле, K — артинова k -алгебра конечного типа,
 $K \otimes_k \bar{k}$ — приведение $\Rightarrow K$ — конечное произведение
 конечных сепар. расширений

Доказ. $\lambda \in K$

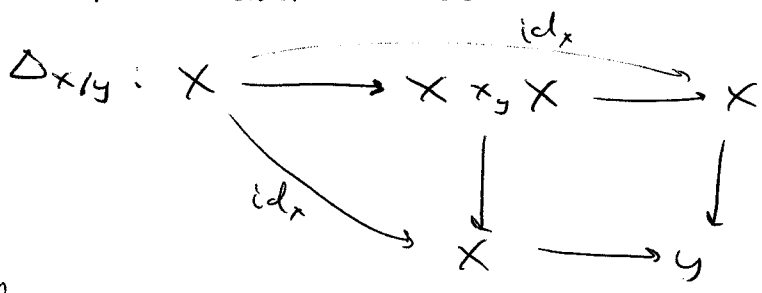
$$k(\lambda) \cong k[T]/f(T) \rightsquigarrow k(\lambda) \otimes \bar{k} \cong \prod \bar{k}[T]/f_i(T)^{n_i}$$

\rightsquigarrow все $n_i = 1$

Предложение $f: X \rightarrow Y$ — локально конечно типа,
 локально негровы схемы,

Тогда равносильны:

- ① $(\Omega_{X/Y}^1)_x = 0$
- ② $\Delta_{X/Y}$ — открытая иммерсия в окрестности x
- ③ f неразветвлен в x



Доказ. (1) \Rightarrow (2):

$$X = \text{Spec}(B), Y = \text{Spec}(k) \quad \begin{matrix} A \\ \parallel \\ B \otimes_k B \end{matrix} \xrightarrow{\quad} B \quad \begin{matrix} A \\ \parallel \\ B \otimes_k B \end{matrix} \xrightarrow{\quad} B$$

$J = \text{Ker}(B \otimes_k B \rightarrow B)$

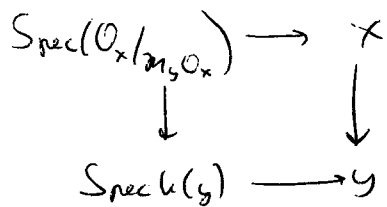
$$0 \rightarrow J/J^2 \rightarrow \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/k}^1 \rightarrow 0$$

↓ локализация в x

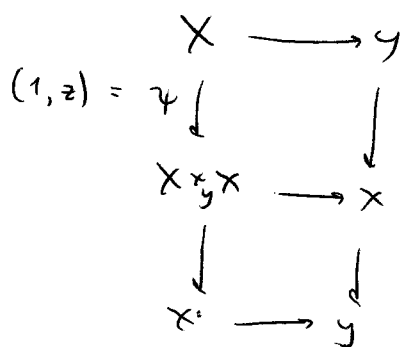
$$\Omega_{B_1 \otimes_k B_2}^1 = \Omega_{B_1/k}^1 \otimes_{B_2} A \oplus \Omega_{B_2/k}^1 \otimes_{B_1} A$$

$$\rightsquigarrow (J/J^2)_x = 0 \rightsquigarrow J_x = 0 \text{ по л. НАКАРАМЫ}$$

(2) \Rightarrow (3):



$$K := \overline{k(y)}$$



$$\psi^{-1}(\Delta) = \{z\}$$

Z открыто и замкнуто
 \downarrow
 это спектр нуклеарного
 аринга кольца

Переходим к окрестности \leadsto м. считать, что это локальное арингово

$$A_i \leftarrow A_i \otimes_k A_i$$

$\leadsto A_i$ - поле K (конечное расширение K)

(3) \Rightarrow (1)

$$\Omega_{A \otimes_B k(y) / k(y)}^1 \cong \Omega_{A/k}^1 \otimes_B k(y)$$

Если $\uparrow = 0$, то и $\Omega_{A/B}^1 \otimes_B O_Y = 0$ (лемма Гауэса)

$$O_{X_x} = (O_{y,y} \otimes_k A)_x \leadsto \Omega_{A/B}^1 \otimes_A O_x = 0$$

$$\Omega_{\text{Spec}(X) / \text{Spec}(Y)}^1 =: \Omega_{L/k}^1 = 0 \quad \leftarrow \text{по предыдущей лемме}$$

Лемма $\Omega_{L/k}^1 = 0$, если L/k - конечное сепаративное

Доказ. $\mathcal{D} : L \rightarrow M, a \in L, f(t)$ - мин. полином a
 $f(a) = 0 \leadsto f'(a) \mathcal{D}(a) = 0 \leadsto \mathcal{D}(a) = 0.$

Предл. 3.5 ① \forall вложение неразветвлено

② Композиция неразветвленных неразветвлено

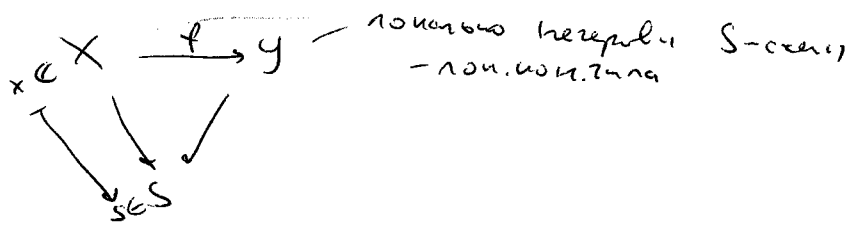
③ Замена базиса

④ Произведение

⑤ $g \circ f$ - неразв. $\Rightarrow f$ - неразв.

⑥ f - неразв. \Rightarrow f_{red} - неразв.

Предл. 3.6



\Rightarrow (1) f непрерывн. в $x \Leftrightarrow f^* \mathcal{O}_{y/S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{x/S}^1$ - связность в x

(2) f непрерывн. в $x \Leftrightarrow f \otimes_S k(s): X \otimes_S k(s) \rightarrow Y \otimes_S k(s)$

Предл. 3.7

Доказ. $f^* \mathcal{O}_{y/S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{x/S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{x/y}^1 \rightarrow 0$ непрерывн. в x

$f: X \rightarrow Y$ - лок. конт. морфизм лок. непрерывных схем

$x \in X, y = f(x)$. Тогда

f непрерывн. в $x \Leftrightarrow \hat{\mathcal{O}}_x / \hat{\mathcal{O}}_y$ непрерывн.

Вслучае $k(x) = k(y)$ или $k(y)$ - а.з. поле,

f непрерывн. в $x \Rightarrow \hat{\mathcal{O}}_y \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_x$ - связность.

Доказ. " \Leftarrow ": $\hat{\mathcal{O}}_x / \hat{\mathcal{O}}_y$ - непрерывн. $\Rightarrow \hat{\mathfrak{m}}_x = \hat{\mathfrak{m}}_y \hat{\mathcal{O}}_x \xrightarrow{(2.5)} \mathfrak{m}_x \subset \mathfrak{m}_y \hat{\mathcal{O}}_x$
 \Downarrow
 $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_y \hat{\mathcal{O}}_x$

\Rightarrow " - лема

Второе: если $k(y)$ - а.з. поле $\Rightarrow k(x) = k(y)$

$\hat{\mathcal{O}}_y \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_x$ - связность