14.11.2013

$\mathbb{A}^1$-двойственность

А. Ананьевский

Po Hu, Igor Kriz

On the Picard group of the stable $\mathbb{A}^1$-homotopy theory

X — гладкое проективное

$\boxed{\text{Опр.}}$ $E/X \rightsquigarrow Th(X) =: X^E$

$$\begin{gathered} Th(X) \\ \| \\ E/E\text{-}X \end{gathered}$$

$\xi \in K_0(X) \rightsquigarrow X^\xi \in SH(k)$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "p"', "-\text{слоь } \mathbb{A}^n"] & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \setminus \{\sum x_i y_i = 0\} \arrow[d] \\ X \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

X' ← афф. ; $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \setminus \{\sum x_i y_i = 0\}$ ← афф.

$$\underset{K_0(X')}{\overset{\cap}{p^*\xi}} \oplus \mathbb{1}^m = E \in Vect(X')$$

$\rightsquigarrow$ положим $X^\xi := \Sigma_T^\infty Th(E)[-m]$

сдвиг спектра

Например, $X^{O_X} = X_+$

$\nu_X = -[T_X] \rightsquigarrow X^{\nu_X}$

В дифф. геометрии:

X компактно, $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N \rightsquigarrow X^{\nu_X} = \Sigma_T^\infty S^N/S^N - X\ [-?]$

$\boxed{\text{Th}}$ $\exists \eta : S^0 \to X^{\nu_X} \wedge X_+$, $\varepsilon : X_+ \wedge X^{\nu_X} \to S^0$ т.ч.

① $X_+ \xrightarrow{id \wedge \eta} X_+ \wedge X^{\nu_X} \wedge X_+ \xrightarrow{\varepsilon \wedge id} X_+$

② $X^{\nu_X} \xrightarrow{\eta \wedge id} X^{\nu_X} \wedge X_+ \wedge X^{\nu_X} \xrightarrow{id \wedge \varepsilon} X^{\nu_X}$

— тождественные

$\Longrightarrow$ ③ Dold–Puppe $\quad X^{\nu_X} \xrightarrow{\lambda_X} \underline{\mathrm{Hom}}(X_+, S^0)$

сопряж. к ε

Вообще, если X, Y — гл. проект., то

$$X \longrightarrow Y \quad \longleftrightarrow \quad Y^{\nu_Y} \longrightarrow X^{\nu_X}$$

В частности, $(X_+ \to S^0) \leftrightsquigarrow (S^0 \to X^{\nu_X}) = \pi_{0,0}(X^{\nu_X})$

Как устроено ε?

$$\underset{X_+\wedge X_+}{\overset{\|}{(X\times X)_+}} \longrightarrow X\times X \big/ X\times X - \Delta_X \simeq X^{T_X}$$

$$\begin{tikzcd} X_+\wedge X^{\nu_X} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\varepsilon"] & X^{T_X\oplus\nu_X} \simeq X^0 = X_+ \arrow[r, dashed] & S^0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d] & p_2^*E \arrow[l] \arrow[d, shift right] \arrow[r] \arrow[dr] & p_2^*E \big/ (p_2^*E - i_0\Delta_X) \\ X \arrow[r, shift left, "\Delta"] & X\times X \arrow[l, shift left, "p_2"] \arrow[u, shift right, bend right, "i"'] & p_2^*E \big/ p_2^*E - i(X\times X) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$X_+\wedge X^E = Th(O_X \boxplus E) = (X\times X)^{p_2^*E} \simeq p_2^*E \big/ p_2^*E - i(X\times X)$$

$\boxed{\text{Лемма 1}}$ $\lambda_{\mathbb{P}^n}$ — изоморфизм

Построение η:

$$\begin{tikzcd} S^0 \arrow[r, "q"] \arrow[rrr, bend left, "\eta"] & (\mathbb{P}^n)^{\nu_{\mathbb{P}^n}} \arrow[r, "g"] & X^{\nu_X} \arrow[r, "\theta"] & X^{\nu_X}\wedge X_+ \end{tikzcd}$$

двойств. к $\mathbb{P}^n_+ \to S^0$

см. ниже

$X \xrightarrow{\Delta} X\times X$

$X^{\nu_X} \longrightarrow X^{\nu_X}\wedge X_+$

$X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$

$\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n / \mathbb{P}^n - X \simeq X^{\nu_{\mathbb{P}^n/X}}$

$(\mathbb{P}^n)^{\nu_{\mathbb{P}^n}} \longrightarrow X^{\nu_{\mathbb{P}^n/X}\oplus\nu_{\mathbb{P}^n}} \simeq X^{\nu_X}$

<u>Д-во Леммы 1</u>   Индукция по n

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^{n-1} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{P}^n \arrow[d, "p"] & \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1} \arrow[l, hook', "j"'] \\
& \mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1} &
\end{tikzcd}$$

$DX := \underline{\mathrm{Hom}}(X_+, S^0)$

$\boxed{\text{Лемма}}$

$$\begin{tikzcd}
& (\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1})^{\nu_{\mathbb{P}^n}} \arrow[r, "j"] \arrow[d] & (\mathbb{P}^n)^{\nu_{\mathbb{P}^n}} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\lambda_{\mathbb{P}^n}"] & (\mathbb{P}^{n-1})^{\nu_{\mathbb{P}^{n-1}}} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{\mathbb{P}^{n-1}}"] & {} \\
T^{\Lambda-n} \arrow[ur, "\sim", no head] \arrow[r, "\sim", no head] & D(\mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}) \arrow[r, "Dp"] & D\mathbb{P}^n \arrow[r, "Di"] & D\mathbb{P}^{n-1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$\underbrace{D(\mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1})}_{\mathbb{P}^n/\mathbb{P}^n - \infty \,\cong\, T^n}$ — морфизм треугольников

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \arrow[d] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
(\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}) \times \mathbb{P}^n / (\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}) \times \mathbb{P}^{n-1} \arrow[r] & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n / \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n - \Delta \arrow[r, phantom, "\cong"] & (\mathbb{P}^n)^{T_{\mathbb{P}^n}} \\
(\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1})_+ \wedge \mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1} \arrow[u, phantom, "\cong" description] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow (\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1})^{\nu_{\mathbb{P}^n}} \wedge (\mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}) \longrightarrow \mathbb{P}^n_+ \dashrightarrow S^0$

$\rightsquigarrow \lambda : (\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1})^{\nu_{\mathbb{P}^n}} \longrightarrow D(\mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1})$

Из этой Леммы следует Лемма 1:

$n=0 \rightsquigarrow \lambda$ — изо; левая верт. стрелка — изо $\rightsquigarrow$ средняя — тоже.

<u>Док-во Леммы</u>: проверим коммутативность среднего квадрата:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{P}^n)^{\nu_{\mathbb{P}^n}} \wedge \mathbb{P}^{n-1}_+ \arrow[r, "id \wedge i"] \arrow[d, "g \wedge id"'] & & (\mathbb{P}^n)^{\nu_{\mathbb{P}^n}} \wedge \mathbb{P}^n_+ \arrow[d] & \\
(\mathbb{P}^{n-1})^{\nu_{\mathbb{P}^{n-1}}} \wedge \mathbb{P}^{n-1}_+ \arrow[r, "\alpha"'] & \mathbb{P}^{n-1}_+ \arrow[r] & \mathbb{P}^n_+ \arrow[r, dashed] & S^0
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \arrow[dr] & & \\
\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \big/ \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n - \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \arrow[dr] & & & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \big/ \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n - \Delta \mathbb{P}^n \arrow[dr, equal] & \\
& \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \big/ \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} - \Delta \mathbb{P}^{n-1} \arrow[urr] \arrow[dr, phantom, sloped, "\cong"] & & & (\mathbb{P}^n)^{T\mathbb{P}^n} \\
& & (\mathbb{P}^{n-1})^{T\mathbb{P}^{n-1}} \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$