$\boxed{31.10.2013}$

А. Ананьевский

$\boxed{\text{Теорема}}$ C_* — (-1)-связный комплекс

$\rightsquigarrow L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*)$ — (-1)-связный

<u>„Док-во"</u> $\mathrm{Cone}\left(\underline{Hom}(\widetilde{\mathbb{Z}}(\mathbb{A}^1), C_*) \xrightarrow{ev_1} C_*\right)^f = L^1(C_*)$

$L^{ab}_{\mathbb{A}^1} = \varinjlim L^i(C_*)$

$\uparrow$ (-1)-связен, если C_* (-1)-связен $\square$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\mathcal{X} \in \Delta^{op} ShvNis_\bullet$, $\mathcal{X}$ — $\mathbb{A}^1$-локален

$\rightsquigarrow$ (1) $\mathcal{X}$ слабо n-связно (т.е. $\mathcal{X}(F)$ n-связен $\forall$ поля F)

$\Updownarrow$

(2) $\mathcal{X}$ n-связен

<u>Д-во</u> $(1) \Rightarrow (2)$ Пусть $n=0$

$\mathcal{X}(F)$ связно $\forall F \overset{?}{\rightsquigarrow} \pi_0(\mathcal{X}) = *$

$\Uparrow$

$\pi_0(\mathcal{X})(U) = *$ $\forall$ непривод. гладкого U

достаточно найти Zar-покрыт. $V \longrightarrow U$ т.ч. композиция

$V \longrightarrow U \longrightarrow \pi_0(\mathcal{X})$ тривиальна

$\mathcal{X} \longrightarrow \pi_0 \mathcal{X}$ — эпи

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \rightsquigarrow \bigcup V_\alpha \arrow[urr, dashed] \arrow[r] \arrow[d, equal] & U \arrow[r] & \pi_0 \mathcal{X} \\ V & & \end{tikzcd}$$

$\rightarrow$ достаточно $V \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \pi_0 \mathcal{X}$ для неприводимого V

$$\begin{tikzcd} \varinjlim\limits_{W \subset V} \pi_0(\mathcal{X})(W) = * & & & \rightsquigarrow \exists W \subseteq V \text{ т.ч. } W \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\text{гомот.трив}"'] \arrow[rrr, bend right=50, "*"'] & V \arrow[r] & \mathcal{X} \arrow[r] & \pi_0 \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

$\uparrow$ $\pi_0(\mathcal{X})(k(V))$ $\qquad$ $\uparrow$ откр.

Можно считать, что X фибрантный, и что

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "*"'] & V \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cyl}(W \to V) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \Delta^1 \times V \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & * \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ достаточно проверить, что

$$\begin{tikzcd} V/W \arrow[r] \arrow[rr, bend right, dashed, "*"'] & X \arrow[r] & \pi_0 X \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Lemma}}$ $\underset{\text{откр. непустое}}{W} \subseteq \underset{\text{непр.}}{V} \rightsquigarrow L_{\mathbb{A}^1}(V/W)$ 0-связно

<u>Док-во Леммы</u> $\boxed{A}$ k-совершенно

$Z = V \setminus W \rightsquigarrow \emptyset = Z_{-1} \to Z_0 \to Z_1 \to \dots \to Z_d = Z$

$Z_i \setminus Z_{i-1}$ гладкое, $\dim Z_i = i$

$\rightsquigarrow * = V - Z_d/W \to V - Z_{d-1}/W \to \dots \to V - Z_{-1}/W = V/W$

cofibers: $V - Z_i/W \to V - Z_{i-1}/W \to \underbrace{V - Z_{i-1}/V - Z_i}$

$$\shortparallel$$

$$V - Z_{i-1}/V - \underbrace{(Z_i - Z_{i-1})}_{\text{гладк.}}$$

эквивалентно $\longrightarrow$

$Th(\nu_{Z_i - Z_{i-1}})$

$\shortparallel$

$\bigcup T \wedge \mathcal{U}$

$T \wedge \mathcal{U} = S^1 \wedge \mathbb{G}_m \wedge \mathcal{U}$ $\leftarrow$ 0-связно, поскольку S^1 связно

$\boxed{B}$ k бесконечно

$$V \to \pi_0 L_{\mathbb{A}^1}(V/W) \text{ — эпиморфизм (?!)}$$

Достаточно $\forall x \in V$ найти $\mathcal{U} \ni x$ т.ч.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r] & \pi_0 L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{U}/W\cap\mathcal{U}) = * \arrow[d] \\ & \pi_0 L_{\mathbb{A}^1}(V/W) \end{tikzcd}$$

$Z := V - W$

<u>Габбер:</u> $\exists \underset{x}{\underset{\Psi}{\mathcal{U}}} \subseteq V$ и эт. π: $\mathcal{U} \to \mathbb{A}^1_S$, $S \subseteq \mathbb{A}^{d-1}$ т.ч.
откр.

Z_u конечно над S и

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r] & \mathbb{A}^1_S \\ Z\cap\mathcal{U} = Z_u \arrow[u, hook] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

изоморфизм на образ

$$\rightsquigarrow \mathcal{U}/Z - Z_u \cong \mathbb{A}^1_S / \mathbb{A}^1_S - Z_u$$

Z_u кон. над S $\rightsquigarrow$ $Z_u \hookrightarrow \mathbb{P}^1_S$ не пересекает ∞

$$\rightsquigarrow \mathcal{U}/Z - Z_u \cong \mathbb{P}^1_S / \mathbb{P}^1_S - Z_u$$

$\mathbb{A}^1_S \to \mathbb{P}^1_S / \mathbb{P}^1_S - Z_u$ — эпиморфизм; $L_{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^1_S) = L_{\mathbb{A}^1}(S)$

$$\begin{tikzcd} \rightsquigarrow S \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{A}^1_S \arrow[r] & \pi_0 L_{\mathbb{A}^1}(\mathbb{P}^1_S / \mathbb{P}^1_S - Z_u) \end{tikzcd} \text{ — эпиморфизм}$$

$*$ если $S \to *$

$\square$

$$D_{\mathbb{A}^1}(k) = D(\mathcal{Ab}_{Nis}(k))[\mathbb{A}^1\text{-}qis^{-1}]$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $C_*: \Delta^{op} ShvNis \rightleftarrows Com(\mathcal{Ab}_{Nis}(k)) : K$, $X \in \Delta^{op} ShvNis$

нормализ. комплекс, асс. с $\mathbb{Z}(X)$

$K(M, n) := K(M[n])$

$$\pi_n K E_* = \begin{cases} H_n E_*, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad C_* : H_\bullet^s(k) \rightleftarrows D(ab_{Nis}(k)) : K$$

$$C_* : H_\bullet(k) \rightleftarrows D_{\mathbb{A}^1}(ab_{Nis}(k)) : K^{\mathbb{A}^1}$$

$\boxed{\text{Предл.}}$ E_* 0-связно в $Com_*(ab_{Nis}(k))$

KE_* $\mathbb{A}^1$-локально $\Longleftrightarrow$ E_* $\mathbb{A}^1$-локально

<u>Док-во:</u> несложно $\square$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $(E_*)^{(\mathbb{A}^1)} := \underline{Hom}(\widetilde{\mathbb{Z}}(\mathbb{A}^1), E_*^f)$

$(E_*)^{(\mathbb{A}^1)}_{\geq 0}$ – $\mathbb{A}^1$-стягиваем

$\boxed{\text{Опр.}}$ $U^1_{\mathbb{A}^1}(E_*) = Cone((E_*)^{\mathbb{A}^1}_{\geq 0} \xrightarrow{ev_1} E_*)$

$$E_* \longrightarrow U^1_{\mathbb{A}^1}(E_*) \longrightarrow \cdots \longrightarrow U^\infty_{\mathbb{A}^1}(E_*)$$

$\boxed{\text{Lemma}}$ ① $K(E_*) \longrightarrow K(U^\infty_{\mathbb{A}^1}(E_*))$ — слабая $\mathbb{A}^1$-эк-сть

② если E_* 0-связно, то $K(U^\infty_{\mathbb{A}^1}(E_*))$ 0-связно и $\mathbb{A}^1$-лок.

③ $K(E_*) \longrightarrow K(U^\infty_{\mathbb{A}^1}(E_*)) \cong K(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(E_*))$ – $\mathbb{A}^1$-локализация

$\boxed{\text{Опр.}}$ $X \in \Delta^{op} Shv Nis.$

$$\rightsquigarrow \quad H_n^{\mathbb{A}^1}(X) := H_n(C_*^{\mathbb{A}^1}(X))$$

$$\widetilde{H}_n^{\mathbb{A}^1}(X) := Ker(H_n^{\mathbb{A}^1}(X) \longrightarrow \underbrace{H_n^{\mathbb{A}^1}(pt)}_{\substack{\mathbb{Z},\ \text{если } n=0 \\ 0,\ \text{если } n\neq 0}})$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $\widetilde{H}_n^{\mathbb{A}^1}(X) = H_{n+1}^{\mathbb{A}^1}(S^1 \wedge X)$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $H_n^{\mathbb{A}^1}(X) = 0$ при $n < 0$

строго $\mathbb{A}^1$-инв. при $n \geq 0$

$\boxed{\text{Гипотеза}}$ X квазипроект., гладкое

$\rightsquigarrow H_n^{\mathbb{A}^1}(X) = 0, \quad n > 2\dim X$ // Beilinson-Soulé

X аффинно $\rightsquigarrow H_n^{\mathbb{A}^1}(X) = 0, n > \dim X$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $X \longrightarrow KC_*(X) \rightsquigarrow$ есть <u>гомоморфизм Гуревича</u>

$$\begin{array}{ccc} \pi_n^{\mathbb{A}^1}(X) & \longrightarrow & H_n^{\mathbb{A}^1}(X) \\ \shortparallel & & \\ \pi_n(L_{\mathbb{A}^1}X) & & \end{array}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $X \in \Delta^{op}ShvNis$, $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(X) = *$

$\rightsquigarrow \pi_1^{\mathbb{A}^1}(X) \longrightarrow H_1^{\mathbb{A}^1}(X)$ — универс. гомоморфизм в строго $\mathbb{A}^1$-инв. пучок аб. групп.

<u>Д-во</u> Пусть M — строго $\mathbb{A}^1$-инв $\rightsquigarrow$

$Hom_{ShGrNis}(\pi_1^{\mathbb{A}^1}(X), M) = Hom_{H_\bullet^s}(L_{\mathbb{A}^1}X, BM)$

$= Hom_{H_\bullet(k)}(X, BM) = Hom_{D_{\mathbb{A}^1}}(C_*^{\mathbb{A}^1}(X), M[1])$

$= Hom_{Ab_{Nis}(k)}(H_1^{\mathbb{A}^1}(X), M)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $n \geq 2$, $X \in \Delta^{op}ShvNis$, X — $(n-1)$-$\mathbb{A}^1$-связно

$\rightsquigarrow \tilde{H}_i^{\mathbb{A}^1}(X) = 0, \ i \leq n-1, \ \tilde{H}_n^{\mathbb{A}^1}(X) \xleftarrow{\sim} \pi_n^{\mathbb{A}^1}(X)$

<u>Док-во</u>: аналогично

$\boxed{\text{Теорема}}$ $n > 0$, X — $(n-1)$-связно $\rightsquigarrow L_{\mathbb{A}^1}X$ — $(n-1)$-связно

$\boxed{\text{Опр.}}$ $S \in Shv\,Nis$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1}(S) := H_0^{\mathbb{A}^1}(S)$; $\widetilde{\mathbb{Z}}_{\mathbb{A}^1}(S) = \widetilde{H}_0^{\mathbb{A}^1}(S)$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $n \geq 2$, $S \in Shv\,Nis$.

$$\Rightarrow \pi_n^{\mathbb{A}^1}(S^n \wedge S) \simeq H_n^{\mathbb{A}^1}(S^n \wedge S) \cong \widetilde{\mathbb{Z}}_{\mathbb{A}^1}(S)$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $n \geq 2$

$$\rightsquigarrow \pi_{n-1}^{\mathbb{A}^1}(\underbrace{\mathbb{A}^n - 0}_{\overset{\shortparallel}{S^{n-1} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n}}}) \simeq \pi_n^{\mathbb{A}^1}\Big(\underbrace{\overbrace{(\mathbb{P}^1)^{\wedge n}}^{\overset{S^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n}}{\shortparallel}}}_{\overset{\shortparallel}{\widetilde{H}_n^{\mathbb{A}^1}(S^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n})}}\Big) \simeq \widetilde{\mathbb{Z}}_{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G}_m^{\wedge n}) \cong \underline{K}_n^{MW}$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $n, m, i, j \in \mathbb{N}$

$$Hom_{H_\bullet(k)}(S^m \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge j}, S^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge i}) = \begin{cases} 0, & m < n \\ \underline{K}_{i-j}^{MW} & m = n,\ i > 0 \\ 0, & m = n,\ j > 0,\ i = 0 \\ \mathbb{Z}, & m = n,\ i = j = 0 \end{cases}$$

Кроме того, $\pi_{n+1}^{\mathbb{A}^1}(X) \twoheadrightarrow H_{n+1}^{\mathbb{A}^1}(X)$