06.08.2013

А. Ананьевский

$\boxed{\text{Th}}$ F — поле $\rightsquigarrow$ последовательность

$$0 \longrightarrow K_n^{MW}(F) \longrightarrow K_n^{MW}(F(t)) \xrightarrow{\sum \partial_p^P} \bigoplus_{\substack{p\text{-неприв.}\\ \text{со ст. коэф. } 1}} K_{n-1}^{MW}(F[t]/p) \to 0$$

точна

Д-во есть ретракция $K_n^{MW}(F(t)) \longrightarrow K_n^{MW}(F)$

Заведем фильтрацию: $\alpha \longmapsto \partial_{(t)}^{t}([t]\cdot\alpha)$

$$K_*^{MW}(F) = L^0 \subset L^1 \subset \ldots \subset L^d \subset \ldots \subset K_*^{MW}(F(t))$$

$$L^d = K_*^{MW}(F[\{[P]\}_{\deg P \leq d}])$$

Тогда $L^d / L^{d-1} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\deg P = d} K_{n-1}^{MW}(F[t]/p)$

Вспомним: $[a/b] = [a] - \boxed{\langle a/b \rangle}^{=\langle ab\rangle}[b]$

$$L_n^d = \begin{cases} \langle [a_1][a_2]\cdot\ldots\cdot[a_n] \mid a_i = \frac{\prod f_i}{\prod g_j}, \deg f_i \leq d, \deg g_i \leq d \rangle & n \geq 1 \\ \langle [b_1]\cdot\ldots\cdot[b_m]\cdot\eta^{n-m} \mid \deg b_i \leq d \rangle & n \geq 1 \\ \langle \langle a \rangle \eta^n, \ a = \frac{\prod f_i}{\prod g_i}, \ \deg f_i \leq d, \ \deg g_i \leq d \rangle & n \geq 1 \end{cases}$$

аддитивные образующие

$\boxed{\text{Лемма}}$ ① $L_n^d = \langle L_n^{d-1}, \{\eta^m [a_1]\cdot\ldots\cdot[a_{n+m}] \mid \deg a_1 = d, \deg a_i \leq d-1 \ i \geq 2\} \rangle$ при $n \geq 1$

② $P \in F[t]$, $\deg P = d > 0$ (ст. коэфф. $= 1$) $G_1, \ldots, G_i \in F[t]$, $\deg G_i \leq d-1$

$G = \prod G_j - QP$ $\deg G \leq d-1$

$\Rightarrow [P]\cdot[G_1 \ldots G_i] = [P]\cdot[G]\cdot$ в $K_2^{MW}(F(t))/L_2^{d-1}$

Док-во ① $f_1, f_2 \in F[t]$, $\deg f_i = d$

$\Rightarrow f_2 = -a \cdot f_1 + g$, $a \in F^*$, $\deg g \le d-1$

- $g = 0 \Rightarrow [f_1][f_2] = [f_1][a(-f_1)] = [f_1]\big([a]+[-f_1] + \eta[a][-f_1]\big) = [f_1]\cdot[a]$

- $g \neq 0 \rightsquigarrow 1 = \dfrac{af_1}{g} + \dfrac{f_2}{g} \rightsquigarrow$

$\left[\dfrac{af_1}{g}\right]\cdot\left[\dfrac{f_2}{g}\right] = 0 \rightsquigarrow [f_1]\cdot[f_2] = \ldots$

② Пусть $i=2$

$G_1G_2 = PQ + G \rightsquigarrow \dfrac{PQ}{G_1G_2} + \dfrac{G}{G_1G_2} = 1 \rightsquigarrow \left[\dfrac{PQ}{G_1G_2}\right]\cdot\left[\dfrac{G}{G_1G_2}\right] = 0$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ [P]\cdot[G] - [P][G_1G_2] + \underbrace{\ldots}_{L^{d-1}}}}{[P]\cdot\left[\dfrac{G}{G_1G_2}\right]} = -\left\langle \dfrac{Q}{G_1G_2} \right\rangle \cdot \left[\dfrac{Q}{G_1G_2}\right]\cdot\left[\dfrac{G}{G_1G_2}\right] \in L^{d-1}$$

$\underline{i \geq 3}$ $\rightsquigarrow$ индукция

$\prod_{j\geq 2} G_j = PQ' + G'$

$G_1G' = PQ + G$

$\rightsquigarrow [P]\cdot[G_1 \cdot \ldots \cdot G_i] = [P][G_1] + [P][G_2\ldots G_i] + \eta[P][G_2\ldots G_i][G_1]$

$= [P][G_1] + [P][G'] + \eta[P][G'][G_1]$

$= [P][G_1G']$

$\square$

Возьмем P с $\deg P = d$

Рассмотрим $K_P \subseteq L^d / L^{d-1}$

$$K_P = \langle \eta^m \cdot [P] \cdot [G_1] \dots [G_m] \mid \deg G_i \leq d-1 \rangle$$

Пусть G: $\deg G \leq d-1$. Рассмотрим

$$K_P \xrightarrow{\varepsilon[G] \cdot -} K_P$$

— эти отображения индуцируют

$$K_*^{MW}(F[t]/p) \longrightarrow \mathrm{Aut}(K_P)$$

Действительно,

① $(\varepsilon[G] \cdot -) \circ (\varepsilon[1-G] \cdot -) = 0$

② $\deg H_1, H_2 \leq d-1$ $\qquad H_1 H_2 = PQ + G$

$$\varepsilon[G] \cdot \eta^m [P][G_1] \dots [G_m]$$
$$= \eta^m [P][H_1 H_2][G_1 \dots G_m]$$
$$= \eta^m [P][H_1][G_1] \dots [G_m] + \eta^m [P][H_2][G_1] \dots [G_m] + \eta^{m+1} [P][H_1][H_2] \cdot [G_1] \dots [G_m]$$

$$K_{*-1}^{MW}(F[t]/p) \longrightarrow K_P$$
$$\alpha \longmapsto \alpha \cdot [P]$$

$$\bigoplus_p K_{*-1}^{MW}(F[t]/p) \underset{\text{Лемма}}{\twoheadrightarrow} L^d / L^{d-1} \xrightarrow{\Sigma \partial^p} \bigoplus K_*^{MW}(F[t]/p)$$

$[u] \in L^{d-1} \rightsquigarrow \partial^p(u) = 0 \rightsquigarrow$ равенство

□

$M_* \cdot \mathcal{F}_k \longrightarrow ab$

D4.1 $\forall F \in \mathcal{F}_k$ $M_*(F)$ — модуль над $\mathbb{Z}[F/(F^*)^2]$:

$$(u, \alpha) \longmapsto \langle u \rangle \alpha$$

D4.2 $\forall F \in \mathcal{F}_k$ $F^* \times M_*(F) \longrightarrow M_{*+1}(F)$

$$(u, \alpha) \longmapsto [u] \cdot \alpha$$

D4.3 $F, v, \pi \rightsquigarrow \partial_v^\pi : M_*(F) \longrightarrow M_{*-1}(k(v))$

Теперь у нас $M_*(F) = K_*^{MW}(F)$

$K_0^{MW}(F) = GW(F) \rightarrow$ эти данные есть

Кроме того, должны выполнятся аксиомы.

B0 $\forall (u, v) \in (F^*)^2$ $\forall \alpha \in M_n(F)$

1. $[uv]\alpha = [u]\alpha + \langle u \rangle [v] \alpha$
2. $[u][v]\alpha = -\langle -1 \rangle [v][u] \alpha$

B1 A – гладкая над K область целостности, $F = Q(A)$

$\rightsquigarrow \forall \alpha \in M_n(F)$ для почти всех $x \in \mathrm{Spec}(A)^{(1)}$

и для всех соотв. π $\partial_x^\pi(\alpha) = 0$

B2 F, v, π 1. $\partial_v^\pi([u]\alpha) = [\bar{u}]\partial_v^\pi(\alpha)$ $u \in \mathcal{O}_v^*$

2. $\partial_v^\pi(\langle u \rangle \alpha) = \langle \bar{u} \rangle \partial_v^\pi(\alpha)$

B3 $\underset{w}{E} \subset \underset{v}{F} \in \mathcal{F}_k \rightsquigarrow \partial_v^\pi(\alpha|_F) = e_\varepsilon \langle \bar{u} \rangle \partial_w^\rho(\alpha)\big|_{k(v)}$

$\rho = u\pi^e$

HA1 $0 \longrightarrow M_*(F) \longrightarrow M_*(F(t)) \longrightarrow \bigoplus_P M_{*-1}(F[t]/_P) \longrightarrow 0$

— к.т.п.

$\boxed{\text{НА2}}$ $\forall \alpha \in M_*(F)$

$$\partial^{t}_{(t)}\left([t]\alpha\big|_{F(t)}\right) = \alpha$$

F, v, π

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^{\pi}_{v}"] & M_*(F[t]) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^{\pi}_{v(t)}"] & \bigoplus_P M_{*-1}(F[t]/P) \arrow[r] \arrow[d, "\sum \partial^{\pi,P}_{Q}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{*-1}(k(v)) \arrow[r] & M_*(k(v)(t)) \arrow[r] & \bigoplus_Q M_{*-2}(k(v)[t]/Q) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{В4}}$ F, v, π $\quad \underset{F[t]}{P} \in (\mathbb{A}^1_F)^{(1)}$, $\underset{k(v)[t]}{Q} \in (\mathbb{A}^1_{k(v)})^{(1)}$

① Если Q не на дивизоре P, то $\partial^{\pi,P}_{Q} = 0$

② Если $Q \in D_P$, и $O_{D_P,Q}$ — дискр. норм.

с униформ. π, то

$$\partial^{\pi,P}_{Q} = -\left\langle -\frac{\overline{P'}}{Q'}\right\rangle \partial^{Q}_{Q}$$

$\boxed{\text{В5}}$ X — локальная, размерности 2 $\quad F = k(X)$

z — з. точка, $y_0 \in X^{(1)}$, $\overline{y_0}$ гладкая

$\pi \in O_{X,y_0}$

$$M_{*-1}(O_{y_0,z}) = \ker\left(M_*(F)/M_*(X) \longrightarrow \bigoplus M_*(F)/M_*(O_{X,y})\right)$$

в $M_{*-1}(k(y_0))$

$\boxed{\text{Th}}$ v, π, F $\quad P \in O_v[t]$ примитивный, неразл.

$Q \in k(v)[t]$ неразл., ст. коэфф. $= 1$

① $Q \notin D_P \rightsquigarrow \partial^{\pi,P}_{Q} = 0$

② $Q \in D_P$, $O_{D_P,Q}$ — дискр. норм., π — униф.

$$\rightsquigarrow \partial^{\pi,P}_{Q} = -\left\langle -\frac{\overline{P'}}{Q'}\right\rangle \partial^{Q}_{(Q)}$$

<u>Док-во</u> Индукция по $\deg P = d$

Замечание: м. считать, что $k(v)$ бесконечно

$\boxed{\text{Лемма}}$ Пусть $\bar P \not\vdots Q$ или $\bar P \vdots Q$ и $O_{D_{P,Q}}$ – dvr с униформ. π

Тогда $$K_*^{MW}(F[t]/_P) = \langle \eta^m [\bar G_1]_{\bmod P} \ldots [\bar G_n]_{\bmod P} \;\Big|\; \begin{array}{l} G_i \in O_v[t] \\ \deg G_i < d \\ G_1 = \pi \text{ или } \\ \bar G_1 \not\vdots Q, \\ \bar G_i \not\vdots Q \end{array} \rangle$$

<u>Д-во:</u> (1) $\bar P \not\vdots Q$. Рассмотрим

$\eta^m [G_1] \ldots [G_n]$; пусть $\bar G_1 \vdots Q$ и $\boxed{G_1 \not\vdots \pi}$

если $G_1 \vdots \pi$, вынесем, соберем все степени π и убьем их кроме одной

$\rightsquigarrow \exists \alpha \in O_v : G_1(\alpha) \in O_v^*$

и $\exists u \in O_v^*, m \in \mathbb{Z} : \; P + u\pi^m G_1 \vdots t - \alpha$

$\rightsquigarrow P + u\pi^m G_1 = (t-\alpha) H_1$ $\qquad H_1 \not\vdots Q$, $t-\alpha \not\vdots Q$

$$\rightsquigarrow \frac{(t-\alpha)H_1}{u\pi^m} = \frac{P}{u\pi^m} + G_1$$

$$\eta^m [P][G_1] \ldots [G_n] = \eta^m [P]\left[\frac{(t-\alpha)H_1}{u\pi^m}\right][G_2] \ldots [G_n]$$

$\uparrow$ в $L^d/_{L^{d-1}} \subset K_*^{MW}(F(t))$

$$\rightsquigarrow \eta^m [G_1] \ldots [G_n] = \eta^m \left[\frac{(t-\alpha)H_1}{u\pi^m}\right][G_2] \ldots [G_n]$$

в $K_*^{MW}(F[t]/_P)$

(2) $\bar P \vdots Q$ $\rightsquigarrow \forall \alpha \in O_{D_{P,Q}} = \left(O_v[t]/_P\right)_Q$

$\alpha = \pi^m \dfrac{\bar R}{\bar S}$ $\qquad R, S \in O_v[t]$, $\bar R, \bar S \not\vdots Q$, $\deg R, S < d$ $\square$

Продолжаем док-во Теоремы

$$\partial_Q^{\pi,P}\left(\eta^m \underset{\mathrm{mod}\,P}{[G_1]} \dots \underset{\mathrm{mod}\,P}{[G_m]}\right)$$

$\exists\, \alpha \in L^{d-1}(K^{MW}_{n-m}(F(t))$ т.ч.

$\alpha + \eta^m [P][G_1]\dots[G_m]$ имеет ровно один вычет, он в точке P, и равен $\eta^m \underset{\mathrm{mod}\,P}{[G_1]} \dots \underset{\mathrm{mod}\,P}{[G_m]}$

$$\rightsquigarrow \partial_Q^{\pi,P}\left(\eta^m [\overline{G}_1]\dots[\overline{G}_m]\right) = \partial^Q_{(Q)} \partial^\pi_v\left(\eta^m [P][G_1]\dots[G_m]\right) + \underbrace{\sum_{i:} \partial_Q^{a,G_i}\left(\partial^{G_i}_{(G_i)}(\alpha)\right)}_{=0}$$

$\overline{G_i} \not\vdots Q$

если же $G_1 = \pi$, то ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ такого слагаемого просто нет

$? \longrightarrow G_1 \neq \pi \rightsquigarrow \partial^\pi_v\left(\eta^m [P][G_1]\dots[G_m]\right) = 0$

$G_1 = \pi \rightsquigarrow \partial^a_v(\dots) = \varepsilon\eta^m [\overline{P}][\overline{G}_2]\dots[\overline{G}_m]$

$\rightsquigarrow \partial^Q_Q = 0$, если $\overline{P} \not\vdots Q$

если же $\overline{P} \vdots Q$ $\rightsquigarrow \partial^a_Q\left(\varepsilon\eta^m [QR][\overline{G}_2]\dots[\overline{G}_m]\right)$

$$= -\langle -\underset{\mathrm{mod}\,Q}{R}\rangle \eta^m [G_2]\dots[G_m]$$

$$\left(R = \frac{P'}{Q'} = \frac{P}{Q}\right) \quad \square$$