

Geometric vs canonical transfers

А.Ананьевский

M — сильно A^1 -инвариантный пучок ад. групп

„convex“ spectral sequence:

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \underbrace{H_2^{p+q}(X; M)}_{\lim_{U \ni x} H_{\bar{x} \cap U}^q(U; M)} \Rightarrow H^{p+q}(X; M)$$

$$E_1^{*,0} : C^*(X, M)$$

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{y \in X^{(p)}} H_y^p(X; M) \xrightarrow{(\partial_z^y)} \bigoplus_{z \in X^{(p+1)}} H_z^{p+1}(X; M) \longrightarrow \dots$$

$$\text{где } \partial_z^y = 0 \text{ при } z \notin \bar{y}$$

$$z \in \bar{y} \rightsquigarrow X = \text{Spec } \mathcal{O}_{X, z}$$

$$\begin{aligned} H_y^p(X; M) &\longrightarrow H_{\bar{y}-z}^p(X-z; M) \xrightarrow{\partial_z^y} H_z^{p+1}(X; M) \\ &\quad \parallel \\ &\quad H_y^p(X; M) \end{aligned}$$

Lemma $\dim X \leq 2 \rightsquigarrow H^i(C^*(X; M)) = H_{\text{Nis}}^i(X; M)$

Don-Bo $\bigoplus_{x \in X^{(0)}} H_{\text{Nis}}^0(X; M) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H_x^1(X; M) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(2)}} H_x^2(X; M)$

$$\bigoplus_{x \in X^{(1)}} H_x^0(X; M) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(2)}} H_x^1(X; M)$$

$$H_{\bar{x} \cap U}^0(U; M) \rightarrow M(U) \hookrightarrow M(U-\bar{x}) \Rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(2)}} H_x^0(X; M)$$

Кроме того, $M(U) \simeq M(U - \bar{x})$, если $\text{codim } \bar{x} \geq 2$

$$\leadsto H^1(U, M) = H^1(U - x; M)$$

$$\leadsto H_x^1(X, M) = 0$$

$$E_2^{0,0} = M(X), \text{ поскольку}$$

$$M(k(X)) \longrightarrow \bigoplus_{M(k(X))/M(\mathcal{O}_{X,x})} H_x^1(X, M)$$

$$M(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow M(k(X)) \longrightarrow H_x^1(\mathcal{O}_{X,x}; M) \longrightarrow H_{\text{Nis}}^1(\mathcal{O}_{X,x}; M)$$

$$\text{и } M(X) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} M(\mathcal{O}_{X,x})$$

поскольку $H_{\text{Nis}}^1 = H_{\text{Zar}}^1$
для M -сильно A^1 -инв

Lemma $X = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,z})$, $z \in X^{(2)}$, $y \in X^{(1)}$. Тогда

$$0 \rightarrow H_y^1(X; M) \rightarrow H_y^1(X, M) \rightarrow H_z^2(X; M)$$

Доказ. Надо показать, что $H_z^1(X; M) = 0$.

$$H_z^1(X; M) = H^1(T \wedge (y/y-z), M) = H^0(y/y-z; M_{-1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc} X-z / X-\bar{y} & \longrightarrow & X / X-\bar{y} \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ T \wedge (\bar{y}-z)_+ & & T \wedge \bar{y}_+ \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Hom}_{H.(k)}(S^1 \wedge \mathbb{G}_m \wedge (y/y-z), M)} X / X-z \quad (M_{-1})_z(y) = 0$$

$$H^1(X/X-z; M)$$

□

Опр. X — гладкое, E — расслоение над X ,
 $\omega: \det E \simeq L^{\otimes 2}$, L — линейное расслоение
 $\leadsto$ пара (ω, L) — ориентация E

NB! $\dim X = 2$, гладкое, $Y \xrightarrow{i} X$, Y — гл., $\dim Y = 1$
 $y \in Y$ — общая точка $\leadsto$ выбор ω на $\mathcal{O}_i \leadsto \lambda_y^{\otimes 2} \simeq (\gamma_i)_y$

выбор $u \in \lambda_y - \{0\}$, u' — другое

$\downarrow$
 u — нормализ., $\pi_u = \alpha^2 \cdot \pi_{u'}$

$\leadsto$ получили $M_{-1}(k(y)) \xrightarrow{\Theta \pi_u} H_y^1(X; M)$
 $\swarrow \langle \alpha^2 \rangle \quad \searrow \Theta \pi_{u'}$
 $M_{-1}(k(y))$

Лемма $X = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, $z \in X^{(2)}$, $y \in X^{(1)}$, $\bar{y}$ — гладкое
 $i: \bar{y} \hookrightarrow X$, ω — ориентация $\mathcal{O}_i$

$$\begin{array}{ccccccc} \leadsto 0 & \longrightarrow & M_{-1}(\bar{y}) & \longrightarrow & M_{-1}(k(y)) & \longrightarrow & H_z^1(Y; M_{-1}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow H^1(\bar{y}, M_{-1}) \\ & & 0 & \longrightarrow & H_{\bar{y}}^1(X; M) & \longrightarrow & H_y^1(X; M) \xrightarrow{\partial_z^y} H_z^2(X; M) \\ & & & & \downarrow \wr & & \\ & & & & H^1(T \wedge \bar{y}; M) & & \end{array}$$

Лемма $X = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, $z \in X^{(2)}$, $X' \rightarrow X$ — окрестность
 Нисневича точки z
 $y \in X^{(1)}$, $\bar{y}$ — гладкое, $y' = \pi^{-1}(y)$

$$\begin{array}{ccc}
 H^1_{\bar{y}}(X, M) & \xrightarrow{\partial^y_{\bar{z}}} & H^2_{\bar{z}}(X; M) \\
 \downarrow & & \downarrow \wr \\
 H^1_{\bar{y}'}(X', M) & \xrightarrow{\partial^y_{\bar{z}'}} & H^2_{\bar{z}'}(X'; M)
 \end{array}
 \quad \rightsquigarrow \quad \text{Im } \partial^y_{\bar{z}} = \text{Im } \partial^y_{\bar{z}'}$$

Следствие $\text{Im } \partial^y_{\bar{z}}$ не зависит от y

Док-во: X^h - генерализация

$$\begin{array}{ccc}
 H^1_{\bar{y}}(X; M) & \xrightarrow{\partial^y_{\bar{z}}} & H^2_{\bar{z}}(X; M) \\
 \downarrow & & \downarrow \wr \\
 H^1_{\bar{y}^h}(X^h, M) & \xrightarrow{\partial^y_{\bar{z}^h}} & H^2_{\bar{z}^h}(X^h, M)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \bar{y}_0, \bar{y}_1 \subseteq X \\
 \Rightarrow \exists \text{ автоморфизм } X' \\
 \text{т.ч. } \bar{y}_0^h \longrightarrow \bar{y}_1^h
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \exists \text{ окр. Нисневича} & \Omega & \longrightarrow X \\
 & \searrow & \\
 & & A' \times \bar{y}_0
 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow (X^h, \mathbb{Z}) \simeq ((A' \times \bar{y}_0^h)^h, \mathbb{Z})$$

$$\rightsquigarrow ((A' \times \bar{y}_1^h)^h, \mathbb{Z})$$

□

Обозначим $\text{Im } \partial^y_{\bar{z}}$ через $I_{\bar{z}}$

Лемма $\text{Im } \partial^y_{\bar{z}} \subseteq I_{\bar{z}}$, если $\bar{y}$ не обяз. гладкое

Лемма $H^1_{\bar{y}}(X; M) \longrightarrow H^2_{\bar{z}}(X, M)$

Док-во Рассмотрим X^h : $\bigoplus_{y \in X^h(\mathbb{C})} H^1_{\bar{y}}(X^h, M) \twoheadrightarrow H^2_{\bar{z}}(X^h, M)$

$$\rightsquigarrow I_{\bar{z}} = H^2_{\bar{z}}(X^h, M) \rightsquigarrow I_{\bar{z}} = H^2_{\bar{z}}(X, M)$$

□

Следствие $H'_2(y, M_{-1}) \cong H^2_Z(X; M)$

Теорема M — сильно A' -инв., $K/k \leadsto H^2(A_K^2; M) = 0$

Доказ. Рассмотрим $C^*(A_K^2; M)$:

$$A'_{K(x)} \longrightarrow A_K^2 \leadsto N \longrightarrow C^*(A_K^2; M) \longrightarrow C^*(A'_{K(x)}; M)$$

Достаточно показать, что $H^2(N') = 0$

$$N' = \bigoplus_{y \in A'_K} H^1_{y \times A'}(A_K^2; M)$$

↑ точки горизонтальных прямых



N' — прямая сумма ^(по y) комплексов вида

$$0 \longrightarrow H^1_{y \times A'}(A_K^2; M) \longrightarrow \bigoplus_{z \in (y \times A')^{(1)}} H^2_Z(A_K^2; M) \xrightarrow{A'_{K(x)}}$$

$$\left. \vphantom{\bigoplus} \right\} M_{-1}(k(y)(t)) \longrightarrow \bigoplus_{z \in y \times A'} H^1_Z(y \times A'; M_{-1})$$

□

Следствие ① $H^2(P' \times A'; M) = 0$

② $H^2_{(0,0)}(P' \times P'; M) \cong H^2(P' \times P'; M)$

$$H^2(P'/P'_{-2} \wedge T, M_{-1}) \longrightarrow H^2(P^2/P^2_{-2}; M) \longrightarrow H^2(P^2; M)$$

$\dim X = 2$, $y \hookrightarrow X$ — з.чл. $M_{-1}(k(y)) \cong H^1_y(X; M)$

τ — тривиализация $\mathcal{V}_i \leadsto H^1_y(y; M_{-1}) \cong H^2_Z(X; M)$
 трив. $\mathcal{V}_{y/z} \leadsto M_{-2}(k(z))$ $\nearrow$ зав. от выбора базиса в $\mathcal{O}_{X,z}$
 $\phi_{\tau, \mu}$

Theorem

$$\Phi_{\lambda_{11}\tau + \lambda_{12}\mu, \lambda_{21}\tau + \lambda_{22}\mu} = \Phi_{\tau, \mu} \cdot \langle \det \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \rangle$$