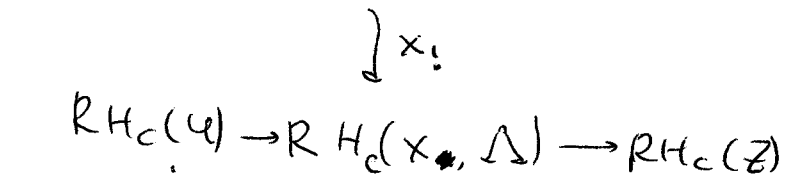
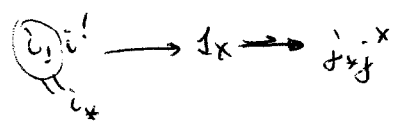
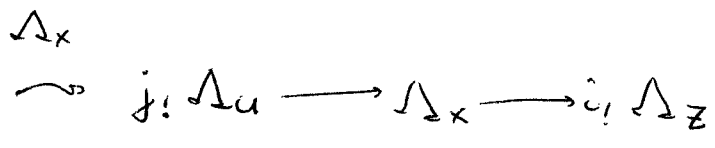
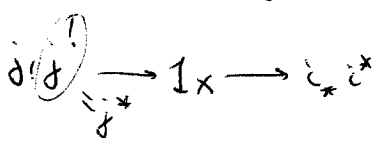
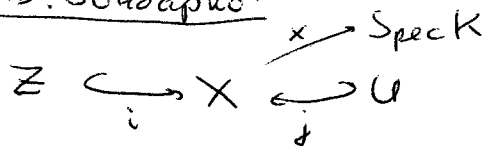
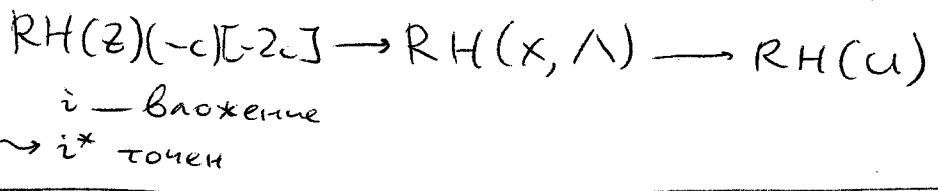


М.В. Бондарю:



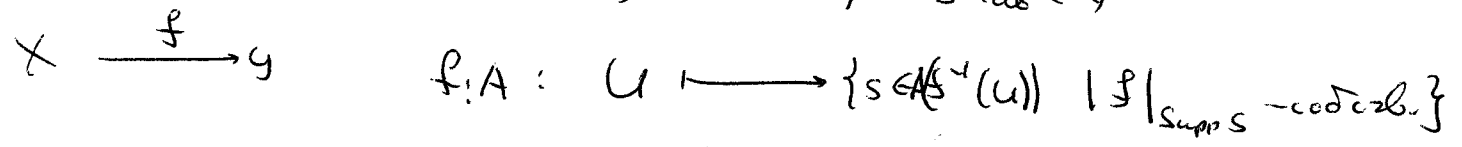
Если X, Z — многообразия, Z размерности c в X и получить длинную точную последовательность Лизанка $i^!(\Lambda_X) \rightarrow \Lambda_Z(-c)[-2c]$



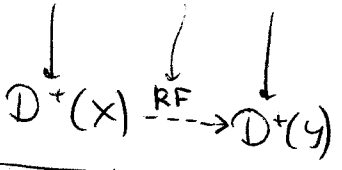
А. Лавренко

(продолжение)

X, Y — хаусдорфовы, лок. комп.; $Sh(X) = Sh_{\text{loc}}(X)$



$Sh X \mathcal{A} \xrightarrow{F} Sh Y$ — функтор, точен слева

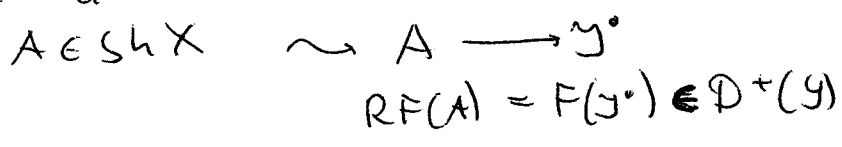


Опр. $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{O}(Sh X)$ — класс объектов

- 1) F переводит ациклические комплексы из $\mathcal{C}^+(Y)$ в ациклические
- 2) $Sh(X)$ богата объектами из \mathcal{Y}

(например, \mathcal{Y} = инъективные объекты)

Как вычислить RF ?



В каком случае: $f_!$ — точен слева

Опр. Пучок $K \in \mathcal{S}h(X)$ называется k -мягким (c-soft), если $K(X) \rightarrow K(Z) \quad \forall Z \subset X$
— комп.

(например, инвариантные пучки k -мягкие)

Можно думать, что это — приспособленный класс объектов

Опр. $A \in \mathcal{S}h(X)$ — посильный, если \forall мономорфизма $B \xrightarrow{i} C$ $B \otimes A \xrightarrow{i \otimes 1} C \otimes A$ — тоже мономорфизм

Лемма K — k -мягкий посильный пучок, A — любой; тогда $A \otimes K$ — тоже k -мягкий

Опр. $K \in \mathcal{S}h(X)$ — k -мягкий, посильный

$U \subseteq V \subseteq X$
открытие

$(K|_U)^X \rightarrow (K|_V)^X$ ← расширение 0

$$f_!(K|_U)^X \rightarrow f_!(K|_V)^X$$

$$B \in \mathcal{S}h(X)$$

$$\text{Hom}(f_!(K|_V)^X, B) \rightarrow \text{Hom}(f_!(K|_U)^X, B)$$

$$\rightsquigarrow U \mapsto \text{Hom}(f_!(K|_U)^X, B) \text{ — предпучок } f_k^! B$$

Предложение $A \in \mathcal{S}h(X), B \in \mathcal{S}h(Y)$

$$\rightsquigarrow \text{Hom}(f_!(A \otimes K), B) \cong f_* \text{Hom}(A, f_k^! B)$$

Опр. Когомологическая размерность X

— наименьшее n т.ч. $H_c^i(X, A) = 0 \quad \forall i > n \quad \forall A \in \mathcal{S}h(X)$

Далее везде считаем, что X имеет конечную когомологическую размерность n . Тогда:

Факт $\forall A \in \mathcal{S}h(X) \exists$ ограниченная k -мягкая плоская резольвента

Опр. $K^\bullet \rightarrow \mathbb{Z}_X$ — k -мягкая плоская огранич. резольвента

$$B^\bullet \in \mathcal{C}^+(Y) \quad f_k^! B^\bullet : U \mapsto \text{Hom}(f_!(K^\bullet|_U)^X, B^\bullet)$$

Это не зависит от K^\bullet ! // см. A. Borel / Intersection Cohomology et al.

\rightsquigarrow положим $f^! B^\bullet = f_k^! B^\bullet$

Можно проверить, что

$$\underline{\text{Hom}}^i(\mathcal{F}_!(A^\bullet \otimes K^\bullet), B^\bullet) \cong \mathcal{F}_* \underline{\text{Hom}}^i(A^\bullet, \mathcal{F}_!^i B^\bullet)$$

Двойственность Вердье

Теорема $A^\bullet \in \mathcal{D}^+(X)$, $B^\bullet \in \mathcal{D}^+(Y)$

$$\Rightarrow R \underline{\text{Hom}}^i(R \mathcal{F}_! A^\bullet, B^\bullet) \cong R \mathcal{F}_* R \underline{\text{Hom}}^i(A^\bullet, \mathcal{F}_!^i B^\bullet)$$

До-во: K^\bullet — k -мгкая плоская огранич. резольвента \mathcal{U}_X

~~I^\bullet~~ I^\bullet — инъективная резольвента B^\bullet

$$\mathcal{F}_!^i B^\bullet = \mathcal{F}_k^! I^\bullet$$

$$\rightarrow R \underline{\text{Hom}}^i(A^\bullet, \mathcal{F}_k^! I^\bullet) = \underline{\text{Hom}}^i(A^\bullet, \mathcal{F}_k^! I^\bullet)$$

$$R \mathcal{F}_* R \underline{\text{Hom}}^i(A^\bullet, \mathcal{F}_!^i B^\bullet) = \mathcal{F}_* \underline{\text{Hom}}^i(A^\bullet, \mathcal{F}_k^! I^\bullet)$$

$A^\bullet \otimes K^\bullet$ — k -мгкая резольвента A^\bullet

$$R \mathcal{F}_! A^\bullet = \mathcal{F}_!(A^\bullet \otimes K^\bullet)$$

$$\rightarrow R \underline{\text{Hom}}^i(R \mathcal{F}_! A^\bullet, B^\bullet) = \underline{\text{Hom}}^i(\mathcal{F}_!(A^\bullet \otimes K^\bullet), I^\bullet)$$

Следствие $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}^+(Y)}(R \mathcal{F}_! A^\bullet, B^\bullet) \cong \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}^+(X)}(A^\bullet, \mathcal{F}_!^i B^\bullet)$

До-во:

~~$C^\bullet \in \mathcal{D}^+(X)$~~

$E^\bullet \in \mathcal{D}^+(X)$

I^\bullet — инъект. резольвента E^\bullet

\rightarrow

~~$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}^+(X)}(C^\bullet, I^\bullet)$~~

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}^+(X)}(C^\bullet, E^\bullet)$$

$$\parallel$$

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}^+(X)}(C^\bullet, I^\bullet)$$

$$\parallel$$

$$\underline{\text{Hom}}_{k^+(X)}(C^\bullet, I^\bullet)$$

$$\parallel$$

$$H^0 \Gamma(X, \underline{\text{Hom}}(C^\bullet, I^\bullet))$$

$$\parallel$$

$$H^0 \Gamma(X, R \underline{\text{Hom}}(C^\bullet, E^\bullet))$$

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}^+(Y)}(R \mathcal{F}_! A^\bullet, B^\bullet) \cong H^0 \Gamma(Y, R \underline{\text{Hom}}(R \mathcal{F}_! A^\bullet, B^\bullet)) \cong$$

$$\cong H^0 \Gamma(X, R \underline{\text{Hom}}(A^\bullet, \mathcal{F}_!^i B^\bullet))$$

$$\cong \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}^+(X)}(A^\bullet, \mathcal{F}_!^i B^\bullet)$$

Фунитор двойственности

$$R\mathcal{F}_* \leftarrow R\mathcal{F}!$$

$$\mathcal{F}^* \leftarrow \mathcal{F}!$$

$$\mathcal{F}: X \longrightarrow \text{pt}$$

$$\mathcal{D}_X^\bullet \in \text{ob}(\mathcal{D}^b(X)):$$

$$\mathcal{D}_X^\bullet = \mathcal{F}^! \mathbb{Z}_{\text{pt}} \quad - \text{двухмерный комплекс}$$

I^\bullet - резольвента \mathbb{Z}_{pt}

$$u \longmapsto \Gamma(u, \mathcal{F}_k^! I^\bullet)$$

$$\text{Hom}(\mathcal{F}_! (k^\bullet|_u)^X, I^\bullet)$$

$$\Gamma_c(X, (k^\bullet|_u)^X)$$

$$\Gamma_c(u, k^\bullet|_u)$$

k^\bullet

Опр. $A^\bullet \in \mathcal{D}^b(X)$

$$\mathcal{D}_X A^\bullet = R\text{Hom}(A^\bullet, \mathcal{D}_X^\bullet)$$

- фунитор двойственности

Бореля - Мура - Вердье

$$\Gamma(u, \mathcal{D}_X A^\bullet) = ?$$

Напоминание

$$C^\bullet \in \mathcal{C}^b(A, B)$$

P^\bullet - комплекс проективных

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H^{i+1}(P^\bullet), \mathbb{Z}) \rightarrow H^{-i} \text{Hom}(P^\bullet, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H^i P^\bullet, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H^{i+1}(C^\bullet), \mathbb{Z}) \rightarrow H^{-i} \text{Hom}(C^\bullet, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H^i C^\bullet, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Теорема $A^\bullet \in \text{ob} \mathcal{D}^b(X)$, $u \in X$ - открыто

\rightsquigarrow есть к.п.

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_c^{i+1}(u, A), \mathbb{Z}) \rightarrow H^{-i}(u, \mathcal{D}_X A^\bullet) \rightarrow \text{Hom}(H_c^i(u, A), \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Д-во: \mathcal{D}_X^\bullet - комплекс из инъективных. Тогда

$\text{Hom}^\bullet(A^\bullet, \mathcal{D}_X^\bullet)$ - вялый

$$\rightsquigarrow H^i(u, \mathcal{D}_X A^\bullet) = H^i(\Gamma(u, \text{Hom}(A^\bullet, \mathcal{D}_X^\bullet))) =$$

$$= H^i(\text{Hom}(\Gamma_c(u, A^\bullet \otimes k^\bullet), I^\bullet)) \quad \mathcal{F}_k^! I^\bullet$$

$$= H^i(\text{Hom}(A^\bullet|_u, (\mathcal{F}_k^! I^\bullet)|_u)) =$$

$$(\text{Hom}(\mathcal{F}_! (A^\bullet \otimes k^\bullet), B^\bullet) \cong \mathcal{F}_* \text{Hom}^\bullet(A^\bullet, \mathcal{F}_k^! B^\bullet))$$

$$= \mathbb{H}^i(\Gamma_c(U, A^\bullet \otimes k^\bullet), I^\bullet)$$

$$= \mathbb{H}^i(\text{Hom}(\Gamma_c(U, A^\bullet \otimes k^\bullet), I^\bullet)) =$$

положим $C^\bullet = \Gamma_c(U, A^\bullet \otimes k^\bullet)$

$$0 \rightarrow \text{Ext}^i(\mathbb{H}^{i+1} C^\bullet, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{H}^{-i} \text{RHom}(C^\bullet, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{H}^i C^\bullet, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

$$\mathbb{H}^i C^\bullet = \mathbb{H}^i \Gamma_c(U, A^\bullet \otimes k^\bullet) = \mathcal{H}_c^i(U, A^\bullet)$$

$$\mathbb{H}^{-i} \text{RHom}(C^\bullet, I^\bullet) =$$

$$= \mathbb{H}^{-i}(\text{Hom}(\Gamma_c(U, A^\bullet \otimes k^\bullet), I^\bullet)) = \mathcal{H}^{-i}(U, D_x A^\bullet)$$

$$\Gamma(U, D_x I) = \text{Hom}(\Gamma_c(U, k^\bullet), I^\bullet)$$

Если коэффициенты не \mathbb{Z} , а k , ^{поле} то Ext исчезнет и мы

$$\rightarrow \mathcal{H}^{-i}(X, D_x A^\bullet) \cong \text{Hom}(\mathcal{H}_c^i(X, A^\bullet), k)$$

Предл. $f: X \rightarrow Y, A^\bullet \in \mathcal{D}^+(X), B^\bullet \in \mathcal{D}^+(Y)$

$$\Rightarrow D_y(Rf_! A^\bullet) \cong Rf_* D_x A^\bullet$$

$$D_x(f^* B^\bullet) \cong f^! D_y B^\bullet$$

Доказ.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow h & & \downarrow g \\
 & \text{pt} &
 \end{array}$$

$$D_x^\bullet = h^! \mathbb{Z}_{\text{pt}} \cong f^! g^! \mathbb{Z}_{\text{pt}} = f^! D_y^\bullet$$

$$D_y(Rf_! A^\bullet) = \text{RHom}(Rf_! A^\bullet, D_y^\bullet) \cong Rf_* (\text{RHom}(A^\bullet, f^! D_x^\bullet))$$

$$f^! \text{RHom}(B^\bullet, C^\bullet) \cong \text{RHom}(f^* B^\bullet, f^! C^\bullet)$$

$$D_x(f^* B^\bullet) = \text{RHom}(f^* B^\bullet, D_x^\bullet) \cong \text{RHom}(f^* B^\bullet, f^! D_y^\bullet)$$

Факт $D_M^\bullet \cong \mathcal{O}_M[n]$

Факт k -поле

$$\Rightarrow \mathcal{H}^{n-i}(M, k) \cong \text{Hom}(\mathcal{H}_c^i(M, k), k)$$

M — n -мерное многообразие с ориентацией
 \mathcal{O}_M — ориентирующий пучок