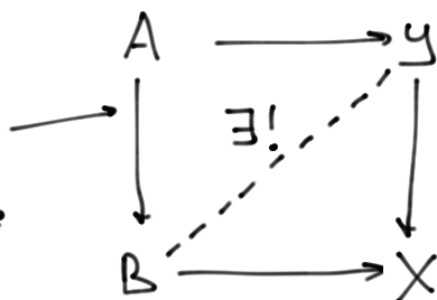


Опр. $Y \longrightarrow X$ — симплициальное накрытие, если

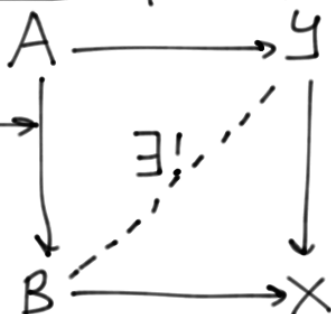
симпл.
трив.
корасслоение



А.Ананьевский
(все в $\Delta^{\text{op}} \text{ShvNis}$)

$Y \longrightarrow X$ — $\mathcal{A}'$ -накрытие, если

$\mathcal{A}'$ -трив.
корасслоение



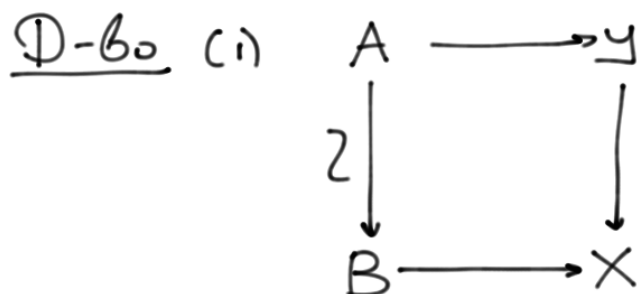
Зам. $Z \in \Delta^{\text{op}} \text{ShvNis}$, Z — симпл. связное

$Z \longrightarrow \text{B}\pi_1 Z \leadsto$ есть $\pi_1 Z$ -торсор $\tilde{Z} \longrightarrow Z$

— это универсальное симпл. накрытие

Лемма $Y \longrightarrow X$ — G -торсор и выполнено одно из

- ① G — сильно $\mathcal{A}'$ -инвариантный пучок групп
 - ② G — конечная этальная k -группа, $|G| \nmid \text{char}(k)$
- $\leadsto Y \longrightarrow X$ — $\mathcal{A}'$ -накрытие



$$H^1(B, G) = \text{Hom}_{H_{\bullet}^{\mathcal{A}'}}(B, BG)$$

$$\text{Hom}_{H_{\bullet}^{\mathcal{A}'}}(B, BG)$$

$$H^1(A, G) = \text{Hom}_{H_{\bullet}^{\mathcal{A}'}}(A, BG)$$

Примеры ① $\mathbb{G}_m$ -торсор $Y \rightarrow X$ явл-ся A' -накрытием

② Конечное этальное накрытие Z алгебры $Y \rightarrow X$ степени, взаимно простой с $\text{char}(k)$

Thm $X \in \Delta^{\text{op}} \text{Shv} \text{Nis}$, X — A' -связно, $\pi_0 X = \pi_0(L_{A'} X) = *$

$\leadsto \exists$ универсальное A' -накрытие $\tilde{X} \rightarrow X$, причем

① $\tilde{X}$ — A' -1-связно

② $\tilde{X}$ — $\pi_1^{A'}$ -торсор над X , где $\pi_1^{A'} \simeq \text{Aut}_X \tilde{X}$

До-во:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{X}_{A'} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \longrightarrow & L_{A'} X \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{унив. симп.} \\ \text{накрытие} \end{array}$$

Пример: $A^3 - 0 \rightarrow \mathbb{P}^2$ — универсальное A' -накрытие

Thm (X, x) A' -связно, $\{U_i\}$ — открытое покрытие X , $x \in U_i$, U_i A' -связно, $U_i \cap U_j$ — A' -связно

$$\leadsto \underset{i,j}{*}^{A'} \pi_1^{A'}(U_i \cap U_j) \rightrightarrows \underset{i}{*}^{A'} \pi_1^{A'}(U_i) \longrightarrow \pi_1^{A'}(X) \longrightarrow *$$

точна справа в $\mathcal{G}_{A'}$

сильно
 A' -инв.

пучки групп

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{A'} & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{G} \\ \pi_1^{A'}(BG) & \longleftarrow & G \end{array}$$

$$\text{т.е. } H^{*A'} \mathcal{G} := (H * G)_{A'}$$

$$G = \pi_1(BG) \longrightarrow \pi_1(L_{A'}(BG)) = \pi_1^{A'}(BG) = G_{A'}$$

Rem. $n \geq 2 \leadsto (A^{n+1} - 0) \rightarrow \mathbb{P}^n$ — универс. A' -накрытие

$$\leadsto \pi_1^{A'}(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{G}_m$$

Проблема: почему $\mathbb{P}^n$ связно?

Теорема $\widetilde{SL}_2 \longrightarrow SL_2 \longrightarrow 1$

$$BSL_2 \longrightarrow K(\underline{K}_2^{MW}, 2)$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_s SL_2 & \longrightarrow & BSL_2 \\ \uparrow \scriptstyle S^2 \wedge \mathbb{C}P^\infty & \searrow & \downarrow \scriptstyle \text{MW} \\ & & K(\underline{K}_2^{MW}, 2) \end{array}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}s}(\Sigma_s SL_2, K(\underline{K}_2^{MW}, 2)) = \underline{K}_2^{MW}(\mathbb{C}P^\infty \wedge^2) \ni [t_1] \cdot [t_2]$$

$$\text{Hom}(BSL_2, K(\underline{K}_2^{MW}, 2)) \simeq \widehat{CH}^2(BSL_2) \ni e_2$$

$$\downarrow \scriptstyle H^2(BSL_2, \underline{K}_2^{MW})$$

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{?} & \xrightarrow{\quad} & \downarrow \scriptstyle ? \\ & & H^2(\Sigma SL_2, \underline{K}_2^{MW}) \end{array}$$

$$\stackrel{=0}{H_2} \longrightarrow H^2(BSL_2, \underline{K}_2^{MW}) \xrightarrow{\sim} H^2(\Sigma SL_2, \underline{K}_2^{MW})$$

$$\leadsto \begin{array}{c} \uparrow \\ \Gamma \longrightarrow BSL_2 \longrightarrow K(\underline{K}_2^{MW}, 2) \end{array}$$

↑
гомотоп.
слои

$$\leadsto 0 \longrightarrow \underline{K}_2^{MW} \longrightarrow \pi_1(\Gamma) \longrightarrow SL_2 \longrightarrow 1$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \widetilde{SL}_2$$

Почему $\widetilde{SL}_2$ A' -1-связно?

$$\begin{array}{l} \pi_2^{A'}(BSL_2) \longrightarrow \underline{K}_2^{MW} \\ \searrow \longrightarrow \pi_2^{A'}(K(\underline{K}_2^{MW}, 2)) \hookrightarrow \pi_1^{A'}(\Gamma) \rightarrow \pi_1^{A'}(BSL_2) \rightarrow \end{array}$$

Lemma (1) $\pi_1^{A'}(SL_n) \simeq \pi_1^{A'}(SL_{n+1}), n \geq 3$

(2) $\pi_1^{A'}(SL_2) \longrightarrow \pi_1^{A'}(SL_3)$

Thm $\pi_1^{A'}(SL_n) \simeq \underline{K}_2^{MW} / \eta = \underline{K}_2^M$

D-60 $\underline{K}_3^{MW} \longrightarrow \underline{K}_2^{MW} \xrightarrow{\pi} \pi_1^{A'}(SL_3)$

$$\text{Hom}_{ab(k)}(\underline{K}_3^{MW}, \underline{K}_2^{MW}) = \underline{K}_2^{MW}(\mathbb{G}_m^{\wedge 3}) \longrightarrow \underline{K}_{-1}^{MW} = \underline{W}$$

$$\leadsto \ker \pi \subseteq \eta \underline{K}_2^{MW}$$

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1^{A'}(SL_2) & \longrightarrow & \pi_1^{A'}(SL_3) & \xrightarrow{C_2} & \underline{K}_2^M \\ \parallel & & & \nearrow & \\ \underline{K}_2^{MW} & & & \eta & \end{array}$$

Thm (1) $0 \longrightarrow \underline{K}_2^{MW} \longrightarrow \pi_1^{A'}(\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$

$$-43 \quad \mathbb{G}_m \rightarrow A^1 \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{P}^1$$

(2) $0 \longrightarrow k^* / \pm 1 \longrightarrow \text{Hom}_{H.}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1) \longrightarrow \text{GW}(k) \longrightarrow 0$