Rost-Schmid complex

10.10.2013

А. Ананьевский

$\boxed{\text{Опр.}}$ L – вект. пр-во над F, $\dim_F L = 1$,

$n \geqslant 1$ $\quad M_{-n}(F;L) := M_{-n}(F) \otimes_{\mathbb{Z}[F^\times]} \mathbb{Z}[L^0]$

$L - \{0\}$

$$= M_{-n}(F) \times_{F^\times} L^0$$

(как всегда, M — сильно гомотоп. инв. пучок аб. групп)

$$= M_{-n}(F) \times_{Q(F)} Q(L),$$

где $Q(V)$ = мн-во классов изоморфизма ориентаций;

ориентация: $\det V \simeq \mathcal{L}^{\otimes 2}$

$$Q(F) = F^\times/(F^\times)^2 \; ; \; Q(L) = L^0/(F^\times)^2$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $\quad M_{-n}(F;L) \simeq M_{-n}(F;L^\vee)$

$\boxed{\text{Опр.}}$ X — гладкая, $z \in X^{(n)}$, $T_z(X) = \left(m_z/m_z^2\right)^\vee$

$\rightsquigarrow \Lambda_z^X := \det T_z^X$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $\quad C^n_{RS}(X;M) = \bigoplus_{z \in X^{(n)}} M_{-n}(k(z); \Lambda_z^X)$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $\quad A = \mathcal{O}_{X,z}$

$$0 \longrightarrow m_z/m_z^2 \longrightarrow \Omega_{A/k} \otimes_A k(z) \longrightarrow \Omega_{k(z)/k} \longrightarrow 0$$

$\rightsquigarrow \Lambda_z^X \underset{\text{канонически}}{\cong} \omega_{k(z)/k} \otimes_A \omega_{A/k}^{-1}$, где $\omega = \det \Omega$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $\quad \partial_{RS} : C^{n-1}_{RS}(X;M) \longrightarrow C^n_{RS}(X;M)$

$$\bigoplus_{y \in X^{(n-1)}} M_{-n+1}(k(y), \Lambda_y^X) \xrightarrow{(\partial_z^y)} \bigoplus_{z \in X^{(n)}} M_{-n}(k(z); \Lambda_z^X)$$

$z \notin \bar{y} \rightsquigarrow \partial_z^y = 0$

$\boxed{\text{Lemma}}$ $z \in Y^{(1)}$, $Y = \bar{y}$ — гладкая, N — сильно $\mathbb{A}^1$-инв.

$\rightsquigarrow \exists$ канонич. $\Theta_z : N_{-1}(k(z); \Lambda^y_z) \xrightarrow{\sim} H^1_z(Y; N)$

$$\wr\uparrow \Theta_\mu, \ \mu \in (\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2)^0$$

$$N_{-1}(k(z))$$

<u>Док-во</u> Эта композиция не зависит от μ.

$$H^1_z(Y, N) \cong \mathrm{Hom}_{H_\cdot^{\mathbb{A}^1}}(Y/Y-z, BN) \quad \text{— } \mathbb{A}^1\text{-локальный}$$

$$\wr$$

$$\mathrm{Hom}_{H_\cdot^{\mathbb{A}^1}}(\nu_{Y/z}/\nu_{Y/z} - z, BN)$$

$$\wr \leftarrow \text{не канонич.}$$

$$\mathrm{Hom}_{H_\cdot^{\mathbb{A}^1}}(z_+ \wedge T; BN) \quad \leftarrow S^1_s \wedge \mathbb{G}_m$$

$$\wr$$

$$\mathrm{Hom}_{H_\cdot^{\mathbb{A}^1}}((\mathbb{G}_m, 1) \wedge z_+, N)$$

$$\wr$$

$$N_{-1}(z)$$

$\square$

Определим $\partial^y_z : N(k(y)) \longrightarrow H^1_z(Y, N) \xrightarrow{\sim} N_{-1}(k(z), \Lambda^y_z)$

$(N = M_{-n+1})$ — связывающий гомоморфизм

для $z \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,z}$

Умножаем обе части на Λ^X_y, исп. $\Lambda^y_z \otimes \Lambda^X_y = \Lambda^X_z$

$\rightsquigarrow$ получаем то, что хотели.

Если $Y = \bar{y}$ не гладкая — нужно разрешить особенности.

$X = \operatorname{Spec} A$, $A = \mathcal{O}_{X,z}$ $\qquad A \longrightarrow B$

$Y = \bar{y} = \operatorname{Spec} B$

$$\operatorname{Spec}\widetilde{B} = \widetilde{Y} \longrightarrow Y \text{ — нормализация}$$
$$\begin{array}{cc} \widetilde{Y} & Y \\ \Psi & \Psi \\ z_i & z \end{array} \qquad \widetilde{K}_i = k(z_i)$$

У нас есть $\partial^{y}_{\widetilde{z}_i} : M_{-n+1}(k(y)) \longrightarrow M_{-n}(\widetilde{K}_i, \Lambda^{\widetilde{Y}}_{\widetilde{z}_i})$

$$\Big\downarrow {-}\otimes_{\widetilde{B}^\times}\omega_{\widetilde{B}}\otimes\omega_A^{-1}$$

$$M_{-n+1}(k(y), \Lambda^X_y) \longrightarrow M_{-n}(\widetilde{K}_i, \Lambda_i),$$

где $\Lambda_i = \Lambda^{\widetilde{Y}}_{\widetilde{z}_i} \otimes \omega_{\widetilde{B}} \otimes \omega_A^{-1} \simeq \omega_{\widetilde{K}_i} \otimes \underbrace{\omega^{-1}_{\widetilde{B}} \otimes \omega_{\widetilde{B}}} \otimes \omega_A^{-1}$

$$\simeq \omega_{\widetilde{K}_i} \otimes \omega_A^{-1}$$

Осталось использовать трансферы

$\widetilde{\tau}_i : M_{-n}(\widetilde{K}_i; \Lambda_i) \longrightarrow M_{-n}(k(z); \Lambda^X_z)$

$$\Lambda^X_z \simeq \omega_{k(z)} \otimes \omega_A^{-1}$$

В прошлый раз мы видели

$M_{-n}(\widetilde{K}_i) \longrightarrow M_{-n}(k(z))$ (+тонкости). Закрутим его:

$M_{-n}(\widetilde{K}_i; \omega_{\widetilde{K}_i}) \longrightarrow M_{-n}(k(z); \omega_{k(z)})$

$\rightsquigarrow \partial^y_z := \sum \widetilde{\tau}_i \, \partial^y_{\widetilde{z}_i}$

$\boxed{\text{Замечания}}$ 1) $C^*_{RS}(X; L; M_{-1})$, L/X — лин. расслоение:

$C^n_{RS}(X; L; M_{-1}) := \bigoplus M_{-n-1}(k(z); \Lambda^X_z \otimes L_z)$

2) $C^*_{RS}(X; L; M_{-1}) \simeq C^*_{RS}(X; M_{-1})$,

если задан изоморфизм $L \simeq \mathcal{L}^{\otimes 2}$

3) Если $\dim X \leq 1$, то $C^*_{RS}(X; M) \simeq C^*(X; M)$

комплекс Герстена

Если $\dim X = 2$, то $C^n_{RS}(X; M) \simeq C^n(X; M)$

$\boxed{\text{Lemma}}$ $X' \xrightarrow{f} X$ — гладкий морфизм

$\rightsquigarrow f^*: C^*_{RS}(X;M) \longrightarrow C^*_{RS}(X';M)$

— морфизм квазикомплексов

$\boxed{\text{Опр.}}$ $f: X' \longrightarrow X \rightsquigarrow \nu(f) := \omega_{X'} \otimes f^*\omega_X^{-1}$ — нормальное лин. расслоение

$\nu(f) = \det([f^*\tau_X] - [\tau_{X'}])$

$z' \in X'^{(n)}$, $z = f(z') \in X$; пусть $k(z) \subset k(z')$ — конечное

$f_*: M_{-n}(k(z'); \Lambda^{X'}_{z'} \otimes \nu(f)) \longrightarrow M_{-n}(k(z), \Lambda^X_z)$

$M_{-n}(k(z'); \Lambda^{X'}_{z'} \otimes \nu(f)) \cong M_{-n}(k(z'); \omega_{k(z)} \otimes f^*\omega_X^{-1}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} M_{-n}(k(z), \Lambda^X_z)$, $\Lambda^X_z = \omega_{k(z)} \otimes \omega_X^{-1}$

$\rightsquigarrow f^\nu_*: C^*_{RS}(X'; \nu(f); M) \longrightarrow C^{*-d}_{RS}(X; M_{-d})$, $d = \dim X' - \dim X$

$\boxed{\text{Замечания}}$ 1 Если есть ориентация $\nu(f)$, то

$f_*: C^*_{RS}(X', M) \longrightarrow C^{*-d}_{RS}(X; M_{-d})$

2 Есть f_* для следующих случаев:

a) f — конечный между локальными схемами;

b) $f: \mathbb{P}^1_X \longrightarrow X$, поскольку $\nu(f) = \mathcal{O}(-2)$

$\boxed{\text{Замечание}}$ f^ν_* — морфизм квазикомплексов для з. вложения, для конечного морфизма, для $\mathbb{P}^1_X \longrightarrow X$.

$\boxed{\text{Lemma}}$ X — гладкая, $\dim X = 2$, $z \in X^{(2)}$,

$f: \tilde{X} \longrightarrow X$ — раздутие в z

$\rightsquigarrow f_*: C^*(\tilde{X}; \nu(f); M) \longrightarrow C^*(X; M)$ — морфизм комплексов

комплекс Герстена (?!)

$\boxed{\text{Следствие}}$ 1 $\dim X \le 2 \rightsquigarrow C^*_{RS}(X;M) \xrightarrow{\sim} C^*(X;M)$

2 C^*_{RS} — комплекс

$\boxed{\text{Theorem}}$ ① $C^*_{RS}(X, M)$ квазиизоморфен $C^*_{RS}(\mathbb{A}^1_X; M)$

② $X' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,z}$, $z \in X^{(n)} \rightsquigarrow 0 \to M(X) \to C^0_{RS}(X', M) \to \dots \to C^n_{RS}(X', M) \to 0$

точная посл-сть

③ $H^*(C^*_{RS}(X, M)) \cong H^*_{Zar}(X; M) \cong H^*_{Nis}(X; M)$

④ $C^*_{RS}(X; M) \cong C^*(X; M)$

$\boxed{\text{Theorem}}$ M — сильно $\mathbb{A}^1$-инв. $\Leftrightarrow$ M — строго $\mathbb{A}^1$-инв.

$\boxed{\text{Theorem}}$ $H^n(X, \underline{K}^{MW}_n) \simeq \widetilde{CH}^n(X)$

$\widetilde{CH}^n(X) = H^n(X, I^n \times_{I^n/I^{n+1}} K^M_n)$

$\widetilde{CH}^n(X) = \operatorname{Coker}\left(\bigoplus_{y \in X^{(n-1)}} K^{MW}_1(k(y)) \to \bigoplus_{x \in X^{(n)}} GW(k(x)) \right)$