Вариетальные гомологии нильпотентных групп ступени 3

20.08.2013

Ф. Павутницкий

· многообразие групп: подкатегория групп, в которых все элементы удовлетворяют некоторым тождествам

т. Биркгофа (HSP-theorem): многообразия групп = подкатегории, замкнутые отн-но взятия подобъектов, факторов, произведений.

· хотим определить гомологии для многообразий групп.

т. Квиллена: $H_n(G) = \pi_{n-1}(K(G,0)_{ab})$

свободная симплициальная резольвента

определим $H_n^{var}(G)$

$$\pi_{n-1}(K(G,0)^{var}_{ab})$$

var-свободная симплициальная резольвента

Пример: многообразие абелевых групп

$$H_n^{var}(G) = \pi_{n-1}(K(G,0)^{var}_{ab}) = \pi_{n-1}(K(G,0)^{var}) = \begin{cases} G, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

абелева

$Nil_n : [x_1, \dots, x_n] = 1$ — многообразие нильпотентных групп ступени n:

$\qquad \| $

$[\dots[[x_1,x_2],x_3],\dots,x_n]$

$\gamma_1 G = G$

$\gamma_n G = [\gamma_{n-1}G, G]$

$\gamma_{n+1} G = 1$

абелевы — ступени 1

Nil_2:

$$1 \to \gamma_n G / \gamma_{n+1} G \to G / \gamma_{n+1} G \to G / \gamma_n G \to 1$$

$$\rightsquigarrow 1 \to \gamma_2 G \to G \to G/\gamma_2 G$$

$[a_1,a_2] = a_1\otimes a_2 - a_2 \otimes a_1$

$\gamma_n G / \gamma_{n+1} G \simeq \mathcal{L}_n G_{ab}$, где $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{абелева}}}{\mathcal{L}_n A} := \langle [a_1,\dots,a_n] \mid a_1,\dots,a_n \in A \rangle$

$\mathcal{L}_n : ab \to ab$

$\mathcal{L}_2 A := \langle a\otimes b - b\otimes a \mid a,b \in A\rangle = \Lambda^2 A = A\otimes A / \langle a\otimes a, a\in A\rangle$

$H_n^{Nil_2}(G) = \pi_{n-1}(\underbrace{K(G,0)}_{Y}{}^{Nil_2}_{ab})$

$Y_{ab} = X$

$\quad \|$

$Y/\gamma_2 Y$

$$1 \to \underbrace{\gamma_2 Y}_{\Lambda^2 X} \to Y \to X \to 1$$

$$\cdots \to \pi_n \Lambda^2 X \to \underset{\substack{\parallel\\ 0}}{\pi_n Y} \to \pi_n X \to \pi_{n-1}\Lambda^2 X \to \underset{\substack{\parallel\\ 0}}{\pi_{n-1} Y} \to \pi_{n-1} X \to \cdots$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \pi_n X = \pi_{n-1}\Lambda^2 X$$

$$H_n^{Nil_2}(G) = \pi_{n-1} X$$

$$\cdots \to \underset{\substack{\parallel\\ 0}}{\pi_1 Y} \to \pi_1 X \to \underset{\substack{\parallel\\ \Lambda^2 \pi_0 X}}{\pi_0 \Lambda^2 X} \to \pi_0 Y \to \underset{\substack{\parallel\\ \pi_0 Y / \gamma_2 Y = \pi_0 Y / \gamma_2 \pi_0 Y}}{\pi_0 X} \to 0$$

$$\pi_0 X = \operatorname{coeq}\left(X_1 \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} X_0\right)$$

$$\pi_1 X = \operatorname{Ker}(\underset{\substack{\parallel\\ \Lambda^2 G_{ab}}}{\pi_0 \Lambda^2 X} \to G)$$

$$H_2^{Var} G = \pi_2 X = \pi_1 \Lambda^2 X$$

F – квадратичный функтор

аддитивен как бифунктор

$$F(A \oplus B) = F(A) \oplus F(B) \oplus F(A \mid B)$$

$$F(A \mid B) = \operatorname{Ker}\{F(A \oplus B) \to F(A) \oplus F(B)\}$$

$$F(\mathbb{Z}) \underset{P}{\overset{H}{\rightleftarrows}} F(\mathbb{Z} \mid \mathbb{Z})$$

$$HPH = 2H$$

$$PHP = 2P$$

пример:

$$S^2 : \mathbb{Z} \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}$$

$$\Gamma_2 : \mathbb{Z} \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}$$

Baues, Pirashvili, 2001

Universal coefficients formula for quadratic functors:

$F(A) = A \otimes M$

$$0 \to (\pi_0 A \otimes M)_n \to \pi_n F(A) \to (\pi_\cdot A * M)_{n-1} \to 0$$

$$\overset{\shortparallel}{\bigoplus_{\substack{i+j=n\\ i>j}} \pi_i A \otimes \pi_j A \oplus (A \otimes \mathbb{Z}/_2\ \text{odd}) \oplus \cdots}$$

$$0 \to H_2 \otimes H_1 \to H_3 \to \Omega H_1 \to 0$$

$$0 \to H_3 \otimes H_1 \otimes \Gamma_2 H_1 \to H_4 \to H_2 * H_1 \to 0$$

Переходим к Nil_3: $\gamma_4 G = 1$

$$1 \to {}^{\gamma_2 G}/_{\gamma_3 G} \to {}^{G}/_{\gamma_3 G} \to {}^{G}/_{\gamma_2 G} \to 1$$

$$\downarrow$$

$$1 \to \Lambda^2 X \to {}^{Y}/_{\gamma_3 Y} \to X \to 1$$

$$(Y = K(G,0)^{Nil_3};\ X = {}^{Y}/_{\gamma_2 Y})$$

Возьмём т. посл-сть

$$1 \to \underset{\mathcal{L}_3 Y}{\overset{\shortparallel}{\gamma_3 Y}} \to Y \to {}^{Y}/_{\gamma_3 Y} \to 1$$

$$\cdots \to \pi_n \mathcal{L}_3 Y \to \underset{0}{\overset{\shortparallel}{\pi_n Y}} \to \pi_n {}^{Y}/_{\gamma_3 Y} \xrightarrow[\simeq]{} \pi_{n-1} \mathcal{L}_3 X \to \underset{0}{\overset{\shortparallel}{\pi_{n-1} Y}} \to \cdots$$

$$1 \to \Lambda^2 X \to Y/\gamma_3 Y \to X \to 1$$

$$\Big\downarrow$$

$$\ldots \to \pi_n \Lambda^2 X \to \underbrace{\pi_n Y/\gamma_3 Y}_{= \pi_{n-1} \mathcal{L}_3 X} \to \pi_n X \to \pi_{n-1}\Lambda^2 X \to \pi_{n-1} Y/\gamma_3 Y \to \pi_{n-1} X \to \ldots$$

$$\pi_1 \mathcal{L}_3 X = ?$$

$$X \overset{h.e.}{\sim} \bigoplus_{n=0}^{\infty} K(\pi_n X, n)$$

$$\mathcal{L}_3 (A \oplus B) = \mathcal{L}_3 A \oplus \mathcal{L}_3 B \oplus \underbrace{\mathcal{L}_3 (A|B)}_{= A\otimes B\otimes A \oplus A \otimes B \otimes B}$$

$$\mathcal{L}_3\Big(\bigoplus_{n=0}^{\infty} K(\pi_n X, n)\Big)$$

$$\|$$

$$\mathcal{L}_3 K(\pi_0 X, 0) \oplus \mathcal{L}_3 \bigoplus_{n=1}^{\infty} K(\pi_n X, n) \oplus \mathcal{L}_3(\ldots|\ldots)$$

$$\| \quad \ldots \quad \|$$

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_3 K(\pi_n X, n) \oplus \ldots$$

добавки

$$\Big\downarrow \pi_n$$

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n \mathcal{L}_3 (\pi_n X, n) \oplus \pi_n \ldots$$

Для π_1:

$$0 \to \pi_0 X \otimes \pi_1 X \otimes \pi_0 X \to \pi_1 \mathcal{L}_3 X \to L_1 \mathcal{L}_3 \pi_0 X \to 0$$

$$\ldots \to \pi_1 \mathcal{L}^3 X \to \pi_2 X \to \pi_1 \Lambda^2 X \to \pi_1 Y/\gamma_3 Y \to \pi_1 X \to \pi_0 \Lambda^2 X \to \pi_0 Y/\gamma_3 Y \to \pi_0 X \to 0$$

известны