

$G, H$  - группы

$$G \longrightarrow \text{Aut } H, \quad H \longrightarrow \text{Aut } G$$

$G \times H \xrightarrow{\oplus} N$  — спреженно дильнейное, если (спреженное сравнение)

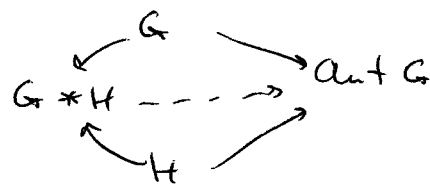
①  $\oplus(gg', h) = \oplus({}^g g', {}^g h) \cdot \oplus(g, h)$

②  $\oplus(g, hh') = \oplus(g, h) \cdot \oplus({}^h g, {}^h h')$

③  $\oplus(g, h) \cdot \oplus(g', h') = \oplus([g, h]g', [g, h]h') \cdot \oplus(g, h)$

④  $\oplus(g', h') \cdot \oplus(g, h) = \oplus(g, h) \cdot \oplus([h, g]g', [h, g]h')$

$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1} \in G * H$



**Пример**

$$G \times G \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} G$$

для фиксированных  $G$  и  $H$  минимальный объект в категории таких  $N$  называется набелевым тензорным произведением и обозначается через  $G \otimes H$ :

$$G \times H \xrightarrow{-\otimes-} G \otimes H$$



исчитать, что  $G \otimes H = \langle \{g \otimes h \mid g \in G, h \in H\} \mid (1) - (4) \rangle$

Если  $G, H$  абелевы и действия тривиальны, получаем обычное тензорное произведение

Пусть  $A$  — группа. Рассмотрим категорию  $\text{Gr}_A$ :

Об — группа  $G$  с действиями  $A \curvearrowright G$  и  $G \curvearrowright A$

морфизмы:  $G \xrightarrow{\varphi} G'$ :  ~~$\varphi: G \rightarrow G'$~~   $G \xrightarrow{\varphi} G'$  +  $G \xrightarrow{\varphi} G'$   $\begin{matrix} \downarrow \text{keA} \\ \text{Aut } A \end{matrix}$   $\begin{matrix} \downarrow \text{keA} \\ \text{Aut } A \end{matrix}$   $G \xrightarrow{\varphi} G'$   $\begin{matrix} \downarrow \text{keA} \\ \text{Aut } A \end{matrix}$   $G \xrightarrow{\varphi} G'$  1

Для морфизма  $\varphi: G \longrightarrow G'$  в грА определены

морфизм  $G \otimes A \longrightarrow G' \otimes A$ :

$$\begin{aligned} \text{достаточно задать } (G, A) &\longrightarrow G' \otimes A \\ (g, a) &\longmapsto \varphi(g) \otimes a \end{aligned}$$

— суръективный гомоморфизм

проверим это:

$$\begin{aligned} 1) \varphi(gg') \otimes a &= \varphi(g) \varphi(g') \otimes a = \left( \underbrace{\varphi(g)}_{\varphi(gg')} \otimes \underbrace{\varphi(g') a}_{a} \right) (\varphi(g) \otimes a) = \\ &= (\varphi(gg') \otimes a) (\varphi(g) \otimes a) \end{aligned}$$

2) — 4) ...

Замечание

Если  $\varphi: G \longrightarrow G'$  — ~~сюръективный~~ сюръективное отображение,

то и  $G \otimes A \longrightarrow G' \otimes A$  сюръективно

$$\boxed{\text{У-л.}} \quad 1 \longrightarrow G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} N \longrightarrow 1 \quad \begin{array}{l} \text{— точна в } G' \\ \text{в } G \otimes A \end{array}$$

$$\rightsquigarrow G \otimes A \longrightarrow H \otimes A \longrightarrow N \otimes A \longrightarrow 1$$

Д-во: осталось проверить точность в  $H \otimes A$

$$\text{Im}(f \otimes A) \triangleq H \otimes A ?$$

$$(h \otimes a) \left( \prod_i (f(g_i) \otimes a_i)^{\pm 1} \right) (h \otimes a)^{-1}$$

$$\prod_i (h \otimes a) (f(g_i) \otimes a_i)^{\pm 1} (h \otimes a)^{-1}$$

$$\prod_i \left( \underbrace{[h, a]}_{f([h, a] g_i)} f(g_i) \otimes \underbrace{[h, a]}_a a \right) (h \otimes a) (h \otimes a)^{-1} \rightsquigarrow \in \text{Im}(f \otimes A)$$

~~теперь~~ теперь  $G \otimes A \longrightarrow H \otimes A \longrightarrow N \otimes A \longrightarrow 1$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \otimes a = 1 & \parallel & \xrightarrow{\text{композиция}} & \parallel & \xrightarrow{\text{тривиальна}} & \parallel & \xrightarrow{\text{— эти стрелки есть}} \\ G \otimes A & \longrightarrow & H \otimes A & \longrightarrow & \text{Coker}(f \otimes A) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Для построения стрелки  $N \otimes A \longrightarrow \text{Coker}(f \otimes A)$

построим  $(N, A) \longrightarrow \text{Coker}(f \otimes A)$  — конечно  
 линейное

$$\begin{aligned} \text{---} \\ (n, a) &\longmapsto [g^{-1}(n) \otimes a] \\ &\quad \uparrow \text{ канонич. прообраз } n \\ &\quad h \end{aligned}$$

пусть  $h'$  — другой прообраз:  $g(h') = g(h) = n$

$$\rightarrow h' = h \cdot g'$$

$$h' \otimes a = h \cdot f(g') \otimes a = \underbrace{(h f(g') \otimes a)}_{\text{Im}(f \otimes A)} (h \otimes a)$$

Узв.  $A$  — аделева группа,  $A \triangleleft G$  тривиально,  $G \triangleleft A$  □

$$IG \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Тогда  $G \otimes A \cong IG \otimes_{\mathbb{Z}G} A$

Д-во: 1)  $G \otimes A$  аделева

$$(g \otimes a) (g' \otimes a) \stackrel{(3)}{=} (g' \otimes a') (g \otimes a)$$

строим  $\Phi: G \otimes A \longrightarrow IG \otimes_{\mathbb{Z}G} A$  — для этого построим

ср-спаривание  $(G, A) \xrightarrow{\varphi} IG \otimes_{\mathbb{Z}G} A$

$$(g, a) \longmapsto (g-1) \otimes a$$

$$\begin{aligned} \varphi(g', a) \varphi(g, a) &= \underbrace{(gg'g^{-1} - 1) \otimes a}_{(gg' - g)g^{-1} \otimes a} + (g-1) \otimes a = \\ &= (gg' - 1) \otimes a \end{aligned}$$

теперь строим

$$\Psi: IG \otimes_{\mathbb{Z}G} A \longrightarrow G \otimes A, \text{ т.е. строим}$$

билинейное  $(IG, A) \longrightarrow G \otimes A$

$$\sum (g_i - 1) \otimes a_i \longmapsto \prod (g_i \otimes a_i)$$

Нужно проверить, что оно  $\mathbb{Z}G$ -билинейно:

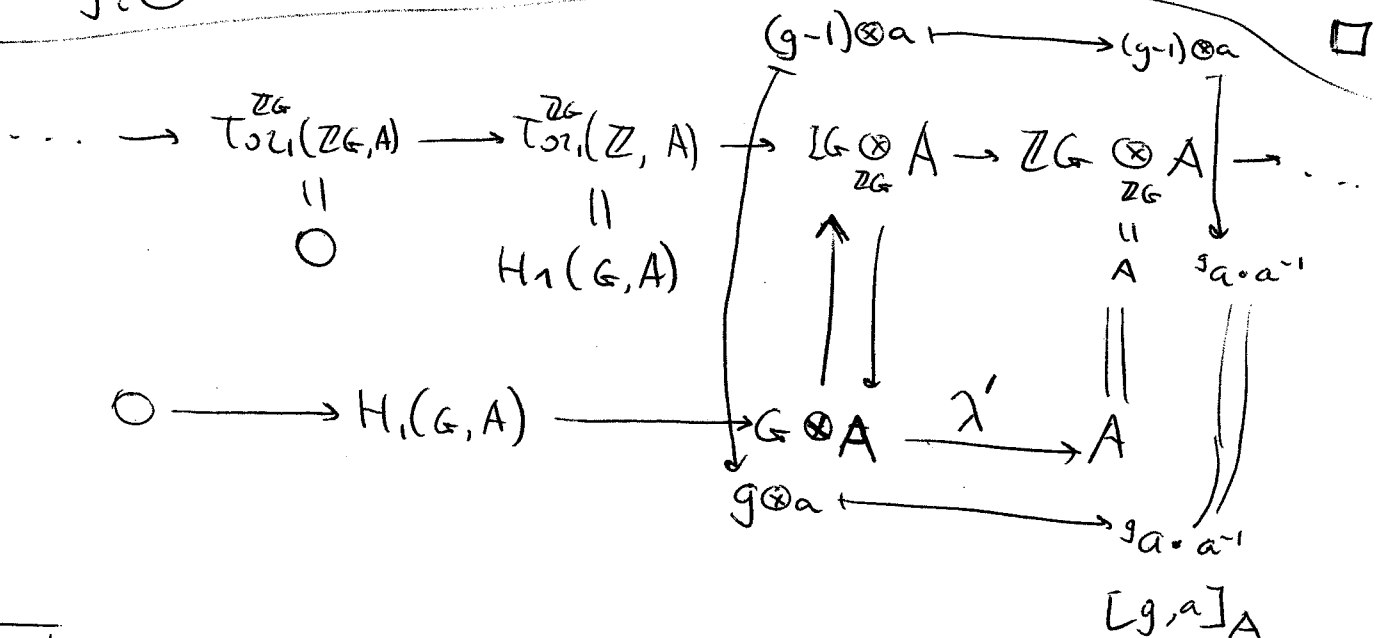
$$\psi(\sum (g_i - 1) \otimes a_i a_i') = \prod g_i \otimes a_i a_i' \stackrel{(2)}{=} \prod (g_i \otimes a_i) (g_i \otimes a_i')$$

— линейность по второму аргументу

$$\sum (g_i - 1) h_i \otimes a_i = \sum (g_i h_i - 1) \otimes a_i - \sum (h_i - 1) \otimes a_i$$

$$\begin{aligned} & \prod (g_i h_i) \otimes a_i - \prod (h_i \otimes a_i)^{h_i} \\ & \parallel \\ & (g_i h_i \otimes a_i) (h_i \otimes a_i)^{h_i - 1} \\ & \parallel \\ & (g_i h_i \otimes a_i) (h_i^{-1} \otimes a_i)^{h_i} \\ & \parallel \\ & h_i (h_i^{-1} (g_i h_i \otimes a_i) (h_i^{-1} \otimes a_i)^{h_i}) \\ & \parallel \\ & h_i (h_i^{-1} g_i h_i \otimes a_i) \\ & \parallel \\ & g_i \otimes h_i a_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (h_i \otimes a_i) (h_i^{-1} \otimes a_i) \\ & \parallel \\ & 1 \otimes a_i \\ & \parallel \\ & 1 \end{aligned}$$



Опр. Пусть теперь  $A$  — модуль,  $G \in \text{Gr} A$

Определим  $H_1(G, A) := \text{Ker}(\lambda')$

$H_0(G, A) := \text{Coker}(\lambda')$

где  $\lambda': g \otimes a \rightarrow s_{a \cdot a^{-1}}$

У нас была категория  $\text{GrA}$ :

морфизмы в ней  
 $G \longrightarrow G'$

такие:  $G \longrightarrow G'$   
 $\downarrow \quad \checkmark$   
 $\text{Aut } A$

$G \longrightarrow G'$   
 $\downarrow \subseteq A \Rightarrow \downarrow$   
 $G \longrightarrow G'$

Определим категорию  $\text{Set}_A$

Объекты: мн-ва  $S$  с действиями  $A \xrightarrow{g_L} \text{Bij } S, S \xrightarrow{\text{Set } S} \text{Aut } A$

Морфизмы:  $S \longrightarrow S'$  т.е.

$S \longrightarrow S'$   
 $\downarrow \text{Set } S \quad \checkmark$   
 $\text{Aut } A$

$S \longrightarrow S'$   
 $\downarrow \subseteq A \Rightarrow \downarrow$   
 $S \longrightarrow S'$

$\text{Gr}_A \xrightarrow{\mathcal{U}} \text{Set}_A$  — забывающий

Построим к нему левый сопряженный

$\text{Set}_A \xrightarrow{F} \text{Gr}_A$  таким образом

$S \longmapsto F_2(S)$  с действиями:

$A \longrightarrow \text{Aut}(F_2(S))$

$a \in A \longmapsto \left( \begin{array}{c} F_2(S) \longrightarrow F_2(S) \\ S \xrightarrow{\quad} F_2(S) \\ S \xrightarrow{a} S \xrightarrow{i_S} F_2(S) \end{array} \right)$

т.е.  ${}^a(S_1^{\pm 1} \dots S_n^{\pm 1}) = {}^a S_1^{\pm 1} \dots \cdot {}^a S_n^{\pm 1}$

$F_2(S) \longrightarrow \text{Aut}(A)$   
 $S \longrightarrow \text{Aut}(A)$   
 ↙ левый ↘

$(S_1^{\pm 1} \dots S_n^{\pm 1}) a = S_1^{\pm 1} (\dots (S_n^{\pm 1} a))$

для  $\pm 1$  обратные действия в  $\text{Aut } A$ .

$F \dashv \mathcal{U}$



однунга:  $Id \xrightarrow{\eta} UF$     неоднунга:  $FU \xrightarrow{\varepsilon} Id$

$S \longleftarrow F(S)$      ~~$F(S) \longleftarrow S$~~

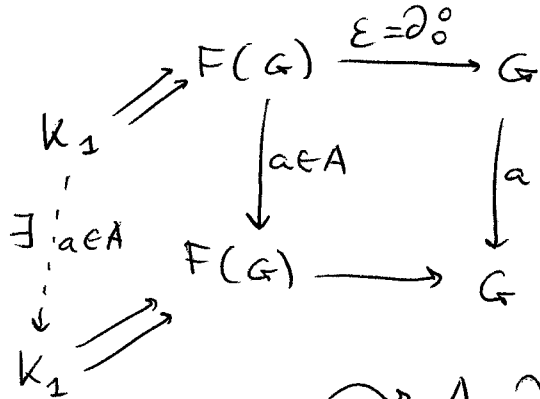
$FU(G) \longleftarrow G$

→ есть моноида на  $S$

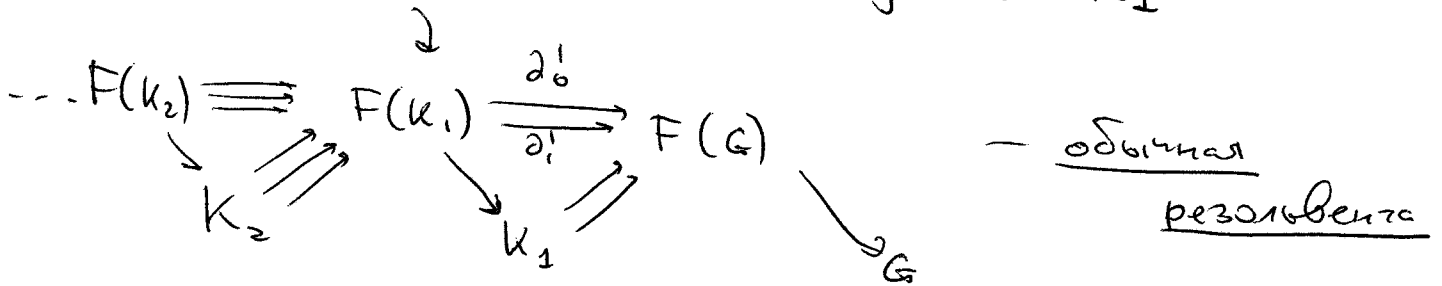
$\mathcal{F} = (F, \partial, \varepsilon), \quad \partial = F\eta U$

проект. класс:  $G \text{ т.ч. } F(G) \xrightarrow{\varepsilon} G, \quad \varepsilon i = 1_G$

$\mathbb{P}_{\mathcal{F}}$



→ A действует на  $K_1$



**Опр.** Действия  $G \curvearrowright A$  и  $A \curvearrowright G$  согласованы, если

①  $(ga)g' = (gag^{-1})g'$

②  $(ag)a' = (aga^{-1})a'$

Замечание

Даже если действия  $G \curvearrowright A$  и  $A \curvearrowright G$  согласованы, то действия  $F_G(G) \curvearrowright A$  и  $A \curvearrowright F_G(G)$  не обязаны быть согласованными:

$$g a g^{-1} \tilde{g}' = \widetilde{g a g^{-1} g'} = \widetilde{g \cdot a g^{-1} \cdot a g' \cdot a g g^{-1}}$$

$$g a g^{-1} \tilde{g}' = \tilde{g} \widetilde{a g^{-1}} \widetilde{a g'} \widetilde{a g g^{-1}}$$

$$G \curvearrowright F_G(G)$$

$$g \longmapsto \tilde{g}$$

$$F^2(G) \xrightarrow{\varepsilon_F} F(G) \longrightarrow G$$

$$(s_1 \dots s_1)^* \dots * (s'_n \dots s'_n)$$

$$X_1 \rightrightarrows X_0 \longrightarrow G$$

$$\xrightarrow{\otimes A} X_1 \otimes A \rightrightarrows X_0 \otimes A \longrightarrow 1$$

$$\xrightarrow{p-p} G_1 \otimes A \xrightarrow{- \otimes A} G_2$$

$$\pi_n(X_0 \otimes A) = L_n(- \otimes A)$$

**У-л.**  $L_0(G \otimes A) \cong G \otimes A$

**D-л.**  $\ker \partial'_0 \longrightarrow F(G) \xrightarrow{\partial''_0} G \longrightarrow 1$

$$\searrow \quad \nearrow \partial'_i$$

$$(\ker \partial'_0) \otimes A \longrightarrow F(G) \otimes A \longrightarrow G \otimes A \longrightarrow 1$$

Вспомним комплекс Митта:

$$\dots \longrightarrow X_2 \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0$$

$$N(X)_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker \partial_i^n, \quad d_n = \partial_n^n / N(X)_n$$

$$N(X)_1 = \ker \partial'_0, \quad d_1 = \partial'_1 / \ker \partial'_0$$

$$\pi_n(X_0) = H_n(N(X)_0)$$

↑  
у нас здесь  $X_0 \otimes A$

$$N(F^*(G)_0 \otimes A)_1 = \ker(\partial'_0 \otimes A)$$

$$\ker(\partial'_0 \otimes A) \xrightarrow{\partial'_0 \otimes A} F(G) \otimes A \xrightarrow{\partial''_0 \otimes A} G \otimes A \longrightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \nearrow \partial'_0 & \\ F^2(G) \otimes A & & \\ \downarrow \otimes A & \searrow \partial'_0 \otimes A & \\ F(G) \otimes A & & \end{array}$$

$$\ker(\partial'_0) \otimes A \longrightarrow F(G) \otimes A \longrightarrow G \otimes A \longrightarrow 1$$

**У-л.**  $1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{g} G_2 \longrightarrow 1$

$$\dots \longrightarrow L_{n+1}(G_2 \otimes A) \longrightarrow \pi_n(\ker(F(g)_* \otimes A)) \longrightarrow L_n(G_1 \otimes A) \longrightarrow \dots$$

D.6

$$\begin{array}{ccccc} \Rightarrow F^2(G) & \xrightarrow{\quad} & F(G) & \longrightarrow & G \\ F^2(g) \downarrow & & F(g) \downarrow & & \downarrow \\ \Rightarrow F^2(G_2) & \xrightarrow{\quad} & F(G_2) & \longrightarrow & G_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Rightarrow \text{Ker}(F^2(g) \otimes A) & \xrightarrow{\quad} & \text{Ker}(F(g) \otimes A) & \longrightarrow & \text{Ker}(g \otimes A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Rightarrow F^2(G) \otimes A & \xrightarrow{\quad} & F(G) \otimes A & \longrightarrow & G \otimes A \\ \downarrow F^2(g) \otimes A & & \downarrow F(g) \otimes A & & \downarrow g \otimes A \\ \Rightarrow F^2(G_2) \otimes A & \xrightarrow{\quad} & F(G_2) \otimes A & \longrightarrow & G_2 \otimes A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

это коммутирующие объекты!

□