

А.Ананьевский

[Th] Пусть $P: (\text{Sm}/k)^{\text{op}} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\text{Sets}$ — предпучок такой, что

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{1} \text{ BG: } & U' \xrightarrow{\quad} X' & P(U') \leftarrow P(X') \\ & \downarrow \text{Несн.} \quad \downarrow & \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ U \xrightarrow{\quad} X & & P(U) \leftarrow P(X) \end{array}$$

— гомотоп.
декартов

$$\textcircled{2} \quad P(A' \times X) \simeq P(X) \rightsquigarrow \pi_n(P(X)) \simeq \text{Hom}_{H_*(k)}(S^n \wedge X_+, (aP)_f)$$

где $(-)_f$ — фибр. замена, aP — пучок acc. с P

$H_*(k)$ — A' -гомотопическая категория

$$\text{D-Bo: } \pi_n(P(X)) \stackrel{?}{=} \pi_n((aP)_f(X)) \stackrel{\text{см. Лемму ниже}}{\cong} \pi_n(\underline{\text{Hom}}(X, (aP)_f)(k))$$

$$\cong \text{Hom}_{H_*^S(k)}(S^n, \underline{\text{Hom}}(X, (aP)_f)) \cong$$

$$\left(\text{Hom}_{H_*(k)}(S^n, X(k)) = \text{Hom}_{H_*^S}(S^n, X) \right)$$

$$\cong \text{Hom}_{H_*^S(k)}(S^n \wedge X_+, (aP)_f) \cong \text{Hom}_{H_*(k)}(S^n \wedge X_+, (aP)_f)$$

A' -лок.

Лемма \mathcal{A}, \mathcal{B} — пучки симм. множеств; $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ — такой, что $\mathcal{A}(R) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(R)$, если R — гладкое квазиверно; пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} обладают свойством B.G.

$$\rightsquigarrow \forall X \in \text{Sm}/k \quad \mathcal{A}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(X)$$

$$P — \text{симм. фибр. пучок} \quad \Rightarrow \text{B.G.:} \quad \begin{array}{ccc} P(U') & \longrightarrow & P(X') \\ \uparrow & & \uparrow \\ P(U) & \xleftarrow{\text{расч.}} & P(X) \end{array}$$

непонятно...

Док-во леммы: можно считать, что $\forall U \subset X(U \rightarrow B(U))$ —
расложение Канта

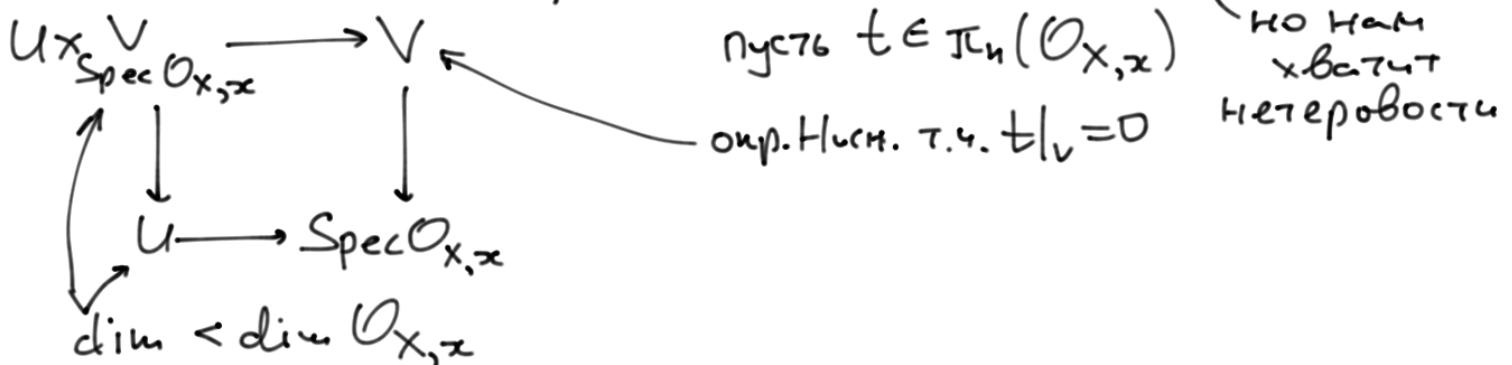
$$\pi_{n+1}(X(U)) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X(U)) \times \pi_n(X(U)) \quad — \text{точка}$$

i) если $B = pt$, т.е., $\pi_n(X(R)) = 0 \xrightarrow{?} \pi_n(X) = 0$

• индукция по $\dim X$

• для локальных колец: $U = \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} - \{x\}$;

$\dim U < \dim \mathcal{O}_{X,x}$ (хотя U не многообразие)



• $\rightsquigarrow \pi_n(X(U)) = 0$

пусть $Y \subseteq X$ $y \in \pi_n(X(Y))$, U -макс откры. в Y т.к. $y|_U = 0$

C -непр., замкнутое в X — „плохое“, если $\exists Y, n, y, U$:

$Y \cap C \neq \emptyset$, $U \cap C \neq \emptyset$

если плохих нет, то все хорошо: $Y = X, y, U, C = Y - U$ — многое
рассмотрим макс плохое C $\rightsquigarrow U = X$

\rightsquigarrow есть Y, n, y, U

Ростки $\pi_n(X)$ в точках $Y \cap C$ нулевые

$\rightsquigarrow \exists V \subseteq Y$: $V \cap C \neq \emptyset$, $y|_V = 0$

B.G. $\rightsquigarrow y|_{U \cap V} = 0$, $z \in \pi_{n+1}(U \cap V)$

Делаем макс $W \subset U$: $z|_W = 0$

~ C - компонента X-W:

если $C \subsetneq D \subset X-W$, то D не плюсое
3. \uparrow Непр. $\rightsquigarrow D \cap C \neq \emptyset$

с другой стороны, $D \cap V \supset C \cap V \neq \emptyset$
 $\rightsquigarrow D \cap (U \cap V) \neq \emptyset$

$(U \cap V, n+1, Z, W) \rightsquigarrow D \cap W \neq \emptyset ?!$

пусть $F = \bigcup_{\substack{C' - \text{комп.} \\ \text{кроме } C}} C'$ $V' = V - F$
 $X - W - F \subseteq C$

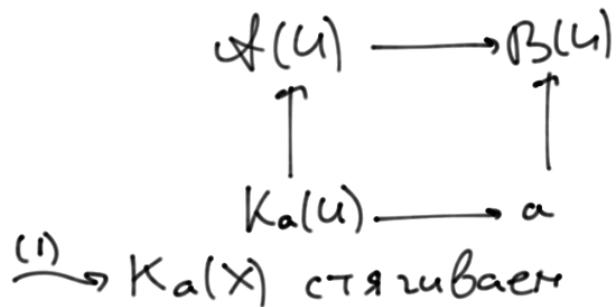
$U \cap V' \subset W$ $U \cap V' \cap (X-W) \subseteq U \cap C = \emptyset$

$V' \cap C \neq \emptyset$

$\rightsquigarrow z|_{U \cap V'} = 0$ $\rightsquigarrow y|_{U \cap V'} = 0$

2) $a \in \mathcal{B}(x)$ \rightsquigarrow рассм. предп.у^чок $U \xrightarrow{\quad} K_a(U)$

изотоп. слои над a



$$SH^{\text{eff}}(k) \leq SH(k)$$

локализующая подкатегория, порожд. $\sum_{\substack{T \\ X \in S_m/k}}^{\infty} X_+$
 $E \in SH(k)$

$$i_n: T^{\wedge n} \wedge SH^{\text{ess}} \xrightarrow{i_n} SH(k): z_n \quad f_n := i_n z_n$$

$$f_{n+1}(E) \longrightarrow f_n(E) \longrightarrow S_n(E) \longrightarrow S^{1,0} \wedge f_{n+1}(E)$$

↑ слайнс

$$\dots \longrightarrow f_{n+1}(E) \longrightarrow f_n(E)$$

$\searrow \quad \swarrow$

$$E \quad T^{\wedge(n+1)} SH^{\text{eff}} \xrightarrow{\quad} T^{\wedge n} SH^{\text{ess}} \xrightarrow{\quad} SH$$

Примеры: k — совершенное поле

① R — комм. кольцо, MR — спектр Эйлеберга-Маклейна
 $S_0 MR = MR, S_i MR = 0 \quad (i \neq 0)$ (представляет motiv-
ные когомологии)

$$② S_0 \sum_T^{\infty} S^0 = M\mathbb{Z}$$

$$③ S_* KGL = T^{\wedge i} \wedge M\mathbb{Z}$$

$$④ S_* KQ = \begin{cases} (T^{\wedge i} \wedge M\mathbb{Z}) \vee \bigvee_{j \leq 0} T^{\wedge i} \wedge S^{2j, 0} \wedge M\mathbb{Z}/2, & i \text{ четно} \\ \bigvee_{j \geq 0} T^{\wedge i} \wedge S^{2j+1, 0} \wedge M\mathbb{Z}/2, & i \text{ нечетно} \end{cases}$$

$$⑤ S_* W = \bigvee_{j \in \mathbb{Z}} T^{\wedge i} \wedge S^{2j, 0} \wedge M\mathbb{Z}/2$$

$$⑥ S_* MGL = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} T^{\wedge i} \wedge M\mathbb{Z} \otimes MU_{2i} - \text{если } \text{char } k = 0$$

Rem ① E — кольцевой $\Rightarrow S_* E$ — кольцевой спектр

② M — модуль над $E \rightarrow S_* M$ — модуль над $S_0 E$

③ $S_* E$ — модуль над $S_0 \sum_T^{\infty} S^0 = M\mathbb{Z}$

$$\textcircled{4} \quad D'_{p,q,n} = \pi_{p,n} f_q E$$

$$E'_{p,q,n} = \pi_{p,n} f_q E$$

$$E'_{p,q,n} \xrightarrow{\text{unord}} \pi_{p,n} E$$

