

Сильно A' -инвар. пучок групп
является неразветвленным

27.08.2013

а. аманьевский

Лемма X - гладкая схема, $S \subseteq X$ - конечное мн-во точек,
 $Z \subseteq X$, $\text{codim } Z = d > 0$

$\Rightarrow \exists \Omega \subseteq X$, $\Omega \supseteq S$ и $\exists Z' \subseteq \Omega$, $\text{codim } Z' = d-1$

т.ч. $Z_\Omega := Z \cap \Omega \subset Z'$ и морфизм

$\Omega / \Omega - Z' \longrightarrow \Omega / \Omega - Z_\Omega$ тривиален в $H_*(k)$

До: (неформально: $H'_{Z'}(\Omega) \leftarrow H'_{Z_\Omega}(\Omega)$) и считать, что $S \subseteq Z$

т. задается: $\exists \Omega \supseteq S$, $\exists$ эт. $\phi: \Omega \longrightarrow A'_V$, V - откр. в A'_k

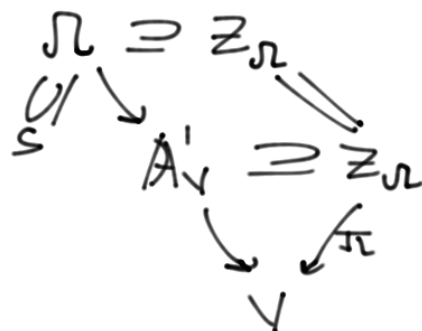
т.ч. $Z_\Omega := Z \cap \Omega \xrightarrow{\text{откр.}} A'_V$ - з. вложение,

$\phi'(Z_\Omega) = Z_\Omega \subset Z_\Omega \xrightarrow{\pi} V$ - конечный

$T := \pi(Z_\Omega)$, $Z' := \phi^{-1}(A'_T)$

Тогда $\dim T = \dim Z \leadsto \text{codim } Z' = d-1$

$\Omega / \Omega - Z_\Omega \cong A'_V / A'_V - Z_\Omega$



$\Omega / \Omega - Z' \longrightarrow \Omega / \Omega - Z_\Omega$

$\left(\begin{array}{ccc} \Omega - Z_\Omega & \longrightarrow & \Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'_V - Z_\Omega & \longrightarrow & A'_V \end{array} \right)$
- экв. квадрат Нисневича

$A'_V / A'_V - T \longrightarrow A'_V / A'_V - Z_\Omega$
 $\uparrow \cong A'$ -изо
 $V / V - T \xrightarrow{S_0} P'_V / P'_V - Z_\Omega$
 $\xrightarrow{S_\infty}$
 $\uparrow$ трив.

□

Пусть G — сильно A' -инвариантный пучок групп,

$$\mathbb{Z} \subseteq X \quad G_{\mathbb{Z}}(X) := \text{Hom}_{H.(k)}(S^1 \Lambda(X/X-\mathbb{Z}), BG)$$

$$H'_2(X, G) := \text{Hom}_{H.(k)}(X/X-\mathbb{Z}, BG)$$

при этом

$$G_X(X) = G(X), \quad H'_X(X, G) = H'_{\text{Nis}}(X, G) \leftarrow \begin{array}{l} \text{здесь важно, что} \\ BG \text{ } A'\text{-локально} \end{array}$$

(в силу двух определений BG)

Следствие $G_{\mathbb{Z}_{\Omega}}(\Omega) \rightarrow G_{\mathbb{Z}'}(\Omega)$ тривиально

$$H'_{\mathbb{Z}_{\Omega}}(\Omega) \rightarrow H'_{\mathbb{Z}'}(\Omega, G) \text{ тривиально}$$

$$X = \text{Spec}(\mathcal{O}_{y,y}), \quad \mathbb{Z} \subseteq X, \quad U = X - \mathbb{Z}$$

$$G_{\mathbb{Z}}(X) \rightarrow G(X) \rightarrow G(U) \rightarrow H'_2(X, G) \rightarrow H'(X, G) \rightarrow H'(U, G)$$

— получается из $U \rightarrow X \rightarrow X/U \rightarrow S^1 \Lambda U \rightarrow S^1 \Lambda X \rightarrow S^1 \Lambda X/U$
тривиально по Следствию для $S = \{y\}$

$$\leadsto 1 \rightarrow G(X) \rightarrow G(U) \rightarrow H'_2(X, G) \rightarrow *$$

$$\leadsto 1 \rightarrow G(X) \rightarrow G(F) \xrightarrow{(F=k(X))} \varinjlim H'_2(X, G) \rightarrow *$$

(после перехода к пределу) $\downarrow ?$ хотим написать:

т.е. осталось показать, что

$$\varinjlim H'_2(X, G) \hookrightarrow \prod_{x \in X^{(n)}} G(F) / G(\mathcal{O}_{X,x})$$

$$\text{Пусть } \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\mathbb{Z}_1} \mathbb{Z}_1 \xrightarrow{\mathbb{Z}_1} X, \text{codim } \mathbb{Z}_i \geq i$$

$$H'_2(X, G) \rightarrow H'_{\mathbb{Z}_1}(X, G) \rightarrow H'_{\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2}(X - \mathbb{Z}_2, G)$$

$$\text{— получается из } X - \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2 \rightarrow X / X - \mathbb{Z}_1 \rightarrow X / X - \mathbb{Z}_2$$

Переходим к пределу:

$$\varinjlim H'_2(X, G) \rightarrow \varinjlim H'_{\mathbb{Z}_1}(X, G) \rightarrow \varinjlim H'_{\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2}(X - \mathbb{Z}_2, G)$$

$$\prod_{x \in X^{(n)}} G(F) / G(\mathcal{O}_{X,x})$$

Определение неразветвленности

$$a) G(\coprod X_\alpha) = \prod G(X_\alpha)$$

$$1) G(X) \rightarrow G(k(X)) \text{ инъективно}$$

$$2) G(X) = \bigcap_{x \in X^{(n)}} G(\mathcal{O}_{X,x})$$

Первое отображение тривиально по следствию для $S = \{y\}$, $Z = Z_2$
 $\leadsto$ ядро второго состоит из отн. точки

Кроме того, $G(F)$ действует на $\varinjlim H_{Z_1, Z_2}^1(X, G)$, $\varinjlim H_{Z_1, Z_2}^1(X - Z_2, G)$
 транзитивно $\leadsto$ там вложение.

Обозначим $X' = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x})$, $x \in X^{(1)}$

$$1 \longrightarrow G(X) \longrightarrow G(F) \longrightarrow \varinjlim H_{Z_1, Z_2}^1(X - Z_2, G) \dashrightarrow G(F)/G(X')$$

$$1 \longrightarrow G(X') \longrightarrow G(F) \longrightarrow \varinjlim H_Z^1(X', G) = H_x^1(X', G)$$

Lemma $\varinjlim H_{Z_1, Z_2}^1(X - Z_2, G) = \prod_{x \in X^{(1)}} H_x^1(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x}), G)$

Док-во:

$Z_1 = (\bigcup S_i) \cup T$, где S_i — неприв. codim = 1, T — codim ≥ 2

$$\leadsto \varinjlim = \varinjlim H_{\bigcup(S_i - Z_2)}^1(X - Z_2, G)$$

Z_2 , S_i — неприв., codim $S_i = 1$ $\varinjlim \prod H_{S_i - Z_2}^1(X - Z_2, G) = \prod H_{S_i}^1(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X, S_i}), G)$ $\square$

Теорема $n \geq 1$, M — сильно A' -инвариантный пучок аделевых групп

$$\begin{array}{ccc} G_n^{\text{an}} & \xrightarrow{\quad} & K_n^{\text{an}} \\ & \searrow & \vdots \\ & & M \end{array} \quad \exists!$$

Теорема M — сильно A' -инв. пучок ад. групп. Тогда

$$\begin{array}{ccc} G_n / G_n^2 & \xrightarrow{\quad} & K_n^{\text{an}} \\ \text{морфизм} & \searrow & \vdots \\ \text{пучков множеств} & & M \end{array} \quad \exists! \text{ морфизм пучков ад. групп}$$

D-во: $\mathbb{G}_m / \mathbb{G}_m^2 \longrightarrow M$

$\mathbb{Z}[\mathbb{G}_m] \longrightarrow M$ + условие

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\mathbb{G}_m^{\wedge 1}) \longrightarrow M$ + условие

$\mathbb{Z} \oplus K_1^{MW} \longrightarrow M$ + условие:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ \mathbb{Z} \oplus K_1^{MW} & \begin{matrix} \nearrow & \searrow \end{matrix} & \mathbb{Z} \oplus K_1^{MW} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1^2 \end{pmatrix} & \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{Z} \oplus K_1^{MW} & \\ & \searrow & \nearrow \\ & M & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & h \cdot [u] & \\ [u] & \xrightarrow{\quad} & [u^2] \\ K_1^{MW} & \xrightarrow{\quad} & K_1^{MW} \\ \text{индуцированное} & & \\ \mathbb{G}_m & \xrightarrow{(-)^2} & \mathbb{G}_m \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{G}_m / \mathbb{G}_m^2 \longrightarrow M \longleftarrow \mathbb{Z} \oplus K_1^W \longrightarrow M$

Lemma $\mathbb{G}_m / \mathbb{G}_m^2 \xrightarrow{u_1} \mathbb{Z} \oplus K_1^W$

$$\begin{array}{ccc} & u_1 \xrightarrow{\quad} 1 + [u] & \\ & \searrow & \\ & K_0^{MW} & \\ & \swarrow & \\ & \langle u \rangle & \end{array}$$

D-во: На полях есть обратная стрелка: $\langle u \rangle \xrightarrow{\psi} 1 + [u]$
(соотношения GW выполняются)

$\leadsto \psi$ задает морфизм неразветвленных пучков, поскольку

$\psi(K_0^{MW}(\mathcal{O}_v)) \subseteq \mathbb{Z} \oplus K_1^W(\mathcal{O}_v)$ и

$K_0^{MW}(\mathcal{O}_v) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus K_1^W(\mathcal{O}_v)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ K_0^{MW}(k(v)) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus K_1^W(k(v)) \end{array}$$

— коммутативная диаграмма

Следствие $K_1^W(F) = I(F)$

Пусть M — пучок абелевых групп

$$0 \longrightarrow M(X) \longrightarrow M(X \times \mathbb{G}_m) \longrightarrow M_{-1}(X) \longrightarrow 0$$

$\alpha \in \mathcal{O}(X)^*$

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \text{ev}_\alpha - \text{ev}_1 \\ & & M(X) \end{array}$$

$$\leadsto \mathbb{G}_m \times M_{-1} \longrightarrow M$$

$$\leadsto \mathbb{G}_m^{\wedge n} \times M_{-n} \longrightarrow M$$

Лемма $n \geq 1$, M — сильно A' -инв. пучок аб. групп

$$\leadsto \psi \text{ индуцирует билинейное спаривание } K_n^{MW} \times M_{-n} \longrightarrow M$$

Док-во: Достаточно для полноты $\leadsto$ после замены базы дост. для K $\square$

$$\alpha \in \mathcal{O}(X)^* \leadsto \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M(X) & \longrightarrow & M(X \times \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & M_{-1}(X) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \alpha^* & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M(X) & \longrightarrow & M(X \times \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & M_{-1}(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\leadsto \mathbb{G}_m \times M_{-1} \longrightarrow M_{-1}$$

Лемма M — сильно A' -инв. $\leadsto$

$$(1) K_0^{MW} \times M_{-1} \longrightarrow M_{-1}$$

$$(2) K_n^{MW} \times M_{-n-1} \longrightarrow M_{-1} \quad K_0^{MW} \text{ — билинейно}$$

$$\text{Док-во: } (1) \quad M^{\mathbb{Z}[\mathbb{G}_m^{\wedge 1}]} = M^{K_1^{MW}} \quad // \quad M^N = \underline{\text{Hom}}(N, M)$$

$\parallel$
 M_{-1} ↑ по Теореме

— $\mathbb{G}_m$ действует на этих объектах через K_0 .

$$n \geq 2 \leadsto K_0^{MW} \curvearrowright M_{-n} \text{ разными способами}$$

— На самом деле, эти действия совпадают

$\square$

Действительно, $M^{\mathbb{Z}}[\frac{1}{\alpha} \alpha^{\wedge n}] = M^{K_n^{\wedge n}}$

$[a_1, \dots, \alpha a_i, \dots, a_n] = \langle \alpha \rangle [a_1, \dots, a_n]$ — не зависит от i

Лемма M — сильно A' -инв. пучок об. групп, F -поле, v -норм.

$$\mu_{1,2} \in \mathfrak{m}_v / \mathfrak{m}_v^2 \left(\sim M_{-1}(k(v)) \xrightarrow{\mu_i} M(F) / M(\mathcal{O}_v) \right)$$

$$\mu_1 = u \mu_2, u \in k(v)$$

$$\Rightarrow M_{-1}(k(v)) \xrightarrow{\cdot \langle u \rangle} M_{-1}(k(v))$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \mu_1 \swarrow & & \searrow \mu_2 \\ & M(F) / M(\mathcal{O}_v) & \end{array}$$