

напоминание и дополнения:

$\mathcal{P} \subseteq \text{Ob } \mathcal{C}$; $C \xrightarrow{f} C' - \mathcal{P}$ -эпиморфизм, если

$\forall P \in \mathcal{P} \quad \mathcal{C}(P, C) \xrightarrow{f_*} \mathcal{C}(P, C') - \text{сюръекция}$

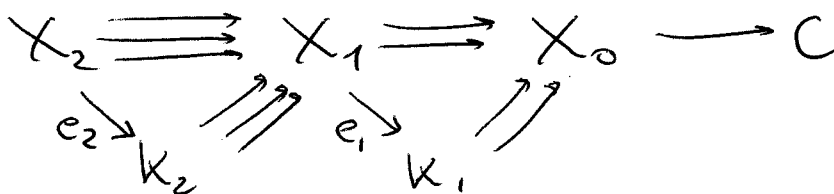
\mathcal{P} -проективный класс, если $\forall C \in \mathcal{C} \exists \mathcal{P}$ -эпиморфизм

$P \rightarrow C$ такой, что $P \in \mathcal{P}$

Какие бывают резольвенты?

① \mathcal{P} -проективная резольвента в смысле Тирши-Фогеля

$X_\bullet \rightarrow C - \text{дополненный п.с. объект}$



$X_i \in \mathcal{P}$, $e_i - \mathcal{P}$ -эпиморфизмы

$E: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$

абелева или грп

$$\rightsquigarrow L_n^{\mathcal{P}} E(C) = \pi_n(E(X_\bullet))$$

② $(S, \mathcal{D}, \varepsilon) - \text{комонлада} \rightsquigarrow \text{Var}_S(C) - \text{бар-резольвента}$

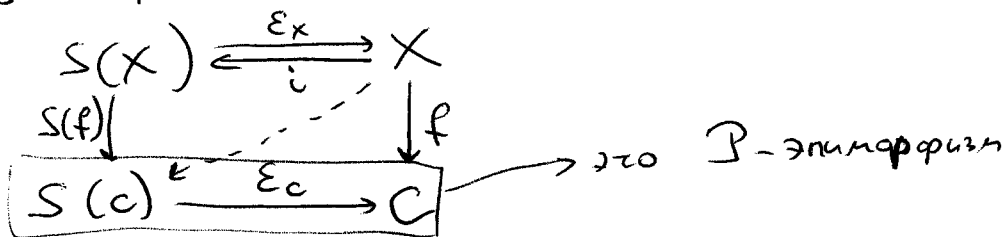
$$L_n^S E(C) = \pi_n(E(\text{Var}_S(C)))$$

$\mathcal{P}_S - \text{проективный класс, состоящий из}$

$$X \in \mathcal{C} : \exists i \quad X \xrightleftharpoons[\iota]{\varepsilon_X} S(X) \quad \varepsilon_X \circ i = \text{id}_X$$

Лемма $\mathcal{P}_S - \text{проективный класс}$

Доказ



Теорема $E: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A} \rightsquigarrow L_n^S E = L_n^{\mathcal{P}_S} E$

③ \mathcal{P} -проективная резольвента Пирашвили:

$X_0 \longrightarrow C$ — аугмент. п.с.-объект

$$X_i \in \mathcal{P} \text{ и } \forall p \in \mathcal{P} \quad C(p, X_0) \longrightarrow C(p, C)$$

— гомотопическая эквив-сть (т.е., это стягиваемое аугментированное п.с.-множество)

④ Случай $C = G\mathcal{Z}$

свободная симплициальная резольвента:

$$F_0 \longrightarrow G_0 \quad F_i \text{ свободны}$$

группа
||
постоянная симплиц. группа. (\mathcal{P} -класс свободных групп)
гомотопическая эквив-сть симплициальных множеств

$$C(p, X_0) \longrightarrow C(p, C)$$

— берем $p = \mathbb{Z}, X_0 = F_0, C = G$

$$\rightarrow C(p, X) = G_2(\mathbb{Z}, F_0) = F_0$$

Производные функторы абелианизации

Теорема $ab: G_2 \longrightarrow Ab$

$$G \longmapsto G^{ab} = G/[G, G]$$

рассл. класс свободных групп (или команда „взятие своб. группы“)

$$\rightarrow L_i ab = H_{i+1}(-)$$

Лемма A_{\bullet} — дигимплициальная абелева группа

→ есть $\begin{matrix} \text{гомотопические} \\ \text{спектральные} \end{matrix}$ последовательности $I E, II E$ т.ч.

$$I E \Rightarrow ? \Leftarrow II E \quad \text{и} \quad \begin{matrix} \swarrow \text{по второму изм.} \\ \searrow \text{по второй изм.} \end{matrix}$$

$$I E_{p,q}^1 = \underbrace{H_q(A_{p \bullet})}_{\cong H_q} , \quad I E_{p,q}^2 = H_p^I(H_q^{II}(A_{\bullet \bullet}))$$

$$II E_{p,q}^1 = H_q(A_{\bullet p}) , \quad II E_{p,q}^2 = H_p^{II}(H_q^I(A_{\bullet \bullet}))$$

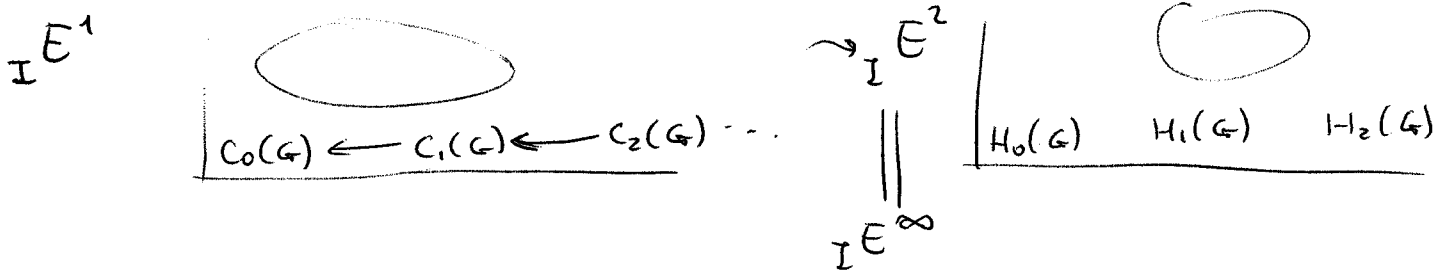
D-во $C(A_0)$ - дикомплекс (см. соответствующие Дольда-Кана)

Рассмотрим две спектральные послед-сти этого дикомплекса. □

D-во Теорема $F. \xrightarrow{\sim} G$ - свободная симплич. резольвента
 $N.F.$ - дикомплексиальное мн-во \sim

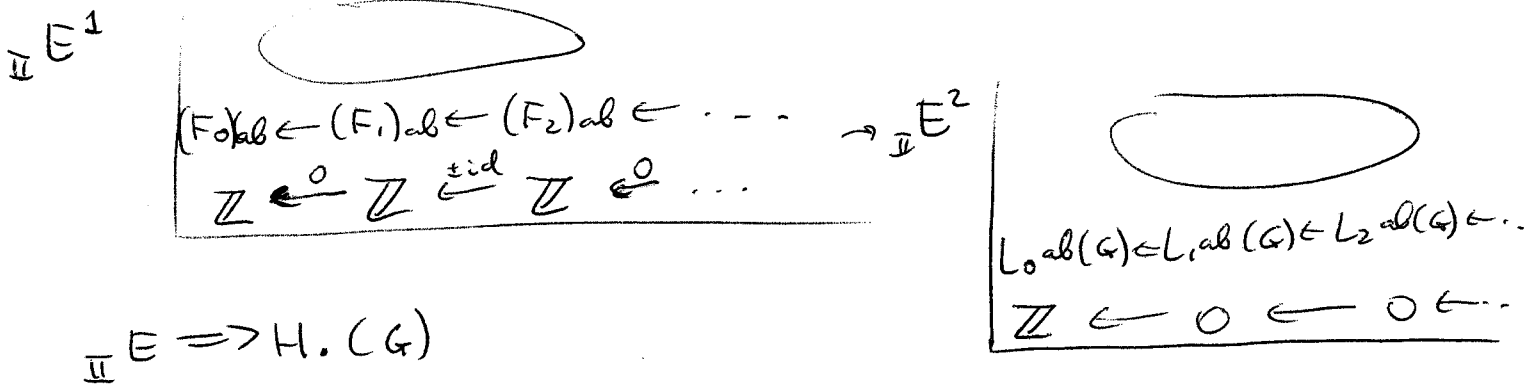
$\mathbb{Z}[N.F.]$ - дикомплексиальная абелева группа

применим лемму: $I E_{pq}^1 = H_q(\mathbb{Z}[N_p F.]) = \begin{cases} 0, & q \neq 0 \\ \mathbb{Z}[N_p G], & q = 0 \end{cases}$



$\sim I E \Rightarrow H_0(G)$

$II E_{pq}^1 = H_q(\mathbb{Z}[N_p F_p]) = H_q(C_0(F_p)) = H_q(F_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ (F_p)_{ab}, & q = 1 \\ 0, & q > 1 \end{cases}$



$II E \Rightarrow H_1(G)$

$\sim H_{i+1}(G) = L_i^{ab}(G)$ □

Замечание • $\text{Hom}(G_{ab}, \mathbb{Z}) : G_2 \longrightarrow \text{Ab}$

$\cong R_n E = H^{n+1}(-)$

• M - аб. группа, G_{2M} - категория групп с групп. действием на M (т.е. M - $\mathbb{Z}G$ -модуль)
 $Z^1 = \text{Der} : G_{2M} \longrightarrow \text{Ab}$
 $G \longrightarrow Z^1(G, M) \sim R^1 Z^1 = H^{2+1}(-, M)$

2-группы и срезанные модули

(строгая) 2-категория: категория, обогащенная над \mathbf{Cat} .

$\forall a, b \in \mathcal{C} \quad \mathcal{C}(a, b) \stackrel{\text{т.е. } \circ_2}{\text{— категория}}$,

$\mathcal{C}(b, c) \times \mathcal{C}(a, b) \xrightarrow{\circ = \circ_1} \mathcal{C}(a, c) \text{ — функтор}$

Примеры: ① 2-категория с одним объектом = строгая моноидальная категория: $\otimes = \circ_1, \circ = \circ_2$

② \mathbf{Top} : $\mathbf{Top}(X, Y)$ — категория, морфизмы = гомотопии / гомотопии / гомотопии

③ \mathbf{Cat} : $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$
2-морфизмы = ест. преобразования

2-группоид: все морфизмы обратимы

2-группа: 2-группоид с одним объектом,
т.е. моноидальный ~~группоид~~ группоид, на котором \otimes задает
структуру группы

Пусть G — 2-группа; $\pi_1(G) = \text{ob } G / \cong = \text{ob } G / \left\{ \begin{array}{l} \text{объекты, изомор-} \\ \text{фные } e \end{array} \right\}$

$\pi_2(G) = G(e, e)$ — абелева группа
(т.е. есть 2 коммутующие структуры группы: \otimes и \circ)

$\pi_1(G) \curvearrowright \pi_2(G)$ — сопряжение

$g \in \text{ob } G, \alpha \in \pi_2(G) \rightsquigarrow \alpha^g = 1_{g^{-1}} \otimes \alpha \otimes 1_g$

если $g \cong e$, то $\alpha^g = \alpha$: несложно проверить (упражнение) правое

Срезанный модуль $\mathcal{C} = (\varphi: \underset{\alpha}{G_2} \xrightarrow{\varphi} \underset{\beta}{G_1}, G_1 \curvearrowright G_2)$
автоморфизм

и (1) $\varphi(\alpha^g) = \varphi(\alpha)^g (= g^{-1} \varphi(\alpha) g)$

(2) $\varphi(\alpha^{\beta}) = \alpha^{\beta} (= \beta^{-1} \alpha \beta)$

Замечания ① $\text{Im}(\varphi) \trianglelefteq G_1$ $\pi_1(C) := G_1 / \text{Im}(\varphi)$

② $\text{Ker}(\varphi) \subseteq \text{Cent}(G_2)$ $\pi_2(C) := \text{Ker} \varphi$

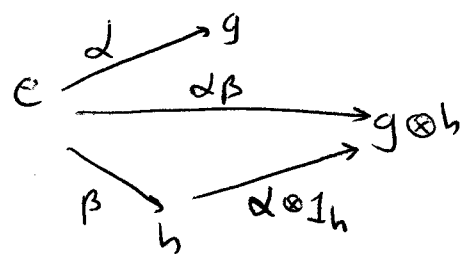
③ $\pi_1(C) \curvearrowright \pi_2(C)$

Теорема $2\text{-}G_2 \xrightleftharpoons[\Phi]{\Psi} \mathbf{GrMod}$ сохраняют π_1 и π_2
 категория $2\text{-}групп$ категория супермодулей

$\Phi(G) = (\varphi: G_2 \longrightarrow G_1, G_1 \curvearrowright G_2)$

$G_1 = \text{Ob } G \quad G_2 = \{d: e \longrightarrow g \mid g \in G\}$

$\varphi: G_2 \longrightarrow G_1$
 $d \longmapsto d^1(d)$
 ← конец стрелочки d



Description: $d^g = 1_{g_1} \otimes d \otimes 1_g$

$H^3(G, M) = \{ \text{супермодули} : \pi_1(C) = G, \pi_2(C) = M \} / \text{гомотоп. эквив.}$