05.12.2013

А. Ананьевский

$\boxed{\text{Th}}$ Пусть $P: (Sm/k)^{op} \to \Delta^{op}Sets$ — предпучок такой, что

① BG:

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{Нисн.}"] & X' \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} P(U') & P(X') \arrow[l] \\ P(U) \arrow[u] & P(X) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

— гомотоп. декартов

② $P(\mathbb{A}^1 \times X) \simeq P(X) \rightsquigarrow \pi_n(P(X)) \simeq Hom_{H_\bullet(k)}(S^n \wedge X_+, (aP)_f)$

где $(-)_f$ — фибр. замена, aP — пучок асс. с P

$H_\bullet(k)$ — $\mathbb{A}^1$-гомотопическая категория

<u>Д-во:</u> $\pi_n(P(X)) \overset{?}{\cong} \pi_n((aP)_f(X)) \cong \pi_n(\underline{Hom}(X,(aP)_f)(k))$? — см. Лемму ниже

$\cong Hom_{H^s_\bullet(k)}(S^n, \underline{Hom}(X,(aP)_f)) \cong$

$(Hom_{H_\bullet(k)}(S^n, X(k)) = Hom_{H^s_\bullet}(S^n, X))$

$\cong Hom_{H^s_\bullet(k)}(S^n \wedge X_+, (aP)_f) \simeq Hom_{H_\bullet(k)}(S^n \wedge X_+, (aP)_f)$

$\mathbb{A}^1$-лок.

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — пучки симпл. множеств; $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — такой, что $\mathcal{A}(R) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(R)$, если R — гладкое гензелево; пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ обладают свойством B. G.

$\rightsquigarrow \forall X \in Sm/k \ \ \mathcal{A}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(X)$

P — симпл. фибр. пучок $\Rightarrow$ B. G.:

$$\begin{tikzcd} P(U') \arrow[r] & P(X') \\ P(U) \arrow[u] & P(X) \arrow[l, "\text{рассл.}"'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

непонятно...

<u>Док-во Леммы:</u> можно считать, что $\forall U$ $\mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{B}(U)$ — расслоение Кана

$$\pi_{n+1}(\mathcal{A}(U)) \xrightarrow{\partial} \pi_n(\mathcal{A}(X)) \to \pi_n(\mathcal{A}(U)) \times \pi_n(\mathcal{A}(X)) \quad \text{— точна}$$

1) если $B = pt$, т.е., $\pi_n(\mathcal{A}(R)) = 0 \overset{?}{\longrightarrow} \pi_n(\mathcal{A}(X)) = 0$

- индукция по $\dim X$
- для локальных колец: $U = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} - \{x\}$;
  $\dim U < \dim \mathcal{O}_{X,x}$ (хотя U не многообразие) — но нам хватит нетеровости

$$\begin{tikzcd}
U \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}} V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
U \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

$\dim < \dim \mathcal{O}_{X,x}$

пусть $t \in \pi_n(\mathcal{O}_{X,x})$

окр. Нисн. т.ч. $t|_V = 0$

- $\rightsquigarrow \pi_n(\mathcal{A}(X)) = 0$

пусть $Y \subseteq X$ (откр.) $y \in \pi_n(\mathcal{A}(Y))$, U — max откр. в Y т.ч. $y|_U = 0$

C — непр., замкнутое в X — „плохое", если $\exists\, Y, n, y, U$:

$Y \cap C \neq \emptyset$, $U \cap C \neq \emptyset$

если плохих нет, то все хорошо: $Y = X, y, U$, $C = Y - U$ — плохое $\rightsquigarrow U = X$

рассмотрим max плохое C

$\rightsquigarrow$ есть Y, n, y, U

Ростки $\pi_n(\mathcal{A})$ в точках $Y \cap C$ нулевые

$\rightsquigarrow \exists V \subseteq Y$ (откр) : $V \cap C \neq \emptyset$, $y|_V = 0$

B.G. $\rightsquigarrow y|_{U \cap V} = \partial z$, $z \in \pi_{n+1}(U \cap V)$

берем max $W \subset U$: $z|_W = 0$

$\rightsquigarrow C$ — компонента $X-W$:

если $C \underset{з.}{\subsetneq} D \underset{з.}{\subset} X-W$, то D не плохое

непр. $\rightsquigarrow D \cap U \neq \emptyset$

с другой стороны, $D \cap V \supset C \cap V \neq \emptyset$

$\rightsquigarrow D \cap (U \cap V) \neq \emptyset$

$(U \cap V, n+1, Z, W) \rightsquigarrow D \cap W \neq \emptyset$?!

пусть $F = \bigcup C'$ $\quad V' = V - F$

C'–комп. $X-W$ кроме C

$X - W - F \subseteq C$

$U \cap V' \subset W \quad U \cap V' \cap (X-W) \subseteq U \cap C = \emptyset$

$V' \cap C \neq \emptyset$

$\rightsquigarrow Z|_{U \cap V'} = 0 \rightsquigarrow y|_{U \cup V'} = 0$

2) $a \in \mathcal{B}(X) \rightsquigarrow$ рассм. предпучок $U \longmapsto K_a(U)$

гомотоп. слой над a

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(U) \arrow[r] & \mathcal{B}(U) \\ K_a(U) \arrow[u] \arrow[r] & a \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\overset{(1)}{\rightsquigarrow} K_a(X)$ стягиваем

$SH^{eff}(k) \subseteq SH(k)$

локализующая подкатегория, порожд. $\Sigma^\infty_T X_+$, $X \in Sm/k$

$E \in SH(k)$

$i_n: T^{\wedge n} \wedge SH^{eff} \rightleftarrows SH(k): r_n \qquad f_n := i_n r_n$

$$f_{n+1}(E) \to f_n(E) \to s_n(E) \to S^{1,0} \wedge f_{n+1}(E)$$

($s_n(E)$ — слайс)

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & f_{n+1}(E) \arrow[r] \arrow[dr] & f_n(E) \arrow[d] \\ & & E \end{tikzcd}$$

$$T^{\wedge(n+1)} SH^{eff} \rightleftarrows T^{\wedge n} SH^{eff} \rightleftarrows SH$$

Примеры: k — совершенное поле

① R — комм. кольцо, MR — спектр Эйленберга-Маклейна

$s_0 MR = MR$, $s_i MR = 0$ $(i \neq 0)$ (представляет мотивные когомологии)

② $s_0 \Sigma^\infty_T S^0 = M\mathbb{Z}$

③ $s_i KGL = T^{\wedge i} \wedge M\mathbb{Z}$

④ $s_i KQ = \begin{cases} (T^{\wedge i} \wedge M\mathbb{Z}) \vee \bigvee_{j<0} T^{\wedge i} \wedge S^{2j,0} \wedge M\mathbb{Z}/2, & i \text{ четно} \\ \bigvee_{j<0} T^{\wedge i} \wedge S^{2j+1,0} \wedge M\mathbb{Z}/2, & i \text{ нечетно} \end{cases}$

(KQ — эрмитова)

⑤ $s_i W = \bigvee_{j \in \mathbb{Z}} T^{\wedge i} \wedge S^{2j,0} \wedge M\mathbb{Z}/2$

⑥ $s_i MGL = T^{\wedge i} \wedge M\mathbb{Z} \otimes MU_{2i}$ — если $\mathrm{char}\, k = 0$

Rem ① E — кольцевой $\Rightarrow s_* E$ — кольцевой спектр

② M — модуль над $E \rightsquigarrow s_i M$ — модуль над $s_0 E$

③ $s_i E$ — модуль над $s_0 \Sigma^\infty_T S^0 = M\mathbb{Z}$

4. $D'_{p,q,n} = \pi_{p,n} f_q E$

$E'_{p,q,n} = \pi_{p,n} f_q E$

$E'_{p,q,n} \Rightarrow \pi_{p,n} E$

иногда

$$\begin{tikzcd}
D'_* \arrow[rr] & & D'_* \arrow[dl] \\
& E'_* \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$