Теорема $n>1$; M — сильно $\mathbb{A}^1$-гомотопически инвариантный пучок аб. групп

20.08.2013

Ананьевский

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} \mathbb{G}_m^{\wedge n} \arrow[r] \arrow[d, "\text{морфизм пучков мн-в с отм. точкой}"'] & K_n^{MW} \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\ M & \end{tikzcd}$$

В прошлый раз мы построили

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m^{\wedge n}(F) \arrow[r] \arrow[d] & K_n^{MW}(F) \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\ M(F) & \end{tikzcd}$$

Lemma M — $\mathbb{A}^1$-инв. пучок мн-в с отм. точкой, X — гладкое непр. многообразие, $F=k(X)$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(M(X)\longrightarrow M(F)) = \{*\}$

Lemma X — гладкое непр. мн-в.

$U\subset X$ — плотное открытое

$\Rightarrow L^{\mathbb{A}^1}(X/U)$ 0-связно

$$\begin{tikzcd} H_s(k) \arrow[r, "L^{\mathbb{A}^1}"] & H(k) \\ H_{s,loc}(k) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$H_{s,loc}(k)$ — полная подкатегория из $\mathbb{A}^1$-локальных объектов

$H_{s,loc}(k)\simeq H(k)$

Попробуем вывести первую лемму из второй:

$$M(F)=\lim_{U\subset X} M(U)$$

$U \hookrightarrow X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{H_s(k)}(X/U, M) \to \mathrm{Hom}_{H_s(k)}(X, M) \to \mathrm{Hom}_{H_s(k)}(U, M)$

$\boxed{\text{Lemma}}$ X — симплициально фибрантный пучок

$\to X$ — $\mathbb{A}^1$-локальный $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{H_s(k)}(U \times \mathbb{A}^1, X)$

$$\mathrm{Hom}_{H_s(k)}(U \times \mathbb{A}^1, X) = \mathrm{Hom}_{H_s(k)}(U, X)$$

У нас $\mathrm{Hom}_{H_s(k)}(U, M) = M(U)$, поскольку все дискретно

$\rightsquigarrow$ M — $\mathbb{A}^1$-локальный

$\rightsquigarrow$ он $\mathbb{A}^1$-фибрантный

$\to \mathrm{Hom}_{H(k)}(U, M) = \mathrm{Hom}_{H_s(k)}(U, M)$

$$\to \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{H_s(k)}(X, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{H_s(k)}(U, M) \\ \parallel & & \parallel \\ M(X) & \longrightarrow & M(U) \end{array}$$

т.е. достаточно проверить, что $\mathrm{Hom}_{H_s(k)}(X/U, M) = \{*\}$

$$\mathrm{Hom}_{H_s(k)}(X/U, M) = \mathrm{Hom}_{H(k)}(L^{\mathbb{A}^1}(X/U), M) = \{*\}$$

(где-то тут еще нужно было дорисовать отмеченные точки)

связно по лемме

дискр.

Пусть X — связный пучок симм. мн-в с отм. точкой

$L^{(1)}(X) = \mathrm{cone}(ev_1 : \underline{Hom}_{\cdot}(\mathbb{A}^1, X_f) \longrightarrow X_f)$

$L^{(1)}(X)_f =: L^{(1)}_f(X)$ $\qquad X_f \to L^{(1)}_f(X)$

$L^{(n)}_f(X) := L^{(1)}_f \circ L^{(n-1)}_f(X)$ $\qquad$ ($(-)_f$ - фибрантная замена)

$L^{(n-1)}_f(X) \longrightarrow L^{(n)}_f(X)$

$L^{\mathbb{A}^1}(X) := \varinjlim L^{(n)}_f(X)$

построение $L^{\mathbb{A}^1}$

Д-во леммы про 0-связность $L^{\mathbb{A}^1}(X/U)$:

K — совершенно (для простоты), $V = X \setminus U$

$\emptyset = V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_d = V$

з. вложения

$V_s - V_{s-1}$ — гладкие; $\dim V_s = s$

$* = {X - V_d}/{U} \subset {X - V_{d-1}}/{U} \subset \dots \subset {X - V_{-1}}/{U} = X/U$

$$X - V_s/U \hookrightarrow X - V_{s-1}/U \longrightarrow X - V_{s-1}\Big/\underbrace{X - V_s}_{=(X - V_{s-1}) - (V_s - V_{s-1})}$$

$V_s - V_{s-1}$ — гладко

$\boxed{\text{Lemma}}$ $X \xrightarrow{\text{гл.}} Y$ — з. вложение всюду положительной коразмерности

$\Rightarrow L^{\mathbb{A}^1}(Y/_{Y-X})$ 0-связно

Из этой леммы все уже получится.

Как она доказывается?

$Y/_{Y-X} \simeq Th(N_{Y/X})$ // $Th(E_x) = E/_{E-x}$

// $Th_{top}(E_x) = E/_{E-B_1(x)}$

можно нарезать Y на кусочки так, что норм. расслоения тривиальны

$$Th(X\times \mathbb{A}^N/_X) = X_+ \wedge T^{\wedge N} \qquad T = \mathbb{A}^1/_{\mathbb{G}_m} = Th(\mathbb{A}^1_{pt})$$

$$\| $$

$$X_+ \wedge (S^1_s)^{\wedge N} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge N}$$

0-связно

$\rightsquigarrow Y/_{Y-X}$ 0-связно

$\boxed{\text{Lemma}}$ Если X - 0-связно, то $L^{\mathbb{A}^1}X$ — 0-связно

Возвращаемся к Теореме

$$\begin{tikzcd}
 & K_n^{MW}(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted] & K_n^{MW}(F) \arrow[d, dotted, "\exists!"] \\
\mathbb{G}_m^{\wedge n}(X) \arrow[ur] \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{G}_m^{\wedge n}(F) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & M(X) \arrow[r, hook] & M(F)
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ S-неразветвл.

$\mathcal{E}$ - т.ч. $\mathcal{E}(X) \hookrightarrow \mathcal{E}(F)$

тогда для задания $\mathcal{E} \to S$ достаточно задать

$\mathcal{E}(F) \to S(F)$ и

$\mathcal{E}(\mathcal{O}_{X,x}) \to S(\mathcal{O}_{X,x})$

- x коразмерности 1

+ согласованность

— Морель ссылается на это замечание, которое не по делу

Если $X = \mathcal{O}_v$, то эл-т из $K_n^{MW}(\mathcal{O}_v)$ предст. в виде $[a_1, \dots, a_n]$, $a_i \in \mathcal{O}_v^*$

$\rightsquigarrow$ приходит из $\mathbb{G}_m^{\wedge n}(\mathcal{O}_v)$

Пусть теперь $\alpha \in K_n^{MW}(X) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} K_n^{MW}(\mathcal{O}_{X,x})$

Напишем $\mathbb{Z}(\mathbb{G}_m^{\wedge n})$ вместо $\mathbb{G}_m^{\wedge n} \to$

$\mathbb{Z}(\mathbb{G}_m^{\wedge n})(\mathcal{O}_v) \longrightarrow K_n^{MW}(\mathcal{O}_v)$ для $\mathcal{O}_v$ размерности 1

$\alpha \in K_n^{MW}(\mathcal{O}_{X,x})$

$\to \alpha = \sum [a_1^i, \dots, a_n^i],\ a_j^i \in \mathcal{O}(\boxed{X - \cup \operatorname{div}(a_j^i)})$
$\underset{x}{\Downarrow}$

$\to$ верно для некоторого $\mathcal{U}_x$

откр., сод. x

Все хорошо для $\underset{\underset{\mathcal{U}}{\shortparallel}}{\bigcup \mathcal{U}_x}$ (поскольку это пучок)

но $\mathcal{U} \neq X$: $X - \mathcal{U}$ — коразмерности $\geqslant 2$