COURS SPÉCIALISÉS
COLLECTION SMF

Formes quadratiques sur un corps

Bruno KAHN

15

Bruno Kahn

FORMES QUADRATIQUES SUR UN CORPS

Bruno Kahn
Institut de Mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France.
E-mail : `kahn@math.jussieu.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11E04, 11E81.
Mots clefs. — Formes quadratiques, corps de fonctions de quadriques, déploiement générique.

Avec un appendice de A. Laghribi.

FORMES QUADRATIQUES SUR UN CORPS

Bruno Kahn

Résumé. — Ce livre expose la théorie des formes quadratiques sur un corps, en mettant l'accent sur la technique de Pfister-Arason-Knebusch d'extensions aux corps de fonctions de quadriques.

***Abstract* (Quadratic forms over a field).** — This book presents the theory of quadratic forms over a field, focusing on the Pfister-Arason-Knebusch technique of extensions to function fields of quadrics.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

La théorie des formes quadratiques a sans doute reçu ses lettres de noblesse avec le théorème de Hasse-Minkowski qui permet leur classification complète sur $\mathbb{Q}$, ou plus généralement sur un corps global. En y adjoignant la théorie plus fine des réseaux, ceci décrit plus exactement la théorie *arithmétique* des formes quadratiques, où la théorie des nombres joue un rôle essentiel. De nombreux ouvrages sont consacrés à ce sujet, en tout ou en partie [**40, 171, 196**]...

En revanche, les livres consacrés à la théorie « algébrique »des formes quadratiques, qui étudie leurs propriétés sur un corps quelconque, sont peu nombreux : les classiques sont ceux de Milnor-Husemöller [**164**], Lam [**146**] et Scharlau [**191**]. En voici quelques autres, un peu moins connus : Knebusch–Scharlau [**126**], Knus [**127**], Lam [**144**], Pfister [**181**], Scharlau [**190**] (en anglais) et Lorentz [**150**] (en allemand). À ma connaissance, aucun n'existe en français, à part un chapitre épuisé de Bourbaki qui ne va guère plus loin que les résultats de Witt [**32**, ch. IX].

Dans ce livre, j'ai voulu mettre en relief les *corps de fonctions de quadriques*. Ce sont Pfister et Arason qui, les premiers, ont vu leur importance particulière dans l'étude de la structure fine des formes quadratiques ; Knebusch a ensuite considérablement élargi ce point de vue avec sa théorie du déploiement générique, de la hauteur et du degré. Le passage aux corps de fonctions de quadriques (et parfois d'autres variétés projectives homogènes) est maintenant un outil d'usage constant dans ce domaine de recherche.

Ce livre offre des niveaux de difficulté variables, mais il est pour une large part d'un accès élémentaire. Attention, élémentaire ne veut pas dire facile ! Cela signifie plus modestement qu'on n'a essentiellement besoin que de la théorie élémentaire des corps et des anneaux de polynômes pour comprendre (au prix d'un travail que je ne sous-estime pas) les chapitres 1 à 5. Les chapitres 6 à 8 demandent un peu plus de connaissances : algèbres centrales simples et groupe de Brauer, qui sont rappelés dans l'appendice A. Les chapitres 9 et 10, eux, utilisent la cohomologie galoisienne, qui est rappelée dans l'appendice B, et des rudiments de la théorie des courbes, qui sont rappelés dans l'appendice C.

On voit donc que j'ai choisi une exposition par ordre de complexité croissante des notions en jeu : ce choix est cohérent d'un point de vue logique, j'espère qu'il sera efficace d'un point de vue pédagogique... Il a l'avantage de souligner qu'on peut démontrer énormément de choses sur les formes quadratiques avec des méthodes élémentaires.

Il arrive souvent qu'un même théorème ait plusieurs démonstrations très différentes ; sauf erreur, j'ai toujours choisi dans ce cas de présenter une démonstration "élémentaire". Par exemple, à la démonstration originelle du théorème d'Arason sur l'excellence des corps de fonctions de coniques (théorème 5.6.4 a)), j'ai préféré celle, "élémentaire", de Rost. De même, pour démontrer le théorème de réduction d'indice de Merkurjev (théorème 7.1.1), j'ai choisi la méthode de Tignol. Enfin, parmi les nombreuses démonstrations du théorème "2^n" de Hoffmann (théorème 5.2.2), j'ai choisi, sinon sa démonstration originelle, du moins une variante due indépendamment à Hurrelbrink–Rehmann et à C. Peschard. (On trouvera une esquisse de démonstration non élémentaire de ce théorème important dans l'appendice E : voir remarques après le théorème E.8.5).

Dans le même ordre d'idées, j'ai choisi d'exposer la théorie du déploiement générique de Knebusch sans faire intervenir les places, ni sa théorie de la spécialisation des formes quadratiques (pour ceci, je renvoie à ses articles originaux et à son livre en préparation [**119**]) : fort heureusement, tout ce qui est nécessaire pour développer cette théorie est de savoir qu'une forme anisotrope le reste après extension transcendante pure...

L'idée de ce livre remonte à un mini-cours sur les formes quadratiques en caractéristique différente de 2 donné (en espagnol) à l'Université de Mendoza en 1997 à l'occasion d'une école d'hiver du CIMPA. Les chapitres que j'ai énumérés recouvrent et étendent à la fois ce cours et sa version plus développée, donnée (en français) à l'Université Paris 7 en 1998. Mais j'ai eu la chance qu'Ahmed Laghribi veuille bien écrire un appendice supplémentaire sur les formes quadratiques et bilinéaires symétriques en caractéristique 2 (appendice D), ce qui permettra aux lecteurs de vérifier la sagacité de T.Y. Lam dans [**146**, p. xviii] :

> *Theorems on quadratic forms in characteristic not* 2 *usually become problematic (and sometimes meaningless) when they are transferred verbatim to the characteristic* 2 *case. However, experience has shown that* many *such theorems do have complete, suitably formulated analogues for fields of characteristic* 2*. What one needs is to* find *such analogues, and to* devise new proofs for them *! Thus,* each *theorem would require extra work.*

et de disposer d'un survol des résultats actuels en attendant le livre, à paraître, de Hoffmann et Laghribi sur le sujet.

De même, N. Bourbaki et ses collaborateurs ont eu la gentillesse de m'autoriser à reproduire un exposé fait à leur séminaire en 2004 (appendice E). Les méthodes qui y sont utilisées sont d'un niveau de difficulté sans comparaison avec celui du reste, bien qu'en un certain sens encore "élémentaires" (en gros, des rudiments de la théorie de l'intersection telle qu'elle est exposée dans le livre de Fulton), mais cela permet à ce livre d'être à jour sur l'état de la recherche — autant que faire se peut étant donné le rythme actuel de celle-ci, et de donner une idée des méthodes actuellement utilisées, très différentes de celles d'il y a 10 ans. Pour une exposition plus détaillée de ces méthodes, je recommande le tout récent livre d'Elman, Karpenko et Merkurjev [**48**].

Je vais maintenant mentionner brièvement ce qui aurait pu se trouver dans ce livre si on avait souhaité repousser sa date de parution d'encore 5 ans. D'abord, un survol des formes quadratiques sur les anneaux et les schémas : pour ceci, je renvoie aux exposés de Baeza [**22**], Knus [**128**] et surtout Knebusch [**124**]. Ensuite un aperçu des méthodes "triangulaires" inaugurées par P. Balmer [**27, 25**] qui a développé une théorie étonnamment simple des groupes de Witt de catégories triangulées avec dualité, recouvrant ainsi (et étendant !) les résultats antérieurs sur les schémas : pour cela, je peux renvoyer à son chapitre dans le *Handbook of K-theory* [**26**] en attendant un éventuel travail d'exposition plus développé. Ces méthodes pointent leur nez au §10.2. Enfin, la version "non commutative" de la théorie des formes quadratiques, à savoir celle des algèbres à involution. Il existe bien sûr un ouvrage de référence de Knus, Merkurjev, Rost et Tignol [**209**], mais ici encore la théorie évolue si vite qu'un nouveau texte d'exposition sera sans doute utile d'ici peu.

Bien entendu, la démonstration de la conjecture de Milnor par Voevodsky utilise des méthodes d'une sophistication telle que son exposition était hors de portée de ce livre : je peux renvoyer le lecteur intéressé à mon exposé Bourbaki [**100**]. Initialement, j'avais eu l'ambition de donner une démonstration complète du théorème de Merkurjev (conjecture de Milnor en degré 2) : même cela s'est révélé hors de portée. Heureusement, je peux renvoyer au livre de P. Gille et T. Szamuely sur le sujet [**61**], qui sera aussi utile pour lire certaines parties de l'appendice D. À titre de lot de consolation, les lecteurs trouveront une démonstration du théorème d'Arason (existence de l'invariant e^3), au chapitre 9.

Je n'ai pas hésité parfois à réécrire l'histoire pour simplifier l'exposition : par exemple, la démonstration que je donne du théorème d'Arason repose sur celui de Merkurjev. De même, dans la théorie des formes excellentes, je démontre l'important théorème 5.4.3 en utilisant le théorème 4.4.4 de Fitzgerald ; ce même théorème permet d'améliorer certains résultats de Knebusch (corollaire 5.4.5).

Les exercices n'ont pas constitué pour moi une priorité dans un livre que j'ai conçu comme une introduction à un domaine actif de recherche. Je me suis toutefois efforcé d'en inclure un certain nombre, qui sont plutôt des compléments de cours. Je demande leur indulgence aux lecteurs, en les renvoyant par exemple au livre de Lam s'ils restent sur leur faim à ce sujet. Je remercie Detlev Hoffmann de m'avoir communiqué des exercices et problèmes de ses propres cours. Enfin, je remercie Jean-Pierre Tignol, Ulf Rehmann et les rapporteurs pour leurs commentaires très utiles qui m'ont permis d'améliorer ce livre.

Paris, janvier 2008
Bruno Kahn

CHAPITRE 1

LA THÉORIE DE WITT

Ernst Witt (1937) a été longtemps considéré comme le premier à étudier les formes quadratiques sur un corps arbitraire dans [**224**] ; avant lui, les formes quadratiques avaient été considérées sur $\mathbb{R}$ (Sylvester), $\mathbb{Q}$ et les corps de nombres (Minkowski, Hasse). Récemment toutefois, Winfried Scharlau a découvert un article précurseur de Dickson [**46**].

1.1. Définitions et notations

Soit F un corps de caractéristique différente de 2.

1.1.1. — Une *forme quadratique* sur F est un espace vectoriel V muni d'une application $q : V \to F$ telle que

– $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ pour $(\lambda, x) \in F \times V$;

– $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ est bilinéaire.

La plupart du temps (sauf dans cette introduction), nous dirons « la forme quadratique q », sans mentionner l'espace vectoriel V. S'il est nécessaire de considérer V, nous l'appellerons l'*espace sous-jacent* à q. La dimension de V est appelée la *dimension* de q, et notée $\dim q$.

1.1.2. — La forme bilinéaire symétrique $\check{q}(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$ est appelée *forme polaire* de q : on a $q(x) = \check{q}(x, x)$. Il y a donc une correspondance bijective (en caractéristique $\neq 2$) entre les formes quadratiques et les formes bilinéaires symétriques.

1.1.3. — Si (V, q) est une forme quadratique, deux vecteurs $x, y \in V$ sont dits *orthogonaux* si $\check{q}(x, y) = 0$, et deux sous-espaces $W_1, W_2 \subset V$ sont dits orthogonaux si $\check{q}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in W_1 \times W_2$. Si X est une partie de V, son *orthogonal* $X^\perp$ est l'ensemble des $x \in V$ tels que $\check{q}(x, y) = 0$ pour tout $y \in X$: c'est un sous-espace vectoriel de V.

1.1.4. — Le *radical*[1] de q est le sous-espace $\operatorname{Rad} q = V^\perp$: c'est aussi le sous-espace formé des $x \in V$ tels que $q(x+y) = q(y)$ pour tout $y \in V$. On dit que q est *non dégénérée* si $\operatorname{Rad} q = \{0\}$. En général, on peut quotienter V par $\operatorname{Rad} q$; alors q passe au quotient et définit une forme quadratique non dégénérée sur $V/\operatorname{Rad} q$. De cette façon, on peut toujours se réduire à une forme non dégénérée.

1.1.5. Lemme. — *Si $W \subset V$ est un sous-espace, on a* $\operatorname{Rad}(q_{|W}) = W \cap W^\perp$*. Si W est non dégénéré* et de dimension finie*, on a $V = W \oplus W^\perp$.*

Démonstration. — La première assertion est claire. Pour la deuxième, choisissons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de W. Puisque W est non dégénéré, il existe une base duale $(f_1, \dots, f_n)$ telle que $\check{q}(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). Si $x \in V$ et $\lambda_i = \check{q}(x, e_i)$, alors $x - \sum_i \lambda_i f_i \in W^\perp$. $\square$

1.1.6. — Si $(V, q), (V', q')$ sont deux formes quadratiques, un morphisme $(V, q) \to (V', q')$ est une application linéaire $f : V \to V'$ telle que $q' \circ f = q$. De cette façon, les formes quadratiques forment une catégorie. Cette catégorie est assez simple : si q est non dégénérée, f est injective ; si de plus $\dim V < \infty$, $f(V)$ est facteur direct orthogonal de V' d'après le lemme 1.1.5. Par conséquent, les morphismes non triviaux entre formes quadratiques sont essentiellement les isomorphismes, également appelés *isométries*.

1.1.7. Notation

a) On note

$$q \simeq q'$$

s'il existe une isométrie entre q et q', et

$$q \leq q'$$

s'il existe un morphisme de q vers q' (*i.e.* si q est isométrique à une sous-forme de q').

b) Pour toute forme quadratique q, on note $O(q)$ le groupe des isométries de q ($=Aut(V, q)$ dans la catégorie ci-dessus) : c'est le *groupe orthogonal* de q.

1.1.8. Exemple. — Soit $x \in V$ tel que $q(x) \neq 0$. Posons

$$u_x(y) = y - 2\frac{\check{q}(x,y)}{q(x)}x.$$

Alors $u_x \in O(q)$. En effet, pour tout y,

$$q(u_x(y)) = q(y) - 4\frac{\check{q}(x,y)}{q(x)}\check{q}(x,y) + 4\frac{\check{q}(x,y)}{q(x)}^2 q(x) = q(y).$$

[1] Le radical est parfois appelé « noyau » ; nous n'adoptons pas cette terminologie car elle entrerait en conflit avec celle du chapitre III.

Soit W la droite engendrée par x. Sur une base de V adaptée à $(W, W^{\perp})$, la matrice de u_x s'écrit

$$\begin{pmatrix} -Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix};$$

en particulier, $u_x^2 = Id$.

1.1.9. Définition. — L'isométrie u_x est appelée *réflexion d'axe W*.

1.1.10. Définition. — Deux formes q, q' sur F sont *semblables* s'il existe $a \in F^*$ tel que $q \simeq aq'$. On notera parfois cette relation $q \propto q'$.

1.1.11. — La catégorie des formes quadratiques possède deux opérations qui en font une « catégorie bimonoïdale symétrique »[**152**] :

- *Somme directe orthogonale* : $(V, q) \perp (V', q') = (V \oplus V', q \perp q')$, où $(q \perp q')(x, x') = q(x) + q'(x')$.
- *Produit tensoriel* : en termes de formes polaires, $(V, \check{q}) \otimes (V', \check{q}') = (V \otimes V', \check{q} \otimes \check{q}')$, où $(\check{q} \otimes \check{q}')(x \otimes x', y \otimes y') = \check{q}(x, y)\check{q}'(x', y')$.

1.1.12. Définition. — Soit (V, q) une forme quadratique sur F, et soit K/F une extension. On note (V_K, q_K) la forme quadratique sur K d'espace vectoriel sous-jacent $V_K := K \otimes_F V$, caractérisée par la propriété

$$\check{q}_K(\alpha \otimes x, \beta \otimes y) = \alpha\beta\check{q}(x, y)$$

pour $(\alpha, \beta, x, y) \in K^2 \times V^2$. On dit que q_K est obtenue à partir de q par *extension des scalaires de F à K*.

1.1.13. Remarque. — Supposons $\dim q = n < +\infty$. Si l'on choisit une base (e_i) de V, q correspond au polynôme $\sum_i a_i T_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} T_i T_j$, où $a_i = q(e_i)$ et $a_{i,j} = \check{q}(e_i, e_j)$. Alors q_K est simplement la forme quadratique correspondant au même polynôme, vu comme élément de $K[T_1, \dots, T_n]$.

On a :

1.1.14. Proposition. — *Soit (V, q) une forme quadratique sur F, de dimension finie. Soit Q le polynôme associé à q par le choix d'une base de V. Si q est de rang ≥ 3, Q est irréductible.*

(Le *rang* de q est la dimension de $V/\operatorname{Rad} q$.)

Démonstration. — Supposons Q réductible. Comme il est homogène de degré 2, il est produit de deux formes linéaires φ, ψ. Si φ et ψ sont linéairement indépendantes, q est de rang 2. Sinon, q est de rang 1. □

Le lemme suivant est immédiat :

1.1.15. Lemme. — *Soit K/F une extension. L'extension des scalaires définit un foncteur (covariant) de la catégorie des F-formes quadratiques vers la catégorie des K-formes quadratiques, respectant les structures bimonoïdales.*

1.2. Les théorèmes de Witt

Jusqu'à maintenant, nous avons donné des généralités sur les formes quadratiques. Passons aux théorèmes de structure fondamentaux de Witt. À partir de maintenant, sauf dans la section 6.2, toutes les formes quadratiques sont *non dégénérées et de dimension finie*.

Le premier théorème est bien connu. Si (V, q) est une forme quadratique, on dit qu'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V est *orthogonale* si e_i est orthogonal à e_j pour $i \neq j$.

1.2.1. Théorème **([224**, Satz 2]**).** — *Toute forme quadratique q possède une base orthogonale.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur $\dim q$. Soit V l'espace vectoriel sous-jacent à q. Puisque q est non dégénérée, il existe $e_1 \in V$ tel que $q(e_1) \neq 0$. Soit $W = \langle e_1 \rangle$. Alors $q_{|W}$ est non dégénérée. En appliquant le lemme 1.1.5, on trouve $V = W \oplus W^\perp$. Par récurrence, $q_{|W^\perp}$ possède une base orthogonale. □

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthogonale de q et $x = \sum x_i e_i$, on a $q(x) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$ avec $a_i = q(e_i) \in F^*$. On résume ceci par la notation $q \simeq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. On a les formules :

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle \perp \langle b_1, \dots, b_n \rangle \simeq \langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \rangle$$
$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle \otimes \langle b_1, \dots, b_n \rangle \simeq \langle a_1 b_1, \dots, a_m b_n \rangle.$$

La démonstration du théorème 1.2.1 montre plus précisément :

1.2.2. Proposition. — *Soit q une forme quadratique de dimension n, d'espace vectoriel sous-jacent V, et soit $a \in F^*$ tel qu'il existe $x \in V$ vérifiant $q(x) = a$ (on dit que a est* représenté *par q). Alors il existe $a_2, \dots, a_n \in F^*$ tels que $q \simeq \langle a, a_2, \dots, a_n \rangle$.*

1.2.3. Lemme. — *Soient $a, b \in F^*$. Alors*

$$\langle a, b \rangle \simeq \langle a + b, ab(a + b) \rangle.$$

Démonstration. — Soient $q = \langle a, b \rangle$ et (e, f) la base canonique de F^2 (espace sous-jacent à q). Alors le système $(e + f, be - af)$ est une base orthogonale de F^2 telle que $q(e + f) = a + b$, $q(be - af) = ab(a + b)$. □

1.2.4. Lemme **(cf. [146**, ch. I, prop. 4.7]**).** — *Soit Q une forme quadratique d'espace vectoriel sous-jacent V, et soient $x, y \in V$ tels que $Q(x) = Q(y) \neq 0$. Alors il existe une réflexion (définition 1.1.9) $u \in O(Q)$ tel que $\pm u(x) = y$.*

Démonstration. — On a l'identité élémentaire (identité du parallélogramme)

$$Q(x + y) + Q(x - y) = 2Q(x) + 2Q(y).$$

Cette identité et l'hypothèse impliquent que $Q(x+y) \neq 0$ ou que $Q(x-y) \neq 0$. Supposons que $Q(x-y) \neq 0$. Posons $u = u_{x-y}$ (exemple 1.1.8). On a

$$u(x-y) = -x+y$$

et, en remarquant que $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux,

$$u(x+y) = x+y.$$

Il en résulte que $u(x) = y$. Si $Q(x+y) \neq 0$, on utilise $u = u_{x+y}$ et le signe $-$. □

1.2.5. Théorème **([224**, Satz 4]**).** — *Soient q, q_1, q_2 trois formes quadratiques sur F. Si $q \perp q_1 \simeq q \perp q_2$, alors $q_1 \simeq q_2$.*

Démonstration. — En utilisant le théorème 1.2.1, on se ramène immédiatement par récurrence au cas $\dim q = 1$, soit $q = \langle a \rangle$ pour un $a \in F^*$. Par transport de structure, on se ramène au cas où $\langle a \rangle \perp q_1 = \langle a \rangle \perp q_2 =: Q$. Soient V l'espace vectoriel sous-jacent à Q et W_1, W_2 les sous-espaces de V correspondant respectivement à q_1 et q_2. Le lemme 1.2.4 implique que $W_1^\perp$ et $W_2^\perp$ sont conjugués sous l'action de $O(Q)$; il en est donc de même pour W_1 et W_2. □

1.2.6. Définition. — Soit q une forme quadratique d'espace vectoriel sous-jacent V. Un vecteur $x \in V$ est *isotrope* si $q(x) = 0$. Un sous-espace $W \subset V$ est *totalement isotrope* si $q_{|W} = 0$. La forme q est *isotrope* s'il existe un vecteur isotrope $\neq 0$, *anisotrope* si elle n'est pas isotrope.

1.2.7. Définition. — On appelle *plan hyperbolique*, et on note $\mathbb{H}$, la forme quadratique de dimension 2, d'espace vectoriel sous-jacent F^2, définie par $q(x,y) = xy$ ($(x,y) \in F^2$).

1.2.8. Lemme

a) *Pour tout $a \in F^*$, on a $\mathbb{H} \simeq \langle a, -a \rangle$.*
b) *Toute forme quadratique isotrope de dimension 2 est isométrique à $\mathbb{H}$.*

Démonstration

a) Soit (e,f) la base canonique de F^2. Alors $(e' = e + \frac{a}{2}f, f' = e - \frac{a}{2}f)$ est une base orthogonale de q et $q(e') = a$, $q(f') = -a$.
b) Soient V l'espace sous-jacent à q et $x \in V \setminus \{0\}$ tel que $q(x) = 0$. Soit $y \in V$ non colinéaire à x. Puisque q est non dégénérée, on a $\check{q}(x,y) \neq 0$. Posons $\check{q}(x,y) = a$, $q(y) = b$. Soit
$$z = -\frac{b}{2a^2}x + a^{-1}y.$$
Alors $q(z) = 0$ et $\check{q}(x,z) = 1$.

□

1.2.9. Théorème **([224**, Satz 5]**).** — *Si q est isotrope, alors $q \simeq \mathbb{H} \perp q'$ pour une forme q' uniquement déterminée à isométrie près.*

Démonstration. — La deuxième affirmation résulte du théorème 1.2.5. Pour la première, soient V l'espace vectoriel sous-jacent à q et $x \in V \setminus \{0\}$ tel que $q(x) = 0$. Comme q est non dégénérée, il existe $y \in V$ tel que $\check{q}(x, y) \neq 0$. Soit $W = \langle x, y\rangle$: alors $q_{|W}$ est isotrope et non dégénérée. D'après le lemme 1.2.8, $q_{|W} \simeq \mathbb{H}$; d'après le lemme 1.1.5, $V = W \oplus W^{\perp}$. □

1.2.10. Définition. — On dit qu'une forme h est *hyperbolique* si $h \simeq m\mathbb{H} =$ pour m convenable.

***1.2.11. Corollaire* (Décomposition de Witt).** — *Toute forme quadratique q se décompose de manière unique (à isométrie près) en somme directe orthogonale $q_{\mathrm{an}} \perp h$, où q_{an} est anisotrope et h est hyperbolique.*

Démonstration. — L'existence résulte par récurrence du théorème 1.2.9. L'unicité résulte du théorème 1.2.5. □

1.2.12. Notation. — La forme q_{an} s'appelle la *partie anisotrope* de q. Pour toute forme quadratique q, on note $\dim_{\mathrm{an}} q$ l'entier $\dim q_{\mathrm{an}}$ (dimension anisotrope de q).

1.2.13. Corollaire. — *Si (V, q) est une forme quadratique, tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux de V ont la même dimension : l'*indice de Witt *de q, noté $i(q)$. Avec la notation du corollaire 1.2.11, on a $i(q) = \frac{1}{2}\dim h \leq \frac{1}{2}\dim q$. La forme q est hyperbolique si et seulement si $i(q) = \frac{1}{2}\dim q$.*

Le lemme suivant est d'usage constant dans la théorie :

1.2.14. Lemme. — *Soient q, q' deux formes quadratiques anisotropes. Supposons que $i(q \perp -q') \geq n$. Alors il existe des formes quadratiques φ, q_1, q_1', avec $\dim \varphi = n$, telles que*

$$q \simeq \varphi \perp q_1, \qquad q' \simeq \varphi \perp q_1'.$$

Démonstration. — Par récurrence sur n. Supposons $n = 1$: alors $q \perp -q'$ est isotrope, donc il existe $(x, x') \in V \times V'$ tels que $q(x) = q'(x') \neq 0$ (V et V' sont les espaces vectoriels sous-jacents à q et q'). L'énoncé résulte alors de la proposition 1.2.2. Si $n > 1$, en appliquant ce qui précède, on peut écrire $q \simeq \langle a\rangle \perp q_2$, $q' \simeq \langle a\rangle \perp q_2'$ pour a, q_2, q_2' convenables. Alors $i(q_2 \perp -q_2') \geq n - 1$, et on conclut par l'hypothèse de récurrence. □

1.3. L'anneau de Witt

Finalement, Witt introduit l'*anneau de Witt*, qui classifie les formes quadratiques [**224**, Satz 6].

1.3.1. Définition. — Deux formes quadratiques q, q' sont *équivalentes au sens de Witt* si $q_{\mathrm{an}} \simeq q'_{\mathrm{an}}$; on note cette relation $q \sim q'$.

Il est clair que, si q, q_1, q_2 sont trois formes quadratiques et $q_1 \sim q_2$, alors $q \perp q_1 \sim q \perp q_2$ et $q \otimes q_1 \sim q \otimes q_2$. Pour la deuxième relation, noter que (hyperbolique) $\otimes\, q =$ hyperbolique : cela résulte du lemme 1.2.8 a).

1.3.2. Définition. — L'*anneau de Witt* de F, noté $W(F)$, est l'anneau des classes d'équivalence de la relation $\sim$, pour l'addition et la multiplication induites respectivement par $\perp$ et $\otimes$.

Le théorème 1.2.5 et le corollaire 1.2.11 impliquent :

1.3.3. Corollaire. — *Une forme quadratique est caractérisée, à isométrie près, par sa dimension et sa classe dans $W(F)$.*

On a parfois besoin de considérer une variante de l'anneau de Witt, l'anneau de Witt-Grothendieck :

1.3.4. Définition. — L'*anneau de Witt-Grothendieck* de F, noté $\hat{W}(F)$, est l'anneau des classes d'équivalence de la relation $\simeq$, pour l'addition et la multiplication induites respectivement par $\perp$ et $\otimes$.

Il est clair qu'on a un homomorphisme surjectif $\hat{W}(F) \to W(F)$, de noyau isomorphe à $\mathbb{Z}$ (engendré par la classe du plan hyperbolique).

1.3.5. Proposition

a) *Le groupe additif de $\hat{W}(F)$ est présenté par les générateurs $\langle a\rangle$, $a \in F^*$, soumis aux relations $\langle ab^2\rangle = \langle a\rangle$ et aux relations du lemme 1.2.3.*
b) *Le groupe additif de $W(F)$ est présenté par les générateurs $\langle a\rangle$, $a \in F^*$, soumis aux relations $\langle ab^2\rangle = \langle a\rangle$, aux relations du lemme 1.2.3 et à la relation supplémentaire $\langle -a\rangle = -\langle a\rangle$.*

Démonstration. — Soit $V(F)$ le groupe défini par la présentation de a). Notons $[a]$ le générateur associé à un scalaire $a \in F^*$. Le lemme 1.2.3 fournit un homomorphisme surjectif $V(F) \to W(F)$ envoyant $[a]$ sur $\langle a\rangle$. Pour montrer a), il suffit de voir que, pour $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in F^*$, l'isométrie $\langle a_1, \dots, a_n\rangle \simeq \langle b_1, \dots, b_n\rangle$ entraîne l'égalité $[a_1] + \cdots + [a_n] = [b_1] + \cdots + [b_n]$.

On raisonne par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant trivial. Supposons $n = 2$. Par hypothèse, il existe $x_1, x_2 \in F$ tels que

$$b_1 = a_1x_1^2 + a_2x_2^2.$$

Si $x_2 = 0$, on a $\langle b_1\rangle = \langle a_1\rangle$ d'où $\langle b_2\rangle = \langle a_2\rangle$ et la conclusion. Si $x_1 = 0$, on raisonne de même. Si $x_1x_2 \neq 0$, quitte à remplacer a_i par $a_ix_i^2$, on peut supposer $x_1 = x_2 = 1$. En utilisant le lemme 1.2.3 et le théorème 1.2.5, on en déduit $\langle b_2\rangle \simeq \langle a_1a_2(a_1 + a_2)\rangle$, d'où de nouveau la conclusion.

Supposons enfin $n \geq 3$. Soient $q = \langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle$, $q' = \langle b_1, \dots, b_{n-1}\rangle$. On a

$$q \perp -q' \sim \langle b_n, -a_n\rangle$$

donc, d'après le lemme 1.2.14, il existe $c_1, \dots, c_{n-2}, e, f \in F^*$ tels que

$$q \simeq \langle c_1, \dots, c_{n-2}, e \rangle, \qquad q' \simeq \langle c_1, \dots, c_{n-2}, f \rangle.$$

et donc (par le théorème 1.2.5)

$$\langle e, a_n \rangle \simeq \langle f, b_n \rangle.$$

On a alors, par récurrence sur n :

$$[a_1] + \cdots + [a_{n-1}] = [c_1] + \cdots + [c_{n-2}] + [e]$$
$$[b_1] + \cdots + [b_{n-1}] = [c_1] + \cdots + [c_{n-2}] + [f]$$

et

$$[e] + [a_n] = [f] + [b_n]$$

d'où la conclusion de a) ; celle de b) s'en déduit facilement. □

La proposition suivante résulte immédiatement du lemme 1.1.15.

1.3.6. Proposition. — *Soit K/F une extension. L'extension des scalaires définit un homomorphisme d'anneaux*

$$W(F) \longrightarrow W(K).$$

La règle $F \mapsto W(F)$ définit un foncteur de la catégorie des corps commutatifs vers la catégorie des anneaux commutatifs unitaires.

Introduisons des notations qui serviront couramment dans la suite :

1.3.7. Définition. — Pour une forme quadratique q, on note

$$D(q) = \{a \in F^* \mid \exists\, x, q(x) = a\}$$
$$G(q) = \{a \in F^* \mid aq \simeq q\}.$$

Si $a \in D(q) \cup \{0\}$, on dit que q *représente* a ; si $a \in G(q)$, on dit que a est un *facteur de similitude* de q.

1.3.8. Lemme

a) *Si $q \leq q'$, $D(q) \subset D(q')$.*
b) *Si q est isotrope, $D(q) = F^*$.*
c) *Pour tout $\lambda \in F^*$, on a $G(\lambda q) = G(q)$.*
d) *$G(q)$ ne dépend que de la classe de q dans $W(F)$.*
e) *$G(q)$ est un sous-groupe de F^* contenant F^{*2} ; si $(a, b) \in G(q) \times D(q)$, alors $ab \in D(q)$.*
f) *Si $1 \in D(q)$, alors $G(q) \subset D(q)$.*

Démonstration. — a) est évident et réduit la démonstration de b) au cas $q = \mathbb{H}$, où l'énoncé est clair. c) est évident. Pour voir d), il suffit de vérifier que, pour toute forme q, on a $G(q) = G(q \perp \mathbb{H})$: cela résulte immédiatement du fait que $G(\mathbb{H}) = F^*$ (lemme 1.2.8 a)). e) est évident et f) en résulte. □

Terminons avec un lemme trivial, mais très utile.

1.3.9. Lemme. — *Soient q une forme quadratique sur F et $q' \leq q$. Si* $\dim q' > \dim q - i(q)$*, alors q' est isotrope.*

Première démonstration. — Soient V le espace sous-jacent à q, W le sous-espace de V correspondant à q' et $H \subset V$ un sous-espace totalement isotrope de dimension $i(q)$. Comme $\dim W + \dim H > \dim V$, on doit avoir $W \cap H \neq \{0\}$. □

Deuxième démonstration. — Par le lemme 1.1.5 et les corollaires 1.2.11 et 1.2.13, on peut écrire

$$q' \perp q'' \simeq q \simeq q_{\mathrm{an}} \perp i(q)\mathbb{H}$$

pour une forme q'', d'où

$$q' \perp q'' \perp -q'' \simeq q_{\mathrm{an}} \perp -q'' \perp i(q)\mathbb{H}.$$

Par le théorème 1.2.9, $q'' \perp -q'' \simeq \dim q''\mathbb{H}$ (cela peut aussi se voir directement !). Par le théorème 1.2.5, on a donc

$$q' \simeq q_{\mathrm{an}} \perp -q'' \perp (i(q) - \dim q'')\mathbb{H}$$

et q' est clairement isotrope. □

1.4. Quelques exemples d'anneaux de Witt

Dans ce livre, nous mettons l'accent sur les propriétés des formes quadratiques valables sur un corps de base quelconque. Nous nous bornerons donc ici à faire une liste rapide d'exemples où l'on sait calculer, ou au moins estimer, l'anneau de Witt d'un corps. Pour plus de détails et pour d'autres exemples, nous invitons le lecteur à se reporter au livre de Lam [**146**, Ch. II, §5, Ch. VI, Ch. VIII] ou à celui de O'Meara [**171**].

1.4.A. Corps quadratiquement clos. — Un corps F est *quadratiquement clos* si tout élément de F est un carré. Dans ce cas, on a $W(F) \simeq \mathbb{Z}/2$. Exemple : F séparablement clos (par exemple $F = \mathbb{C}$).

1.4.B. Corps euclidiens. — Un corps F est *euclidien* s'il est ordonnable (donc automatiquement de caractéristique zéro) et que, pour $x \in F^*$, soit x soit $-x$ est un carré. Dans ce cas, $W(F) \simeq \mathbb{Z}$. Exemple : F ordonné maximal (par exemple $F = \mathbb{R}$; dans ce cas, ce résultat est équivalent au *théorème d'inertie de Sylvester*).

1.4.C. Corps finis. — Soit $F = \mathbb{F}_q$ (avec q impair). Si $q \equiv 1 \pmod 4$, $W(F)$ est isomorphe à l'algèbre de groupe $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}/2]$. Si $q \equiv -1 \pmod 4$, $W(F) \simeq \mathbb{Z}/4$(2).

(2) Par contre, comme le fait observer Lam [**146**, p. 37], deux corps finis d'ordre impair quelconques ont des groupes de Witt-Grothendieck isomorphes !

1.4.D. Corps locaux. — Soit F un corps complet (ou plus généralement hensélien) pour une valuation discrète de rang 1, à corps résiduel k supposé de caractéristique différente de 2. D'après Springer, on a un isomorphisme (voir théorème C.1.15)

$$W(F) \simeq W(k)[\mathbb{Z}/2].$$

Exemples : F extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ($p \neq 2$), ou $F = k((T))$.

1.4.E. Corps de fonctions rationnelles. — Pour tout corps F (de caractéristique différente de 2), on a la suite exacte de Milnor

$$0 \longrightarrow W(F) \longrightarrow W(F(T)) \longrightarrow \bigoplus_P W(F[T]/P) \longrightarrow 0$$

où P décrit l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $F[T]$.

Pour une démonstration, voir Lam [**146**, ch. IX, th. 3.1].

1.4.F. Corps globaux. — Un *corps global* est, par définition, soit une extension finie de $\mathbb{Q}$ (corps de nombres) soit une extension finie de $\mathbb{F}_p(T)$, c'est-à-dire le corps des fonctions d'une courbe sur un corps fini. Soit F un corps global, et soit Ω l'ensemble des classes d'équivalence de ses valeurs absolues non triviales. Pour tout $v \in \Omega$, notons F_v le complété de F relativement à v. Si v est archimédienne, F est un corps de nombres et F_v est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$; si v est non archimédienne, F_v est un corps local à corps résiduel fini. Dans chacun de ces cas, $W(F_v)$ est connu d'après les exemples ci-dessus. Soit q une forme quadratique sur F, et posons $q_v = q_{F_v}$. Le *théorème de Hasse-Minkowski* affirme que, *si q_v est isotrope pour tout v, alors q est isotrope.* On en déduit que, si q et q' sont deux formes quadratiques sur F telles que $q_v \simeq q'_v$ pour tout v, alors $q \simeq q'$; cela permet « presque »de déterminer $W(F)$ en fonction des $W(F_v)$.

Une démonstration complète se trouve dans le livre d'O'Meara [**171**, Ch. VI, §66] ; une démonstration admettant les résultats de base de la théorie du corps de classes se trouve dans Lam [**146**, Ch. VI,§3] ; enfin, une démonstration dans le cas particulier $F = \mathbb{Q}$ est donnée dans Serre [**196**, Ch. III].

1.5. Un théorème de E. Artin et T.A. Springer

L'étape suivante dans le développement de la théorie est due à Albrecht Pfister, entre 1965 et 1967. Entretemps, quelques résultats importants sont démontrés par T.A. Springer, I. Kaplansky et J.W.S. Cassels. Le théorème de Cassels sera donné dans la section 2.4. Donnons seulement le théorème de Springer, déjà conjecturé par Witt [**224**] :

1.5.1. Théorème **([200])**. — *Soit q une forme quadratique sur F, et soit E/F une extension finie de degré impair. Alors $i(q_E) = i(q)$, où $q_E = q \otimes_F E$.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où q est anisotrope. On se ramène au cas où E/F est monogène, soit $E = F(\alpha)$. On raisonne par récurrence sur $n = [E : F]$, le cas $n = 1$ étant trivial.

Raisonnons par l'absurde. Soient P le polynôme minimal de α, $d = \dim q$ et $(x_1, \dots, x_d) \in E^d \setminus \{0\}$ tel que $q(x_1, \dots, x_d) = 0$. On peut écrire

$$x_i = g_i(\alpha)$$

avec $m := \max(\deg g_i) < n$ et les g_i non tous nuls ; quitte à diviser par un facteur commun, on peut de plus supposer les g_i premiers entre eux dans leur ensemble. Dans $F[T]$, on a

$$q(g_1, \dots, g_d) = Ph$$

avec

$$\deg h = 2m - n \leq n - 2.$$

En effet, l'anisotropie de q implique que $\deg q(g_1, \dots, g_d) = 2m$. En particulier, $\deg h$ est impair ; il existe donc un facteur irréductible φ de h de degré impair. On a encore $\deg \varphi \leq n - 2$.

Soit $K = F[T]/(\varphi)$: c'est une extension de F de degré impair et $< n$. Soit β l'image de T dans K. On a

$$q_K(g_1(\beta), \dots, g_d(\beta)) = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, q_K est anisotrope, donc $g_1(\beta) = \cdots = g_d(\beta) = 0$. Mais alors, φ divise tous les g_i, contrairement à l'hypothèse. $\square$

1.5.2. Corollaire. — *Pour E/F de degré impair, $W(F) \to W(E)$ est injective.*

1.5.3. Remarques. — 1) Le théorème 1.5.1 avait été démontré auparavant par Emil Artin... en 1937 (non publié) : il avait exposé oralement sa démonstration à Witt. On pourra consulter [**225**, p. 41], où Witt utilise d'autre part l'argument ci-dessus pour donner des preuves parallèles de ce théorème et du principe de norme de Knebusch (que nous ne considérons pas dans ce livre : voir [**146**, Ch. VII, §5]). Je remercie U. Rehmann de m'avoir indiqué cette référence.
Voir également le §E.3 pour une démonstration géométrique du théorème 1.5.1.
2) On peut donner une autre démonstration du corollaire 1.5.2, à l'aide du *transfert de Scharlau*. Soit E/F une extension finie, et soit $s : E \to F$ une forme F-linéaire non nulle. Soit q une forme quadratique sur E, d'espace vectoriel sous-jacent V. On définit une F-forme quadratique s_*q de la manière suivante :

- L'espace vectoriel sous-jacent à q est le F-espace vectoriel $V_{(F)}$ obtenu à partir de V par *restriction des scalaires* (oubli de la K-structure).
- Pour $x \in V_{(F)}$, $s_*q(x) = s(q(x))$.

Il est clair que s_* respecte la somme directe orthogonale ; de plus, si q est une F-forme et q' une K-forme, on a une isométrie canonique

$$s_*(q_K \otimes q') \simeq q \otimes s_*q'.$$

En particulier, si $a \in F^*$, $s_*(aq) \simeq as_*(q)$ (le cas général en résulte). On en déduit que s_* transforme hyperboliques en hyperboliques ($s_*(\langle 1, -1\rangle) \simeq s_*(\langle 1\rangle) \perp -s_*(\langle 1\rangle)$). Par suite, s_* définit un homomorphisme

$$W(E) \xrightarrow{s_*} W(F)$$

qui est *linéaire* pour les structures de $W(F)$-modules sur $W(F)$ et $W(E)$ (la deuxième provenant de l'extension des scalaires). C'est le *transfert de Scharlau* associé à s. En particulier, on a pour tout $x \in W(F)$

$$s_*(x_E) = s_*(1)x.$$

On montre facilement que, si $n = [E : F]$ est impair, on peut choisir s tel que $s_*(1) = 1$ (pour cela, on se ramène au cas monogène comme dans la démonstration de Springer ; si $E = F(\alpha)$, tout $x \in E$ s'écrit $f_x(\alpha)$ pour un unique polynôme f_x de degré $\leq n - 1$; alors $s(x) =$ coefficient de T^{n-1} dans f_x convient). Le corollaire 1.5.2 en résulte immédiatement.

1.6. Exercices

***1.6.1* (Lam).** — Soit F un corps tel que F^*/F^{*2} soit fini et que $-1 \in F^{*2}$. Montrer que $W(F)$ est fini. Ce résultat subsiste-t-il si on retire l'hypothèse que $-1 \in F^{*2}$?

***1.6.2*.** — Monter que, dans la démonstration du lemme 1.2.4, $Q(x - y) = 0$ est impossible si $\dim V = 2$.

***1.6.3* (Théorème de Cartan-Dieudonné faible).** — Utiliser le lemme 1.2.4 pour montrer que, si $\dim Q = n$, toute isométrie de Q est produit d'au plus $2n$ réflexions. On raisonnera par récurrence sur n.
(*Le théorème de Cartan-Dieudonné remplace cette borne par n. Pour des démonstrations, voir J. Dieudonné,* Sur les groupes classiques*, Hermann, 1967, p. 20, prop. 8, ou* [**146**, ch. I, §7].)

***1.6.4* (D'après Nekovář et Oesterlé [169, 2.2.2]).** — Soit $u \in O(Q)$. Montrer que

$$\det(u) = (-1)^{\mathrm{rg}(1-u)}.$$

(*Soit x tel que $Q(x) \neq 0$: montrer que* $\mathrm{rg}(1 - u_x u) = \mathrm{rg}(1 - u) \pm 1$ *; conclure à l'aide de l'exercice précédent.*)

***1.6.5*.** — Soit $q = \langle a, b\rangle$ une forme binaire, et soit $c \in D(q)$. Montrer que $q \simeq \langle c, abc\rangle$.

***1.6.6** (Équivalence par chaînes, cf. [146, ch. I, §5], [196, p. 56, Th. 2])**

Soient deux formes équivalentes $q = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \simeq q' = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$. En utilisant la proposition 1.2.2 et le théorème de simplification de Witt 1.2.5, montrer qu'il existe une suite $q = q_1, \ldots, q_r = q'$ de formes telles que $q_i \simeq q_{i+1}$, $q_i = \langle a_1^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}\rangle$ et que, pour un i donné, $a_k^{(i)}$ ne diffère de $a_k^{(i+1)}$ que pour au plus deux valeurs de k.

(*On peut supposer* $n \geq 3$. *Raisonner par récurrence sur* n ; *écrire* $a_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2$. *Exclure d'abord le cas où* $b_i x_i^2 + b_j x_j^2 = 0$ *pour tout* $i \neq j$. *Appliquer ensuite l'exercice 1.6.5 à la forme* $\langle b_j, b_j \rangle$ *où* (i,j) *est tel que* $b_i x_i^2 + b_j x_j^2 \neq 0$.)

CHAPITRE 2

LA THÉORIE DE PFISTER

2.1. Formes de Pfister

Dans les trois articles [**177**], [**176**], [**178**], Pfister pousse la théorie de Witt beaucoup plus loin. Pour exposer son travail, il faut introduire l'*idéal fondamental* (d'augmentation) IF de $W(F)$. L'augmentation de $W(F)$ est

$$\overline{\dim} : W(F) \longrightarrow \mathbb{Z}/2$$

qui est défini parce que les formes hyperboliques sont de dimension paire ; IF est le noyau de $\overline{\dim}$.

2.1.1. Lemme

a) *L'idéal IF est engendré additivement par les formes binaires*

$$\langle 1, -a\rangle,\ a \in F^*.$$

b) *La puissance n-ième $I^nF := (IF)^n$ est engendrée additivement par les produits tensoriels de n formes binaires*

$$\langle 1, -a_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n\rangle =: \langle\langle a_1 \ldots, a_n\rangle\rangle.$$

Démonstration

a) Il est clair que IF est engendré additivement par les formes binaires $\langle a, b\rangle$, $a, b \in F^*$. On a

$$\langle a, b\rangle \sim \langle 1, a\rangle \perp -\langle 1, -b\rangle.$$

b) résulte immédiatement de a).

□

2.1.2. Définition

a) Les formes de type $\langle\langle a_1 \ldots, a_n\rangle\rangle$ sont appelées *n-formes de Pfister* ; elles sont de dimension 2^n. Une forme q est une *forme de Pfister* si q est une n-forme de Pfister pour un n convenable.

b) Si φ est une forme de Pfister, elle représente 1 ; la forme φ' telle que $\langle 1\rangle \perp -\varphi' \simeq \varphi$ est appelée *forme pure* associée à φ.

c) On note

- $P_n(F)$ l'ensemble des classes d'isométrie de n-formes de Pfister ; $P(F) = \bigcup_n P_n(F)$.
- $GP_n(F) = \{[q] \in W(F) \mid \exists\, a \in F^*, aq \in P_n(F)\}$; $GP(F) = \bigcup_n GP_n(F)$.

2.1.3. Remarque. — On prendra garde que les conventions utilisées ici entrent en conflit avec celles de Lam [**146**]. La forme que nous notons $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ est notée par Lam $\langle\langle -a_1, \dots, -a_n\rangle\rangle$; de même, la forme pure associée à une forme de Pfister φ au sens de Lam est $-\varphi'$, où φ' est la forme pure associée à φ au sens de ce cours. En général, il faut toujours s'assurer des conventions choisies par l'auteur en lisant un article sur les formes quadratiques. Nous offrons deux justifications pour notre convention :

- L'identité

(2.1.1)
$$\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n b_n\rangle\rangle \perp \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, b_n\rangle\rangle \sim \langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \perp \langle\langle a_1, \dots, b_n\rangle\rangle$$

  qui résulte immédiatement du cas trivial $n = 1$. (En particulier, le symbole $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ est *multilinéaire* modulo $I^{n+1}F$.)
- La comparaison avec la cohomologie galoisienne (voir chapitre VI).

On a parfois besoin de comparer l'idéal d'augmentation de $W(F)$ à celui de l'anneau de Witt-Grothendieck $\hat{W}(F)$ (définition 1.3.4). La dimension des formes définit sur $\hat{W}(F)$ un homomorphisme
$$\dim : \hat{W}(F) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Notons son noyau $\hat{I}F$, et $\hat{I}^nF = (\hat{I}F)^n$. L'homomorphisme $\hat{W}(F) \to W(F)$ induit des homomorphismes $\hat{I}^nF \to I^nF$.

2.1.4. Proposition. — *Ces homomorphismes sont bijectifs pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. — Il suffit de le montrer pour $n = 1$. Pour la surjectivité, on remarque que $\langle 1\rangle - \langle a\rangle$ s'envoie sur $\langle 1, -a\rangle$. Pour l'injectivité, soient q, q' de même dimension telles que $q - q'$ s'envoie sur 0 dans $W(F)$. Alors $q \perp -q' \sim 0$, donc $q \simeq q'$. □

Par abus de notation, on écrira souvent $q \in P_n(F)$ ($q \in GP_n(F) \dots$) pour exprimer que q est une n-forme de Pfister (semblable à une n-forme de Pfister...). Les formes de Pfister sont des objets fondamentaux de la théorie algébrique des formes quadratiques.

Pour $n = 1$, la forme $\varphi = \langle 1, -a\rangle$ est la norme de l'extension quadratique $A = F(\sqrt{a})$ de F. Pour $n = 2$, $\varphi = \langle\langle a, b\rangle\rangle$ est la norme réduite de l'algèbre de quaternions

$A = (a, b)$. Pour $n = 3$, $\varphi = \langle\langle a, b, c\rangle\rangle$ est la « norme »de l'algèbre d'octonions (non associative) A déterminée par a, b, c. Dans chaque cas, on a

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

pour $x, y \in A$. En particulier, si $\varphi(x) \neq 0$ on a $\varphi \simeq \varphi(x)\varphi$; en d'autres termes, $D(\varphi) = G(\varphi)$.

Quand $n \geq 4$, $\varphi = \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ correspond à une algèbre A déterminée par $a_1, \ldots, a_n$ (l'algèbre de Cayley-Dixon, cf. Schafer [**189**, Ch. III, §4]), mais il n'est plus vrai que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ en général. Néanmoins, Pfister a démontré le théorème remarquable suivant :

2.1.5. Théorème **(**[**176**, Theorem 2]**).** — *Pour toute forme de Pfister φ, $\varphi(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi \simeq \varphi(x)\varphi$. En d'autres termes, $D(\varphi) = G(\varphi)$.*

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin d'un peu de préparation.

2.1.6. Lemme. — *Pour tous $a, b, t \in F^*$, on a*

$$\langle\langle a, b\rangle\rangle \simeq \langle\langle -ab, a + b\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle a, b\rangle\rangle \simeq \langle\langle a, (t^2 - a)b\rangle\rangle.$$

Démonstration. — On a, d'après le lemme 1.2.3

$$\langle -a, -b\rangle \simeq \langle -a - b, ab(-a - b)\rangle$$

d'où

$$\langle\langle a, b\rangle\rangle = \langle 1, -a, -b, ab\rangle \simeq \langle 1, ab, -a - b, ab(-a - b)\rangle = \langle\langle -ab, a + b\rangle\rangle.$$

D'autre part, comme $\langle 1, -a\rangle$ vérifie la condition du théorème 2.1.5 (voir remarques le précédant), on a

$$\langle 1, -a\rangle \simeq (t^2 - a)\langle 1, -a\rangle$$

d'où

$$\langle -b, ab\rangle \simeq \langle -(t^2 - a)b, (t^2 - a)ab\rangle$$

et

$$\langle\langle a, b\rangle\rangle = \langle 1, -a, -b, ab\rangle \simeq \langle 1, -a, -(t^2 - a)b, (t^2 - a)ab\rangle = \langle\langle a, (t^2 - a)b\rangle\rangle.$$

□

2.1.7. Proposition. — *Soit $\varphi = \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ une n-forme de Pfister, et soit $b \in D(\varphi')$, où φ' est la forme pure associée à φ. Alors il existe $b_2, \ldots, b_n \in F^*$ tel que $\varphi \simeq \langle\langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle$.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, on a $b = a_1c^2$ pour un $c \in F^*$ et l'assertion est évidente. Supposons $n > 1$ et soit $\tau = \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle \simeq \langle 1\rangle \perp -\tau'$, d'où

$$\varphi' = \tau' \perp a_n\tau.$$

Écrivons $b = x + a_n y$, avec $x \in D(\tau') \cup \{0\}$, $y \in D(\tau) \cup \{0\}$. On distingue plusieurs cas :

1) Si $y = 0$, on a $x \neq 0$ et $b \in D(\tau')$, donc (par récurrence) $\tau \simeq \langle\langle b, b_2, \dots, b_{n-1}\rangle\rangle$ et donc $\varphi \simeq \langle\langle b, b_2, \dots, b_{n-1}, a_n\rangle\rangle$.

2) Si $y \neq 0$, on montre que $\varphi \simeq \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n y\rangle\rangle$. Pour cela, on écrit $y = t^2 - y_0$ avec $y_0 \in D(\tau') \cup \{0\}$.

a) Si $y_0 = 0$, $y = t^2$ et l'assertion est claire.

b) Si $y_0 \in D(\tau')$, on a (par récurrence) $\tau \simeq \langle\langle y_0, c_1, \dots, c_{n-1}\rangle\rangle$, donc

$$\begin{aligned}\varphi &\simeq \langle\langle y_0, c_2, \dots, c_{n-1}, a_n\rangle\rangle\\ &\simeq \langle\langle y_0, c_2, \dots, c_{n-1}, (t^2 - y_0)a_n\rangle\rangle \quad \text{(lemme 2.1.6)}\\ &= \langle\langle y_0, c_2, \dots, c_{n-1}, a_n y\rangle\rangle\\ &\simeq \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n y\rangle\rangle\end{aligned}$$

comme désiré.

Si $x = 0$, on a $a_n y = b$ et on a fini. Si $x \in D(\tau')$, on peut écrire $\tau \simeq \langle\langle x, d_2, \dots, d_{n-1}\rangle\rangle$, donc

$$\begin{aligned}\varphi &\simeq \langle\langle x, d_2, \dots, d_{n-1}, a_n y\rangle\rangle\\ &\simeq \langle\langle x + a_n y, d_2, \dots, d_{n-1}, -x a_n y\rangle\rangle \quad \text{(lemme 2.1.6)}\\ &\simeq \langle\langle b, \dots, \rangle\rangle.\end{aligned}$$

□

2.1.8. Corollaire. — *Une forme de Pfister φ isotrope est hyperbolique.*

Démonstration. — Si φ est isotrope, $1 \in D(\varphi')$, donc $\varphi \simeq \langle\langle 1, \dots, \rangle\rangle$ qui est clairement hyperbolique. □

Démonstration du théorème 2.1.5. — Écrivons $\varphi(x) = t^2 - a$, avec $a \in D(\varphi') \cup \{0\}$. Si $a = 0$, l'énoncé est clair. Si $a \in D(\varphi')$, on a d'après la proposition 2.1.7 $\varphi \simeq \langle\langle a\rangle\rangle \otimes \tau$ pour une forme (de Pfister) τ convenable. Alors

$$\varphi(x)\varphi = (t^2 - a)\langle\langle a\rangle\rangle\tau \simeq \langle\langle a\rangle\rangle\tau \simeq \varphi$$

puisque $\langle\langle a\rangle\rangle$ est multiplicative. □

2.1.9. Corollaire. — *Deux formes de Pfister semblables (définition 1.1.10) sont isométriques.*

Démonstration. — En effet, si φ, φ' sont deux formes de Pfister et $a \in F^*$ est tel que $a\varphi \simeq \varphi'$, alors $1 \in D(\varphi) \Rightarrow a \in D(\varphi')$, donc $\varphi' \simeq a\varphi'$ par le théorème 2.1.5. □

2.1.10. Corollaire. — *Soit $\varphi \in P(F)$. Alors, pour tout $a \in D(\varphi)$ et $b \in F^*$,*

a) *$\varphi \otimes \langle\langle a\rangle\rangle \sim 0$;*

b) *$\varphi \otimes \langle\langle ab\rangle\rangle \simeq \varphi \otimes \langle\langle b\rangle\rangle$.*

Démonstration. — a) résulte immédiatement du théorème 2.1.5 ; b) résulte de a) et de l'identité (2.1.1). □

2.1.11. Corollaire. — *Soit q une forme quadratique de dimension > 1 sur F, et soit $\varphi \in P_n(F)$. Supposons que $q \otimes \varphi$ soit isotrope. Alors*

a) *Il existe une forme isotrope q' telle que $q \otimes \varphi \simeq q' \otimes \varphi$.*
b) *La partie anisotrope de $q \otimes \varphi$ est de la forme $\rho \otimes \varphi$.*
c) *L'indice de $q \otimes \varphi$ est un multiple de 2^n.*

Démonstration

a) Si φ est isotrope, elle est hyperbolique et le résultat est clair. Supposons φ anisotrope. Écrivons $q \simeq \langle a_1, \dots, a_n\rangle$. Par hypothèse, il existe $b_1, \dots, b_n \in D(\varphi) \cup \{0\}$ tel que

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 0$$

avec les b_i non tous nuls. Sans perte de généralité, on peut supposer $b_1, \dots, b_r \in D(\varphi)$ et $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$ $(0 < r \leq n)$. Posons

$$q' = \langle a_1 b_1, \dots, a_r b_r, a_{r+1}, \dots, a_n\rangle.$$

Alors q' est isotrope, et

$$\begin{aligned} q' \otimes \varphi &\simeq a_1 b_1 \varphi \perp \cdots \perp a_r b_r \varphi \perp a_{r+1}\varphi \perp \cdots \perp a_n \varphi \\ &\simeq a_1 \varphi \perp \cdots \perp a_r \varphi \perp a_{r+1}\varphi \perp \cdots \perp a_n \varphi \simeq q \otimes \varphi. \end{aligned}$$

b) Soit q' comme en a), avec $m = i(q')$ maximal. On peut écrire

$$q \otimes \varphi \simeq (m\mathbb{H} \perp \rho) \otimes \varphi \sim \rho \otimes \varphi$$

et $\rho \otimes \varphi$ est anisotrope d'après a).
c) Résulte de b).

□

2.2. Applications aux sommes de carrés ; le niveau d'un corps

Le théorème 2.1.5 généralise des résultats de [**177**], où Pfister étudie le *niveau* d'un corps F. Par définition, le niveau de F est le plus petit entier $s(F)$ tel que -1 soit une somme de $s(F)$ carrés de F. Si un tel entier n'existe pas, on pose $s(F) = +\infty$. On a le résultat classique d'Artin-Schreier :

2.2.1. Théorème. — $s(F) = +\infty$ *si et seulement si F peut être muni d'une structure de corps ordonné. On dit alors que F est* formellement réel.

2.2.2. Théorème **([177]).** — *Si $s(F)$ est fini, il est égal à une puissance de 2.*

Démonstration. — Posons $s = s(F)$; soit n l'entier tel que $2^n \leq s < 2^{n+1}$. Posons

$$\varphi = \langle\langle -1 \rangle\rangle^{\otimes n}.$$

La définition de s implique qu'il existe x, y, avec $y \neq 0$, tels que $\varphi(x) = -\varphi(y)$. On a $\varphi(y) \neq 0$, sans quoi on aurait $s < 2^n$. Par conséquent

$$-1 = \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \in D(\varphi)$$

d'après le théorème 2.1.5. On a donc $s \leq 2^n$. □

On va en profiter pour obtenir quelques renseignements sur l'anneau $W(F)$. Rappelons que, si A est un groupe abélien, l'*exposant* de A est le plus petit entier $m > 0$ tel que $mA = 0$ (ou $+\infty$ si un tel entier n'existe pas).

2.2.3. Proposition ([**176**, Satz 6])

a) *L'exposant de* $W(F)$ *est* $2s(F)$.

b) *Si* $s(F) < +\infty$, *tout élément de* IF *est nilpotent. En particulier,* $W(F)$ *est un anneau local d'idéal maximal* IF.

Démonstration

a) L'exposant du groupe additif d'un anneau est égale à l'ordre de l'élément unité. Comme $s = s(F)$ est une puissance de 2, il suffit de montrer :
   - $s\langle 1 \rangle \not\sim 0$;
   - $2s\langle 1 \rangle \sim 0$.

   La première assertion résulte de la définition de s ; pour la deuxième, on remarque que $(s+1)\langle 1 \rangle$ est une sous-forme isotrope de la forme de Pfister $2s\langle 1 \rangle$, qui est donc hyperbolique par le corollaire 2.1.8.

b) Pour toute forme $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ de dimension n, on a

$$q \otimes q \simeq \underbrace{\langle 1, \ldots, 1 \rangle}_{n} \perp \mathop{\perp}_{i \neq j} \langle a_i a_j \rangle \simeq \underbrace{\langle 1, \ldots, 1 \rangle}_{n} \perp \varphi \perp \varphi$$

   avec

$$\varphi = \mathop{\perp}_{i<j} \langle a_i a_j \rangle.$$

   Si $q \in IF$, on a donc $q^2 \in 2W(F)$, d'où

$$q^{2r} \in 2^r W(F) \quad \text{pour tout} \quad r > 1.$$

   La nilpotence de q résulte donc de a). La dernière assertion en résulte.

□

Pour F quelconque, un élément de torsion de $W(F)$ est toujours de torsion 2-primaire ; plus généralement, tout élément de $W(F) \setminus IF$ est non diviseur de 0 dans l'anneau $W(F)$ [**178**, Satz 11], cf. corollaire 3.3.4 ci-dessous (c'est clair si F n'est pas ordonnable d'après la proposition 2.2.3). Finalement, le *spectre* de $W(F)$ est connu : si F n'est pas ordonnable, la proposition 2.2.3 montre que le seul idéal premier de $W(F)$

est IF. Si F est ordonné maximal, la signature induit un isomorphisme $W(F) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ (théorème d'inertie de Sylvester). Si F est ordonnable, tout ordre v sur F définit un plongement de F dans un corps ordonné maximal F_v, d'où un homomorphisme $W(F) \xrightarrow{\varphi_v} W(F_v) \simeq \mathbb{Z}$. Le noyau $\mathfrak{p}_v$ de φ_v est un idéal premier de $W(F)$, ainsi que $\mathfrak{p}_{v,p} = \varphi_v^{-1}(pW(F_v))$ pour tout nombre premier p. (Noter que $\mathfrak{p}_{v,2} = IF$ pour tout v.) Réciproquement :

***2.2.4. Théorème* (Lorenz-Leicht [151], Harrison).** — *Si F est ordonnable, tout idéal premier de $W(F)$ est de la forme $\mathfrak{p}_{v,p}$ pour un couple (v,p) convenable ($p = 0$ ou un nombre premier). De plus, $\mathfrak{p}_{v,p} = \mathfrak{p}_{v',p'}$ si et seulement si*

– *soit $p = p' = 2$;*

– *soit $v = v'$, $p = p'$.*

*(*Spec $W(F)$ *est un « bouquet » d'exemplaires de* Spec $\mathbb{Z}$*, paramétrés par les ordres de F et recollés aux points-bases* (2)*.)*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $W(F)$, et soit p la caractéristique du corps des fractions de $W(F)/\mathfrak{p}$. Supposons d'abord $p = 2$. Pour tout $a \in F^*$, on a $\langle a\rangle^2 = \langle 1\rangle$; par conséquent $\langle a\rangle \equiv 1 \pmod p$ et, pour toute forme quadratique q, on a $q \equiv \dim q \pmod p$. Il en résulte que $\mathfrak{p} = IF$. Supposons maintenant $p \neq 2$. Notons

$$P = \{a \in F^* \mid \langle a\rangle \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}\}.$$

Montrons que P est l'ensemble des éléments positifs pour une structure de corps ordonné sur F. Il faut vérifier que P est stable par addition et multiplication et que $F^* = P \cup -P$. Il est clair que P est stable par multiplication. Pour tout $a \in F^*$, on a $\langle a\rangle^2 = 1$, donc $\langle a\rangle \equiv \pm 1 \pmod{\mathfrak{p}}$, donc $F^* = P \cup -P$. Enfin, si $a, b \in P$, le lemme 1.2.3 implique que $2\langle a+b\rangle \equiv 2 \pmod p$, donc que $a + b \in P$.

Soient v l'ordre correspondant à P et F_v un corps ordonné maximal associé à v. Si $q = \langle a_1, \dots, a_n\rangle \in \mathfrak{p}_v$, on a $r = s$, où r (resp. s) est le nombre de a_i appartenant à P (resp. à $-P$). Par conséquent, $\mathfrak{p}_v \subset \mathfrak{p}$, d'où l'on déduit facilement que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{v,p}$. De plus l'argument montre que, si $\mathfrak{p}_{v,p} = \mathfrak{p}_{v',p'}$, on a $v = v'$ (et $p = p'$). □

Dans [**179**], Pfister applique ses résultats au 17ème problème de Hilbert : si R est un corps ordonné maximal et si $f \in R(T_1, \dots, T_n)$ est une fonction rationnelle telle que $f(a_1, \dots, a_n) \geq 0$ pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in R^n$ tel que $f(a_1, \dots, a_n)$ soit défini, alors f est somme de 2^n carrés dans $R(T_1, \dots, T_n)$. (E. Artin avait déjà obtenu que f est somme de carrés.) Pour des démonstrations élégantes de tous ces résultats, nous renvoyons à [**146**, ch. X et XI].

2.3. Formes de Pfister liées

2.3.1. Définition. — Soient φ_1, φ_2 deux formes de Pfister. On dit que φ_1 et φ_2 sont *r-liées* s'il existe une r-forme de Pfister τ et deux formes de Pfister ψ_1, ψ_2 telles que $\varphi_1 \simeq \tau \otimes \psi_1$, $\varphi_2 \simeq \tau \otimes \psi_2$. On dit que φ_1 et φ_2 sont *liées* si $\varphi_1, \varphi_2 \in P_n(F)$ et $r = n - 1$.

***2.3.2. Théorème* (cf. Elman-Lam** [**49**, th. 4.5]). — *Soient φ_1, φ_2 deux formes de Pfister anisotropes et soient $a_1, a_2 \in F^*$. Alors $i(a_1\varphi_1 \perp a_2\varphi_2) = 0$ ou 2^r, où r est le plus grand entier tel que φ_1 et φ_2 soient r-liées.*

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de la généralisation suivante de la proposition 2.1.7 :

2.3.3. Proposition. — [**49**, th. 2.6] *Soient $\varphi \in P_r(F)$, $\psi \in P_s(F)$ deux formes de Pfister, avec $s > 1$, et soit ψ' la forme pure associée à φ. Si $a \in D(\psi' \otimes \varphi)$, alors il existe $\tau \in P(F)$ tel que $\psi \otimes \varphi \simeq \langle\langle a \rangle\rangle \otimes \tau \otimes \varphi$.*

Démonstration. — Récurrence sur s. Si $s = 1$, alors $\psi \simeq \langle\langle b \rangle\rangle$ et $a \in D(b\varphi)$, c'est-à-dire $ab \in D(\varphi)$. Par le corollaire 2.1.10, on a donc

$$\langle\langle a \rangle\rangle \otimes \varphi \simeq \langle\langle b \rangle\rangle \otimes \varphi.$$

Supposons maintenant $s > 1$ et posons $\psi \simeq \langle\langle b \rangle\rangle \otimes \psi_1$. Soit ψ_1' la forme pure associée à ψ_1. On a donc

$$\psi' \otimes \varphi \simeq b\psi_1 \otimes \varphi \perp \psi_1' \otimes \varphi.$$

Écrivons

$$a = bx + y \quad \text{avec} \quad x \in D(\psi_1 \otimes \varphi) \cup \{0\}, y \in D(\psi_1' \otimes \varphi) \cup \{0\}.$$

Supposons d'abord $x, y \neq 0$. On procède en deux étapes :

1) $$\psi \otimes \varphi \simeq \langle\langle b \rangle\rangle \otimes \psi_1 \otimes \varphi \simeq \langle\langle bx \rangle\rangle \otimes \psi_1 \otimes \varphi$$

par le corollaire 2.1.10.

2) Par récurrence, il existe $\tau_1 \in P_{s-2}(F)$ tel que

$$\psi_1 \otimes \varphi \simeq \langle\langle y \rangle\rangle \otimes \tau_1 \otimes \varphi. \tag{2.3.1}$$

D'après 1) et le lemme 2.1.6, on a donc

$$\psi \otimes \varphi \simeq \langle\langle bx, y \rangle\rangle \otimes \tau \otimes \varphi \simeq \langle\langle a, -bxy \rangle\rangle \otimes \tau_1 \otimes \varphi.$$

Si $y = 0$, on a $a = bx$ et 1) donne la conclusion. Si $x = 0$, alors $a = y$ et $\langle\langle b \rangle\rangle \otimes$(2.3.1) donne la conclusion. □

Démonstration du théorème 2.3.2. — Soient $\tau \in P_r(F)$, $\psi_1, \psi_2 \in P(F)$ telles que $\varphi_1 \simeq \tau \otimes \psi_1$, $\varphi_2 \simeq \tau \otimes \psi_2$, avec r maximal. Si $a_1\varphi_1 \perp a_2\varphi_2$ est anisotrope, il n'y a rien à démontrer. Supposons cette forme isotrope. Il existe donc $b \in D(a_1\varphi_1) \cap D(-a_2\varphi_2)$; autrement dit, $a_1 b \in D(\varphi_1)$ et $-a_2 b \in D(\varphi_2)$. Alors

$$a_1\varphi_1 \simeq b\varphi_1, \quad a_2\varphi_2 \simeq -b\varphi_2.$$

Sans perte de généralité, on peut donc supposer $a_1 = 1$, $a_2 = -1$. On a

$$\varphi_1 \perp -\varphi_2 \sim \tau \otimes (\psi_2' \perp -\psi_1')$$

où ψ'_1 et ψ'_2 sont les formes pures associées à ψ_1 et ψ_2. On a

$$\dim(\varphi_1 \perp -\varphi_2) - \dim(\tau \otimes (\psi'_2 \perp -\psi'_1)) = 2^{r+1}.$$

Tout revient donc à montrer que $\tau \otimes (\psi'_2 \perp -\psi'_1)$ est anisotrope. Supposons le contraire. Soit $a \in D(\tau \otimes \psi'_1) \cap D(\tau \otimes \psi'_2)$. De la proposition 2.3.3, on déduit alors que φ_1 et φ_2 sont $r+1$-liées, ce qui contredit la maximalité de r. $\square$

2.4. Théorèmes de Cassels-Pfister

Dans [**39**], Cassels démontre que si $f \in F[T]$ est somme de n carrés dans $F(T)$, alors il est somme de n carrés de $F[T]$. Dans [**176**], Pfister généralise ce théorème. Pour énoncer cette généralisation, disons qu'une forme quadratique (V, q) sur F *représente a sur A*, où A est une F-algèbre commutative et $a \in A$, s'il existe $x \in A \otimes_F V$ tel que $q(x) = a$ ($x \neq 0$ si $a = 0$).

Commençons par un lemme élémentaire :

2.4.1. Lemme. — *Soient K/F une extension transcendante pure, et q une forme quadratique sur F. Alors $i(q) = i(q_K)$.*

Démonstration. — En effet, on peut se réduire à $K = F(T)$. Il suffit de montrer que, si q_K est isotrope, alors q est isotrope. Supposons que $q(f_1, \dots, f_n) = 0$ pour $(f_1, \dots, f_n) \in K^n \setminus (0, \dots, 0)$. On peut multiplier les f_i par un polynôme g tel que les gf_i soient des polynômes sans facteur commun. En particulier, on a $(f_1(0), \dots, f_n(0)) \neq (0, \dots, 0)$ et $q(f_1(0), \dots, f_n(0)) = 0$. $\square$

2.4.2. Théorème **(Cassels-Pfister, [176**, Satz 1**]).** — *Soient q une forme quadratique sur F et $f \in F[T] - \{0\}$. Si q représente f sur $F(T)$, alors q représente déjà f sur $F[T]$.*

Démonstration. — On peut supposer q anisotrope (sinon, on écrit $q \sim \mathbb{H} \perp q'$, et f est évidemment représenté par $\mathbb{H}$ sur $F[T]$). Écrivons

$$q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

Par hypothèse, il existe $f_0, f_1, \dots, f_n \in F[T]$ tel que

$$a_1 {\frac{f_1}{f_0}}^2 + \cdots + a_n {\frac{f_n}{f_0}}^2 = f.$$

Choisissons les f_i de façon que $\deg f_0$ soit minimal. Il faut montrer que $\deg f_0 = 0$.

On raisonne par l'absurde. L'hypothèse implique que f_0 ne divise pas tous les f_i $(i > 0)$. Posons

$$\varphi = \langle -f, a_1, \dots, a_n \rangle.$$

La forme φ est définie sur $F(T)$. On a

$$\varphi(f_0, f_1, \dots, f_n) = 0.$$

Écrivons $f_i = f_0 g_i + r_i$ avec $\deg r_i < \deg f_0$. Posons $x = (f_0, \dots, f_n)$, $y = (g_0, \dots, g_n)$ et

$$z = \varphi(y)x - 2\check{\varphi}(x,y)y.$$

Un calcul facile montre que $\varphi(z) = 0$. Si $z = (h_0, \dots, h_n)$, on a

$$h_0 = \frac{1}{f_0}\sum a_i r_i^2$$

d'où

$$\deg h_0 \leq 2\max\{\deg r_i\} - \deg f_0 < \deg f_0.$$

Comme les r_i sont non tous nuls, on a $h_0 \neq 0$ d'après le lemme 2.4.1. Mais ceci contredit la minimalité de $\deg f_0$. □

2.4.3. Corollaire. — *Soient q une forme sur F, $n \geq 1$ et $f \in F(T_1, \dots, T_n)$. Supposons que q représente f sur $F(T_1, \dots, T_n)$. Alors q représente $f(a_1, \dots, a_n)$ sur F pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in F^n$ tel que $f(a_1, \dots, a_n)$ soit défini et $\neq 0$.*

Démonstration. — Écrivons $f = g/h$, où $g, h \in F[T_1, \dots, T_n]$. Quitte à remplacer f par $gh = fh^2$, on peut supposer que $f \in F[T_1, \dots, T_n]$. Par le théorème 2.4.2, q représente f sur $F(T_1, \dots, T_{n-1})[T_n]$; alors q représente $f(T_1, \dots, T_{n-1}, a_n)$ sur $F(T_1, \dots, T_{n-1})$. On termine par récurrence sur n. □

***2.4.4. Théorème* (Deuxième théorème de représentation, [176, Satz 2])**

Soient $q = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$ une forme anisotrope sur F ($n \geq 2$), $q' = \langle a_2, \dots, a_n\rangle$ et $d \in F^*$. Alors $d \in D(q') \Leftrightarrow d + a_1T^2 \in D(q_{F(T)})$.

Si q est isotrope, le résultat est faux en général.

Démonstration. — La nécessité est claire, puisque $\langle a_1\rangle$ représente a_1T^2 sur $F(T)$. Supposons $d + a_1T^2 \in D(q_{F(T)})$. Par le théorème 2.4.2, il existe $f_1, \dots, f_n \in F[T]$ tel que

$$d + a_1T^2 = a_1 f_1^2 + \cdots + a_n f_n^2.$$

L'anisotropie de q entraîne facilement (en regardant les coefficients dominants) que $\deg f_i \leq 1$ pour tout i. En particulier, on peut écrire $f_1 = a + bT$ pour $a, b \in F$. Soit c la solution de l'équation $a + bc = c$. Alors

$$d + a_1c^2 = a_1c^2 + \sum_{i=2}^{n} a_i f_i(c)^2$$

et $d \in D(q')$. □

2.4.5. Corollaire. — *Supposons $s(F) \geq n$. Soit $d \in F^*$. Si $d + T^2$ est somme de n carrés de $F(T)$, alors d est somme de $n-1$ carrés dans F.*

2.4.6. Corollaire. — *Supposons $s(F) \geq n$. Alors $1 + T_1^2 + \cdots + T_n^2$ n'est pas somme de n carrés dans $F(T_1, \dots, T_n)$, et $T_1^2 + \dots T_{n+1}^2$ n'est pas somme de n carrés dans $F(T_1, \dots, T_{n+1})$.*

Démonstration. — Récurrence sur n, en notant que $s(F) = s(F(T))$ d'après le lemme 2.4.1. □

Le corollaire 2.4.6 s'applique notamment à $F = \mathbb{R}$.

2.4.7. Scholie. — Si V est un espace vectoriel de dimension finie sur F, on note $F(V)$ le corps des fractions de $\bigoplus_{n\geq 0} S^n(V)$, où $S^n(V)$ est la puissance symétrique n-ième de V. Le choix d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V identifie $F(V)$ au corps des fractions rationnelles sur les indéterminées $(e_1, \dots, e_n)$.

En termes de géométrie algébrique, le corps $F(V)$ n'est autre que le *corps des fonctions* de la variété affine $\mathbb{V}$ telle que $\mathbb{V}(F) = V^*$, où V^* est le dual de V. En particulier, soit (V, q) une forme quadratique. Alors q peut être considéré comme élément de $S^2(V^*)$, donc comme élément de $F(V^*)$. Soit $(T_1, \dots, T_n)$ la base duale d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V. Alors $F(V^*) \simeq F(T_1, \dots, T_n)$. On a évidemment

$$q = q(T_1, \dots, T_n) \in D(q_{F(V^*)}).$$

***2.4.8. Théorème* (Troisième théorème de représentation, [176, Satz 3])**

Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec q anisotrope. Soient V l'espace vectoriel sous-jacent à φ et $K = F(V^*)$, de sorte que φ peut être vu comme élément de K (cf. scholie 2.4.7). Alors $\varphi \in D(q_K) \Leftrightarrow \varphi \leq q$.

Démonstration. — La suffisance est claire, puisqu'on a $\varphi \in D(\varphi_K)$ d'après le scholie 2.4.7. Pour la nécessité, on raisonne par récurrence sur $m = \dim q$. Si $m = 0$, il n'y a rien à démontrer. Si $m > 0$, on écrit $\varphi = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$. Par hypothèse, $K^* \ni \varphi = b_1T_1^2 + \cdots + b_nT_n^2 \in D(q_K)$ (pour le choix d'une base de V). Par le corollaire 2.4.3, on a donc $b_1 \in D(q)$. Écrivons $q \simeq \langle b_1 \rangle \perp q'$, $\varphi \simeq \langle b_1 \rangle \perp \varphi'$. Soient W le sous-espace de V sous-jacent à φ', $L = F(W^*)$ et considérons φ' comme élément de L^*. On a

$$b_1T_1^2 + \varphi' \in D(q_K)$$

d'où $\varphi' \in D(q'_L)$ d'après le théorème 2.4.4. Par récurrence, on en déduit

$$\varphi' \leq q'$$

d'où $\varphi \leq q$. □

Nous pouvons maintenant démontrer une *réciproque* du théorème 2.1.5. Donnons d'abord une définition :

2.4.9. Définition. — Une forme quadratique φ est *multiplicative* si elle vérifie la condition suivante :

> Soient V l'espace vectoriel sous-jacent à φ, $K = F(V^* \times V^*)$, $a = (\varphi, 0) \in K^*$, $b = (0, \varphi) \in K^*$. Alors $ab \in D(\varphi_K)$.

Soit $(T_1,\dots,T_n)$ une base de V^*, de sorte que $K=F(U_1,\dots,U_n,V_1,\dots,V_n)$ avec $U_i=(T_i,0)$ et $V_i=(0,T_i)$. La propriété ci-dessus exprime alors l'existence d'éléments $f_1,\dots,f_n\in K$ tel que

$$\varphi(U_1,\dots,U_n)\varphi(V_1,\dots,V_n)=\varphi(f_1,\dots,f_n).$$

2.4.10. Théorème. — *Soit φ une forme quadratique anisotrope sur F. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *φ est multiplicative.*

(ii) *Pour toute extension K/F, $D(\varphi_K)$ est un sous-groupe de K^*.*

(iii) *Pour toute extension transcendante pure K/F, $D(\varphi_K)$ est un sous-groupe de K^*.*

(iv) *φ est une forme de Pfister.*

Démonstration. — (iv)⇒(ii) résulte du théorème 2.1.5 ; (ii)⇒(i) et (ii)⇒(iii) sont évidents ; (i)⇒(ii) résulte du corollaire 2.4.3 (appliqué sur K, en remarquant que si q est multiplicative, elle reste multiplicative sur toute extension de F).

Il reste à démontrer (iii)⇒(iv). Soit $n=\dim q$, et soit m le plus grand entier tel que q contienne une sous-forme isométrique à une m-forme de Pfister. On va montrer que $n=2^m$. Raisonnons par l'absurde en supposant $m>2^n$. Soit $P_m(F)\ni\varphi\leq q$; écrivons

$$q\simeq\varphi\perp q'.$$

Soit $K=F(V^*\times V^*)$, où V est l'espace vectoriel sous-jacent à φ. Par (iii)⇒(i) (appliqué à φ), il existe une relation

$$\varphi(U)\varphi(V)=\varphi(f)$$

où $f\in K\otimes_F V$. Soit $a\in D(q')$. Sur K, on a

$$0\neq\varphi(U)+a\varphi(V)=\frac{\varphi(f)}{\varphi(V)}+a\varphi(Y)=\varphi(Y)(\varphi(\frac{f}{\varphi(Y)})+a).$$

Les deux facteurs de droite appartiennent à $D(q_K)$. Puisque q est multiplicative, on a donc

$$\varphi(U)+a\varphi(V)\in D(q_K).$$

Mais le théorème 2.4.8 entraîne alors que $q\geq\varphi\perp a\varphi\in P_{m+1}(F)$, ce qui contredit la maximalité de m. □

Le même raisonnement donne :

2.4.11. Proposition. — *Soient $\varphi\leq\psi$ deux formes de Pfister. Alors il existe une forme de Pfister τ telle que $\psi\simeq\varphi\otimes\tau$.*

Démonstration. — Récurrence sur $\dim\psi-\dim\varphi$, qu'on peut supposer >0. Soient q telle que $\psi\simeq\varphi\perp q$ et $a\in D(q)$. Le raisonnement du théorème précédent montre que $\varphi\otimes\langle 1,a\rangle\leq\psi$. □

2.5. Exercices

2.5.1. — Montrer qu'une forme anisotrope de dimension 4 est de Pfister si et seulement si elle représente 1.

2.5.2. — Pour toute forme quadratique q sur un corps F, on note $D^2(q) = \{ab \mid a, b \in D(q)\}$.

a) On a $a \in D^2(q)$ si et seulement si la forme $q \perp -aq$ est isotrope.

b) On a $D^2(aq) = D^2(q)$ pour tout $a \in F^*$.

c) On a $G(q) \subset D^2(q)$ et $G(q)D^2(q) \subset D^2(q)$.

d) Si $q \leq q'$, on a $D^2(q) \subset D^2(q')$.

e) On suppose q anisotrope. Montrer que q est semblable à une forme de Pfister si et seulement si, pour toute extension K/F, on a $G(q_K) = D^2(q_K)$.

***2.5.3* (Witt)**. — Pour toute forme q et tout $a \in F^*$, montrer que $G(q) + aG(q) \subset G(q \perp aq)$.

***2.5.4* (Witt)**. — Une forme q est *ronde* si $G(q) = D(q)$. Soit q une forme ronde.

a) On a $q^2 \simeq (\dim q)q$.

b) Si q est isotrope, elle est hyperbolique.

c) Si φ est une forme de Pfister, $q \otimes \varphi$ est ronde. (*Utiliser l'exercice 2.5.3.*)

d) Si $n = \dim q$ est impair, alors $q \simeq n\langle 1\rangle$. Si de plus $n \geq 3$, alors F est ordonnable et toute somme de carrés de F est un carré (on dit que F est pythagoricien).

e) Écrivons $q = \langle 1\rangle \perp \psi$. Si $\langle a, b\rangle \leq q$, alors $ab \in D(\psi)$.

(Voir [**225**, p. 35] pour plus de détails et des applications à la structure de $W(F)$.)

CHAPITRE 3

CORPS DE FONCTIONS DE QUADRIQUES

3.1. Corps de fonctions

Considérons une forme quadratique (V, q) de dimension $n \geq 3$. Soit $\mathbb{V}$ la variété affine associée à l'espace vectoriel dual V^*. L'équation $q(x) = 0$ définit une hypersurface affine géométriquement irréductible[1] dans $\mathbb{V} \simeq \mathbf{A}_F^n$ ainsi qu'une hypersurface projective géométriquement irréductible dans $\mathbf{P}(\mathbb{V}) \simeq \mathbf{P}_F^{n-1}$ (puisque q est homogène). La première est de dimension $n-1$ et la deuxième de dimension $n-2$. Nous allons nous intéresser aux *corps des fonctions* de ces quadriques. L'un est extension transcendante pure de degré 1 de l'autre ; il n'est donc pas très différent de considérer l'un ou l'autre de ces corps. Pour fixer les idées, nous noterons $F(q)$ le corps des fonctions de la quadrique *projective* X_q d'équation $q = 0$. Il est clair que, si $a \in F^*$, alors $F(q) = F(aq)$, et que $q \simeq q' \Rightarrow F(q) \simeq F(q')$ comme extensions de F. Si $q = \langle 1 \rangle \perp -q'$, le polynôme $1 - q'(t_2, \ldots, t_n)$ est irréductible (proposition 1.1.14), donc l'anneau $F[t_2, \ldots, t_n]/(1 - q'(t_2, \ldots, t_n))$ est intègre, où $t_2, \ldots, t_n$ sont des indéterminées ; $F(q)$ est le corps des fractions de cet anneau. Si $q = \langle 1, -a \rangle \perp -q''$, avec $\dim q'' = n-2$, on a

$$F(q) = F(t_3, \ldots, t_n)[\sqrt{a + q''(t_3, \ldots, t_n)}]. \tag{3.1.1}$$

Par conséquent, $F(q)$ est une extension quadratique de $F(t_3, \ldots, t_n)$.

Avec un peu de prudence, on peut définir $F(q)$ également pour $n = 2$. Dans ce cas, X_q est de dimension 0. Si $q = \langle 1, -a \rangle$, cette « quadrique »est irréductible si et seulement si $a \notin F^{*2}$, et alors $F(q) = F(\sqrt{a})$. Si $a \in F^{*2}$, on a $q \simeq \mathbb{H}$; X_q admet deux composantes $\operatorname{Spec} F \coprod \operatorname{Spec} F$ et $F(q) = F \times F$.

3.1.1. Proposition

a) $q_{F(q)}$ *est isotrope.*

[1] C'est-à-dire qui reste irréductible sur la clôture séparable de F.

b) *L'extension $F(q)/F$ est transcendante pure si et seulement si q est isotrope.*

Démonstration. — a) est clair, puisque le point générique de X_q est un zéro de q rationnel sur $F(q)$. Pour prouver b), si q est isotrope on peut écrire $q \simeq \mathbb{H} \perp -q'$ (théorème 1.2.9). Écrivons $\mathbb{H} = T_1T_2$. Alors l'équation de X_q s'écrit

$$T_1T_2 = q'(T_3, \dots, T_n)$$

ou

$$T_2/T_1 = q'(T_3/T_1, \dots, T_n/T_1).$$

Posant $t_i = T_i/T_1$, $F(q)$ est le corps des fractions de $F[t_2, \dots, t_n]/(t_2 - q'(t_3, \dots, t_n))$, qui est évidemment isomorphe à $F(t_3, \dots, t_n)$. La réciproque résulte de a) et du lemme 2.4.1. □

Rappelons la

3.1.2. Définition **(**[**32**, ch V, §17, déf. 2]**).** — Une extension K/F est *régulière* si, pour toute F-algèbre commutative intègre A, la K-algèbre $K \otimes_F A$ est intègre.

Si K/F est une extension régulière, en particulier la K-algèbre $K \otimes_F E$ est intègre pour toute extension E/F ; son corps des fractions est noté KE et appelé le *composé* de K et E (sur F).

3.1.3. Proposition **(**[**32**, ch. V, §17, prop. 9]**).** — *Soit $\bar{F}$ une clôture algébrique de F. Une extension K/F est régulière si et seulement si l'anneau $\bar{F} \otimes_F K$ est intègre.*

Si K est le corps des fonctions d'une variété géométriquement irréductible, alors l'extension K/F est régulière. En particulier :

3.1.4. Proposition. — *Soit q une forme quadratique de dimension ≥ 3. Alors l'extension $F(q)/F$ est régulière.*

Voici une preuve qui ne mentionne pas de géométrie algébrique : la formule (3.1.1) montre que $E \otimes_F F(q) = E(q)$ pour toute extension E de F, en particulier c'est un corps pour $E = \bar{F}$.

3.2. Formes devenant hyperboliques sur le corps des fonctions d'une quadrique

Considérons le problème suivant : soient q, φ deux formes quadratiques sur F. Quand φ devient-elle hyperbolique sur $F(q)$?

Si q est isotrope, il est nécessaire et suffisant que φ soit déjà hyperbolique, par la proposition 3.1.1 et le lemme 2.4.1. Si q est anisotrope, une réponse complète n'est pas connue ; néanmoins il existe une condition nécessaire importante, qui donne une réponse complète si q est une forme de Pfister. Commençons par le cas $\dim q = 2$. On a alors un résultat plus général :

3.2.1. Proposition. — *Soient $a \in F^* \setminus F^{*2}$ et φ une forme anisotrope sur F. Supposons que $i(\varphi_{F(\sqrt{a})}) \geq m > 0$ (voir corollaire 1.2.13). Alors $\varphi \simeq \langle 1, -a\rangle \otimes \rho \perp \varphi'$ avec $\dim \rho = m$ et $\dim \varphi' = \dim \varphi - 2m$.*

Démonstration. — Notons que $\langle 1, -a\rangle_{F(\sqrt{a})} \sim 0$; par suite, en raisonnant par récurrence sur m, il suffit de traiter le cas $m = 1$. Soit V l'espace sous-jacent à φ, et soit $x \in F(\sqrt{a}) \otimes_F V$ tel que $\varphi(x) = 0$. Écrivons $x = 1 \otimes x_1 + \sqrt{a} \otimes x_2$, avec $x_1, x_2 \in V$. Alors

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + \check{\varphi}(x_1, x_2)\sqrt{a} + a\varphi(x_2) = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) + a\varphi(x_2) &= 0 \\ \check{\varphi}(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned}$$

La deuxième équation dit que x_1 et x_2 sont orthogonaux ; alors la première équation implique que $\varphi_{|W} \simeq \varphi(x_2)\langle 1, -a\rangle$, où W est le sous-espace engendré par x_1 et x_2. Comme W est non dégénéré (puisqu'anisotrope), on a $V = W \perp W^\perp$ par le lemme 1.1.5. □

3.2.2. Proposition. — *Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec φ anisotrope et $\dim q = n > 2$. Supposons $\varphi_{F(q)} \sim 0$. Alors, pour tout $b \in F^*$ représenté par q, on a*

$$bq(T_1, \ldots, T_n)\varphi_K \simeq \varphi_K$$

où $K = F(T_1, \ldots, T_n)$.

Démonstration. — En remplaçant q par bq, on peut supposer que q représente 1 et que $b = 1$. Posons $L = F(t_3, \ldots, t_n)$. En appliquant la proposition 3.2.1 à l'extension $L[\sqrt{a + q''(t_3, \ldots, t_n)}]/L$ (cf. (3.1.1) et ses notations) on obtient

$$\varphi_L \simeq \langle 1, -a - q''(t_3, \ldots, t_n)\rangle \otimes \rho$$

pour $\rho \in W(L)$ convenable. Considérons K comme une extension de L en posant $t_i = T_i/T_2 \in K$ pour $i \geq 3$. Sur K, la forme

$$\langle 1, -a - q''(t_3, \ldots, t_n)\rangle \simeq \langle 1, -aT_2^2 - q''(T_3, \ldots, T_n)\rangle$$

représente $\lambda := q(T_1, T_2, \ldots, T_n)$; par suite,

$$\lambda\langle 1, -a - q''(t_3, \ldots, t_n)\rangle \simeq \langle 1, -a - q''(t_3, \ldots, t_n)\rangle$$

(c'est un cas trivial du théorème 2.1.5 a)). Et donc

$$\lambda\varphi_K \simeq \lambda\langle 1, -a - q''(t_3, \ldots, t_n)\rangle \otimes \rho \simeq \langle 1, -a - q''(t_3, \ldots, t_n)\rangle \otimes \rho \simeq \varphi_K.$$

□

3.2.3. Remarque. — Il est possible de démontrer la réciproque [**121**].

Le théorème suivant joue un rôle très important dans la théorie ; Arason a été le premier à l'énoncer explicitement. Il est fréquemment (et abusivement) appelé « théorème de Cassels-Pfister »(on dit aussi « théorème de la sous-forme »).

3.2.4. Théorème **(**[**9**, Satz 1.3], [**122**, lemma 4.5]**)**. — *Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec φ anisotrope et $\dim q > 2$. Supposons $\varphi_{F(q)} \sim 0$. Alors, pour tout $(a, b) \in D(q) \times D(\varphi)$, on a $abq \leq \varphi$. En particulier, $\dim \varphi \geq \dim q$.*

Démonstration. — La proposition 3.2.2 implique que φ_K représente $abq(T_1, \dots, T_n)$. On applique le théorème 2.4.8. □

3.2.5. Corollaire **(**[**9**, Satz 1.3]**)**. — *Si dans le théorème 3.2.4, on suppose que q est une forme de Pfister, alors $\varphi \simeq q \otimes \rho$ pour $\rho \in W(F)$ convenable.*

Démonstration. — Récurrence sur $\dim q$, en notant que $q_{F(q)} \sim 0$ par le corollaire 2.1.8. □

3.3. Le théorème d'Arason-Pfister

Dans [**178**], Pfister demande s'il est vrai que $\bigcap_{n \geq 1} I^n F = 0$ pour tout F. Si IF/I^2F est fini, c'est une conséquence du théorème de Krull ; mais $IF/I^2F \simeq F^*/F^{*2}$ (voir théorème 6.1.3), qui est infini en général. Par conséquent, il est remarquable que la réponse soit affirmative. Plus précisément :

3.3.1. Théorème **(Hauptsatz de Arason-Pfister,[13])**
Soit q anisotrope sur F telle que $q \in I^n F$ pour $n \geq 0$. Alors, $\dim q \geq 2^n$.

La conjecture de Pfister résulte du théorème 3.3.1 : si q est anisotrope et $q \in \bigcap_{n \geq 1} I^n F$, alors $\dim q \geq 2^n$ pour tout n, absurde.

Démonstration. — Écrivons $q = \pm\varphi_1 + \cdots + \pm\varphi_r$ dans $W(F)$, où les φ_i sont des n-formes de Pfister. Puisque q est anisotrope, on a $r > 0$. Procédons par récurrence sur r. Si $r = 1$ et $\dim q < 2^n$, on a $\pm\varphi_1 \simeq q \perp m\mathbb{H}$ pour $m > 0$ convenable (corollaire 1.3.3) ; alors φ_1 est hyperbolique (corollaire 2.1.8) et q aussi, absurde. Si $r > 1$, posons $K = F(\varphi_r)$. Distinguons deux cas :

1) q_K est hyperbolique. Par le corollaire 3.2.5, il existe ρ tel que $q \simeq \varphi_r \otimes \rho$. En particulier, $2^n = \dim \varphi_r \mid \dim q$, d'où $\dim q \geq 2^n$.

2) q_K n'est pas hyperbolique. Soit $q' = (q_K)_{\mathrm{an}}$. Alors $q' = \pm\varphi_1 + \cdots + \pm\varphi_{r-1}$ dans $W(K)$. Par récurrence sur r, $\dim q' \geq 2^n$; alors $\dim q \geq 2^n$ également. □

3.3.2. Corollaire. — *Soient φ_1, φ_2 deux n-formes de Pfister. Supposons $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ $(\mathrm{mod}\ I^{n+1}F)$. Alors $\varphi_1 \simeq \varphi_2$. En particulier, $\varphi_1 \in I^{n+1}F \Rightarrow \varphi_1 \sim 0$.*

Démonstration. — Soient φ_1', φ_2' les formes pures associées à φ_1 et φ_2. On a

$$\varphi_1 \perp -\varphi_2 \sim \varphi_2' \perp -\varphi_1' \in I^{n+1}F$$

et

$$\dim(\varphi_2' \perp -\varphi_1') = 2(2^n - 1) < 2^{n+1}.$$

Par le théorème 3.3.1, il en résulte que $\varphi_2' \perp -\varphi_1' \sim 0$, donc que $\varphi_1 \simeq \varphi_2$. □

On va raffiner quelque peu le corollaire 3.3.2 :

3.3.3. Corollaire **(Elman-Lam** [**49**, th. 4.8]**, Arason** [**9**, Satz 1.5]**)**
Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in P_n(F)$. Si $\varphi_1 \perp \varphi_2 \equiv \varphi_3 \pmod{I^{n+1}F}$, alors il existe $\tau \in P_{n-1}(F)$ et $a, b \in F^*$ tels que

$$\varphi_1 \simeq \tau \otimes \langle\langle a\rangle\rangle, \varphi_2 \simeq \tau \otimes \langle\langle b\rangle\rangle, \varphi_3 \simeq \tau \otimes \langle\langle ab\rangle\rangle.$$

Démonstration. — Soit $K = F(\varphi_2)$. On a

$$(\varphi_1)_K \equiv (\varphi_3)_K \pmod{I^{n+1}K}$$

d'où $(\varphi_1)_K \simeq (\varphi_3)_K$ d'après le corollaire 3.3.2. En appliquant le corollaire 3.2.5, on en déduit

$$(\varphi_1 \perp -\varphi_3)_{\mathrm{an}} \simeq \varphi_2 \otimes \rho$$

pour ρ convenable. On a

$$\dim_{\mathrm{an}}(\varphi_1 \perp -\varphi_3) = \dim_{\mathrm{an}}(\varphi_3' \perp -\varphi_1') < 2^{n+1}$$

d'où $\dim \rho = 0$ ou 1. Si $\rho = 0$, on a $\varphi_1 \simeq \varphi_3$ et le théorème est vrai avec $b = 1$. Si $\dim \rho = 1$, alors d'après le théorème 2.3.2, il existe $\tau \in P_{n-1}(F)$, $a, b \in F^*$ tels que $\varphi_1 \simeq \tau \otimes \langle\langle a\rangle\rangle$, $\varphi_3 \simeq \tau \otimes \langle\langle ab\rangle\rangle$. Alors

$$\varphi_2 \sim c(\tau \otimes \langle\langle ab\rangle\rangle \perp -\tau \otimes \langle\langle a\rangle\rangle) \sim ac\tau \otimes \langle\langle b\rangle\rangle$$

et le corollaire 2.1.9 implique que $\varphi_2 \simeq \tau \otimes \langle\langle b\rangle\rangle$. □

3.3.4. Corollaire **(Pfister)**. — *Soit q une forme quadratique de dimension impaire. Alors $[q]$ n'est pas diviseur de zéro dans $W(F)$.*

Démonstration. — Soit φ tel que $q \otimes \varphi \sim 0$. Écrivant

$$q \simeq \langle a\rangle \perp -q'$$

on obtient

$$\varphi \sim aq' \otimes \varphi.$$

Comme $q' \in IF$, cela montre que si $\varphi \in I^nF$, alors $\varphi \in I^{n+1}F$. On a donc $\varphi \in \bigcap I^nF = \{0\}$. □

3.4. Exercices

***3.4.1* (Arason).** — Soit $\varphi \in I^n F - \{0\}$ anisotrope telle que $\dim \varphi < 2^n + 2^l$ avec $0 \leq l \leq n$. Supposons que φ contienne une l-sous-forme de Pfister ψ. Alors il existe une forme τ semblable à une $(n-l)$-forme de Pfister telle que $\varphi \sim \psi \otimes \tau$.
(*On utilisera le corollaire 4.3.7 du chapitre suivant.*)

***3.4.2* (Gentile-Shapiro).** — Soient q, φ, η trois formes anisotropes sur F telles que $q_{F(\varphi)} \sim 0$ et $q \simeq \varphi \perp \eta$. Soit K/F une extension : pour toute forme ψ sur F, notons $\psi' = (\psi_K)_{\mathrm{an}}$. Montrer que

- soit $q' \simeq \varphi' \perp \eta'$
- soit $\eta' \simeq q' \perp -\varphi'$.

(*Distinguer selon que $q' \perp -\varphi'$ est ou non isotrope ; si cette forme est isotrope, distinguer selon que φ_K est ou non isotrope ; si φ_K est anisotrope, utiliser le théorème 3.2.4.*)

***3.4.3* (Merkurjev).** — Soit F un corps tel que $I^3 F = 0$, soit E une extension quadratique de F et soit $q \in I^2 F$ une forme anisotrope de rang ≥ 6. Montrer que l'indice de q_E est ≤ 2. (*Utiliser la proposition 3.2.1 et le fait qu'une 2-forme de Pfister sur F représente n'importe quel scalaire $\neq 0$.*)

CHAPITRE 4

LA THÉORIE DE KNEBUSCH

Dans les deux articles [**122**] et [**123**], Manfred Knebusch développe une théorie de déploiement générique pour les formes quadratiques, qui peut se voir comme une conceptualisation et une extension des résultats du chapitre précédent. Elle conduit à la définition de deux importants invariants numériques des formes quadratiques : la *hauteur* et le *degré*.

4.1. Hauteur

Considérons une forme quadratique q sur F. On associe à q un entier $h = h(q)$ et une suite $(F_i, q_i)_{0\le i\le h}$, où F_i est une extension de F et q_i est une forme quadratique sur F_i, de la manière suivante :

(i) $q_0 = q_{\text{an}}, F_0 = F$.
(ii) Supposons F_i et q_i définis. Si $\dim q_i = 0$ ou 1, alors $i = h$. Sinon, $F_{i+1} = F_i(q_i)$ et $q_{i+1} = ((q_i)_{F_{i+1}})_{\text{an}}$.

4.1.1. Définition. — L'entier $h(q)$ s'appelle la *hauteur* de q. La suite $F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_h$ s'appelle la *tour de déploiement générique* de q. La forme q_i s'appelle le *i-ème noyau* de q. Le corps F_{h-1} (resp. F_h) s'appelle le *corps dominant* (resp. *corps de déploiement générique*) de q. La suite

$$(\dim q_0, \dots, \dim q_h)$$

s'appelle la *suite de déploiement* de q.

4.1.2. Remarque. — Par définition, on a $\dim q \ge \dim q_0 > \dim q_1 > \dots$; par conséquent h est bien défini. Notons aussi que les $\dim q_i$ ont la même parité que $\dim q$; en particulier, $h(q) \le \frac{1}{2}\dim q$.

4.1.3. Théorème ([**122**, th. 5.1]). — *Soient q une forme quadratique sur F et K/F une extension quelconque. Alors il existe un unique $i \in \{0, \dots, h(q)\}$ tel que* $\dim_{\mathrm{an}} q_K = \dim q_i$.

Démonstration. — L'unicité est claire. Pour l'existence, soit i le plus petit entier tel que $\dim q_i \le \dim_{\mathrm{an}} q_K$. Il faut montrer que $\dim q_i = \dim_{\mathrm{an}} q_K$. Posons, pour tout $j < h$, $K_j = KF_j$. Pour $j < i$, $(q_j)_{K_j} \sim q_{K_j}$ est isotrope ; alors K_{j+1}/K_j est transcendante pure d'après la proposition 3.1.1 b). Il en résulte que K_i/K est transcendante pure. Par le lemme 2.4.1, $((q_K)_{\mathrm{an}})_{K_i}$ est anisotrope. Mais alors

$$\dim_{\mathrm{an}} q_{K_i} = \dim_{\mathrm{an}} q_K \ge \dim q_i \ge \dim_{\mathrm{an}}(q_i)_{K_i} \tag{4.1.1}$$

et

$$(q_{K_i})_{\mathrm{an}} \simeq ((q_i)_{K_i})_{\mathrm{an}}.$$

Par conséquent il y a partout égalité dans (4.1.1). □

4.1.4. Corollaire. — *Pour tout K/F on a $h(q_K) \le h(q)$. Si $h(q_K) = h(q)$, alors la forme $(q_i)_{K_i}$ est anisotrope pour tout $i \in \{0, \dots, h(q)\}$.*

4.1.5. Définition. — Pour q anisotrope,

a) Le *premier indice de Witt supérieur* de q est $i_1(q) = i(q_{F(q)}) = \frac{1}{2}(\dim q - \dim q_1)$.

b) ***Izhboldin :*** La *dimension essentielle* de q est $\dim_{\mathrm{es}} q = \dim q - i_1(q) + 1$.

Le lemme suivant est conséquence immédiate du lemme 1.3.9.

4.1.6. Lemme. — *Soient q une forme anisotrope et $q' \le q$. Supposons que* $\dim q' \ge \dim_{\mathrm{es}} q$. *Alors $q'_{F(q)}$ est isotrope.*

4.2. Formes de hauteur 1

4.2.1. Proposition **(Wadsworth, Knebusch)**. — *Une forme q est de hauteur 1 si et seulement si elle est*

- *semblable à une forme de Pfister au cas où* $\dim q$ *est paire ;*
- *semblable à une sous-forme de codimension 1 d'une forme de Pfister au cas où* $\dim q$ *est impaire.*

Démonstration (Calmès). — Nous la donnons seulement quand $\dim q$ est paire ; pour l'autre cas voir [**122**, dém. du th. 5.8] ou [**219**]. La suffisance résulte du corollaire 2.1.8. Pour la nécessité, on peut supposer que q représente 1 ; d'après le théorème 2.4.10, il suffit de montrer que $D(q_K) = G(q_K)$ pour toute extension K/F. Par le corollaire 4.1.4, on a $h(q_K) = 0$ ou 1. Si $h(q_K) = 0$, $q_K \sim 0$ et l'assertion est claire. Si $h(q_K) = 1$, soit $a \in D(q_K)$. On a $(aq_K)_{K(q_K)} \sim 0$. Appliquons le théorème 3.2.4 : comme $1 \in D(q_K)$, aq_K est une sous-forme de q_K, donc $aq_K \simeq q_K$ et $a \in G(q_K)$. □

4.3. Degré ; les idéaux J_n

4.3.1. Définition. — Soit q une forme quadratique sur F.

a) Si $\dim q$ est impaire, le *degré* de q est $\deg(q) = 0$.

b) Si $\dim q$ est paire et non hyperbolique, soit F_{h-1} son corps dominant. Par la proposition 4.2.1, q_{h-1} est semblable à une forme de Pfister τ : τ est appelée *forme dominante* de q. Si $\dim \tau = 2^n$, le *degré* de q est l'entier $\deg(q) = n$.

c) Si $q \sim 0$, $\deg(q) = \infty$.

4.3.2. Lemme. — *Soit q une forme quadratique de dimension paire, F_{h-1} son corps dominant et τ sa forme dominante. Alors, pour toute extension K/F on a $\deg(q_K) \geq \deg(q)$. On a $\deg(q_K) > \deg(q)$ si et seulement si $\tau_{KF_{h-1}} \sim 0$. Dans ce cas, $h(q_K) < h(q)$.*

Démonstration. — Soit $d_i = \dim q_i$. D'après le théorème 4.1.3, les dimensions des noyaux de q_K appartiennent à l'ensemble $\{d_0, \ldots, d_{h(q)}\}$. □

4.3.3. Théorème **([122, th. 6.3]).** — *Soient $n \geq 1$, τ une n-forme de Pfister anisotrope, ψ une forme telle que $\deg(\psi) \geq n+1$, $a \in F^*$, $\varphi = a\tau \perp \psi$, et E le corps dominant de φ. Alors :*

(i) *La forme dominante de φ est τ_E.*

(ii) *Si $\deg(\psi) \geq n+2$, $\varphi_{h(\varphi)-1} \simeq a\tau_E$.*

Démonstration. — On procède comme dans [**122**]. On peut supposer que $\psi \not\sim 0$.

a) Démontrons d'abord que $\deg(\varphi) \leq n$. Soit $(L_i)_{0 \leq i \leq e}$ la tour de déploiement générique de ψ. On a donc $\varphi_{L_e} \sim a\tau_{L_e}$. Si $\deg(\varphi) > n$, on a $\deg(\tau_{L_e}) > n$, d'où $\varphi_{L_e} \sim a\tau_{L_e} \sim 0$. Soit s maximal tel que $\tau_{L_s} \not\sim 0$. En appliquant le théorème 3.2.4, on obtient que $b\psi_s \leq \tau_{L_s}$ pour $b \in L_s^*$ convenable. Alors $\deg(\psi) = \deg(\psi_s) \leq n$, contradiction.

b) Démontrons maintenant que $\deg(\varphi) \geq n$. Supposons que $\deg(\varphi) = m < n$. Soit $(K_i)_{0 \leq i \leq h}$ la tour de déploiement générique de φ. La partie anisotrope de $\varphi_{K_{h-1}}$ s'écrit $b\rho$ pour un $b \in K_{h-1}^*$ et une m-forme de Pfister ρ. Mais

$$\psi_{K_{h-1}} \sim b\rho \perp -a\tau_{K_{h-1}}.$$

La forme de droite est de dimension $2^m + 2^n < 2^{n+1}$; donc $\psi_{K_{h-1}} \sim 0$ et $b\rho \sim a\tau_{K_{h-1}}$. Mais $\dim \rho < \dim \tau$; cela implique que $\tau_{K_{h-1}}$ est isotrope, donc hyperbolique, et ρ aussi, contradiction.

On a donc

$$\deg(\varphi) = n.$$

c) Comme $\psi_{K_h} \sim -a\tau_{K_h}$ et $\deg(\psi) > n$, on obtient $\psi_{K_h} \sim 0$ et $\tau_{K_h} \sim 0$. Soit s maximal tel que τ_{K_s} soit non hyperbolique (donc anisotrope). En appliquant à nouveau le théorème 3.2.4, on obtient $b\varphi_s \leq \tau_{K_s}$ pour un $b \in K_s^*$. Comme $\deg(\varphi) = n$, on a donc

$$s = h - 1, \qquad \varphi_{h-1} \simeq b\tau_{K_{h-1}}.$$

Ainsi, $\tau_{K_{h-1}}$ est la forme dominante de φ. De plus, on a

$$\psi_{K_{h-1}} \sim (\varphi \perp -a\tau)_{K_{h-1}} \sim \langle b, -a\rangle \otimes \tau_{K_{h-1}}.$$

Si $\deg(\psi) \geq n+2$, alors $\psi_{K_{h-1}} \sim 0$ et $\varphi_{h-1} \simeq a\tau_{K_{h-1}}$. □

4.3.4. Notation. — $J_n(F) = \{q \in W(F) \mid \deg(q) \geq n\}$.

4.3.5. Théorème ([**122**, th. 6.4]). — *Pour tout $n \geq 0$, $J_n(F)$ est un idéal de $W(F)$.*

Démonstration. — Si $a \in F^*$ et $q \in W(F)$, il est clair que $q \in J_n(F) \Leftrightarrow aq \in J_n(F)$. Comme $W(F)$ est engendré additivement par les formes $\langle a\rangle$, il suffit de prouver que $J_n(F)$ est stable par addition. Si $n = 0$, c'est trivial. Si $n > 0$, soient $q, q' \in J_n(F)$. On peut supposer que $q \perp q' \not\sim 0$. Par le lemme 4.3.2, pour toute extension K/F, on a $q_K, q'_K \in J_n(K)$. Soit K le corps dominant de $q \perp q'$: alors $q_K \perp q'_K \sim a\tau$, où τ est une m-forme de Pfister ; nous devons montrer que $m \geq n$. Mais si $m < n$, écrivons

$$q_K \sim a\tau \perp -q'_K.$$

Par le théorème 4.3.3, τ est la forme dominante de q_K. Mais alors $\deg(q_K) = m < n$, contradiction. □

4.3.6. Corollaire. — *Pour tout $n \geq 0$ on a $I^nF \subset J_n(F)$.*

Démonstration. — $J_n(F)$ est stable par addition et contient évidemment les n-formes de Pfister. □

Nous verrons plus tard (corollaire 9.7.4) que des résultats de Orlov, Vishik et Voevodsky [**172**] impliquent l'égalité $I^nF = J_n(F)$ pour tout n.

Le corollaire 4.3.6 fournit une nouvelle démonstration du Hauptsatz de Arason-Pfister (théorème 3.3.1) : si $q \in I^nF - \{0\}$, alors $\deg(q) \geq n$, donc $\dim(q) \geq 2^n$. On a de plus le complément suivant :

4.3.7. Corollaire. — *Soit q de dimension 2^n. Si $q \in J_n(F)$ (par exemple $q \in I^nF$), alors $q \in GP_n(F)$.*

On a aussi :

4.3.8. Lemme. — *Soient $n > 0$ et $\varphi, \psi \in GP_n(F) \setminus \{0\}$. Soit K le corps de déploiement générique de $\varphi \perp \psi$. Alors φ_K et ψ_K sont anisotropes.*

Démonstration. — Soit $\rho = \varphi \perp \psi$. Si $\rho \in J_{n+1}(F)$, on a $\rho \in GP_{n+1}(F)$ et l'énoncé résulte du théorème 3.2.4. Sinon, on a $\deg(\rho) = n$. Soit L son corps dominant. Puisque L/F est formé d'extensions successives données par des corps de fonctions de formes de dimension $> 2^n$, une application répétée du théorème 3.2.4 donne que φ_L et ψ_L sont anisotropes.

Supposons φ_K isotrope, donc hyperbolique. En réappliquant le théorème 3.2.4, on a

$$\varphi_K \simeq a(\rho_K)_{\mathrm{an}}, \quad a \in K^*$$

d'où

$$\varphi_K \sim a\varphi_K \perp a\psi_K$$

ou

$$\langle\langle a\rangle\rangle \otimes \varphi_K \sim a\psi_K.$$

Mais cela implique $\deg(\psi_K) > n$, donc $\psi_K \sim 0$, ce qui est absurde. Donc φ_K est anisotrope, et de même ψ_K est anisotrope. □

Il semble difficile de démontrer que $J_m(F)J_n(F) \subset J_{m+n}(F)$ sans connaître l'égalité $I^nF = J_n(F)$. Toutefois

4.3.9. Proposition **([122**, prop. 6.9]). — *Pour tous $m, n \geq 0$, on a*

$$I^m F J_n(F) \subset J_{m+n}(F)$$

Démonstration. — Par récurrence sur m, on peut supposer $m = 1$. Soit $q \in J_n(F)$. Il suffit de montrer que, pour tout $a \in F^*$, on a

$$\deg(\langle\langle a\rangle\rangle \otimes q) > \deg(q).$$

Posons $\alpha = (\langle\langle a\rangle\rangle \otimes q)_{\mathrm{an}}$. On peut supposer q de dimension paire et $\alpha \neq 0$. On raisonne par récurrence sur $h(q)$. Soit K le corps dominant de α. On a

$$\deg(\alpha_K) = \deg(\alpha), \quad \deg(q_K) \geq \deg q, \quad h(q_K) \leq h(q).$$

(cf. corollaire 4.1.4 et lemme 4.3.2). Il suffit donc de montrer que $\deg(\alpha_K) > \deg(q_K)$. Quitte à changer de corps de base, on peut donc supposer (et on suppose) que $\alpha \in GP(F)$.

Si $h(q) = 1$, $q \in GP(F)$ et la conclusion est immédiate. Supposons $h(q) > 1$. Par récurrence, on a

$$\deg(\alpha_{F(q)}) > \deg(q_{F(q)}) = \deg(q).$$

Si $\alpha_{F(q)} \not\sim 0$, on a $\deg(\alpha_{F(q)}) = \deg(\alpha)$, d'où la conclusion. Enfin, supposons que $\alpha_{F(q)} \sim 0$. Par le théorème 3.2.4, on a

$$\alpha \sim bq \perp \zeta$$

pour $b \in F^*$ et $\zeta \in W(F)$. Supposons $\zeta = 0$. Alors

$$\langle 1, -a, -b\rangle \otimes q \sim 0$$

ce qui contredit le corollaire 3.3.4. On a donc $\dim \alpha > \dim q$, d'où évidemment $\deg(\alpha) > \deg(q)$. □

4.3.10. Corollaire. — *Soient q, ρ deux formes quadratiques, avec $\dim \rho$ impaire. Alors $\deg(q \otimes \rho) = \deg(q)$.*

Démonstration. — En effet, on peut écrire $q \otimes \rho \simeq aq \perp q \otimes \rho'$ avec $\rho' \in IF$. La proposition 4.3.9 montre que $\deg(q \otimes \rho') > \deg(q)$. La conclusion résulte alors du théorème 4.3.3. □

4.4. Retour à la section 3.2

La théorie de Knebusch permet de renforcer considérablement le théorème 3.2.4. Commençons par

***4.4.1. Théorème* (cf. [122, prop. 6.11], [12, Satz 18]).** — *Soit φ une forme quadratique sur F de dimension paire, de corps dominant L et de forme dominante τ. Soit q une autre forme sur F. Alors $\deg(\varphi_{F(q)}) > \deg \varphi$ si et seulement si q_L est semblable à une sous-forme de τ. En particulier, en posant $n = \deg(\varphi)$,*

(i) *Si $\dim q > 2^n$, on a $\deg(\varphi_{F(q)}) = \deg \varphi$.*

(ii) *Si $\dim q = 2^n$, on a $\deg(\varphi_{F(q)}) > \deg \varphi$ si et seulement si q est semblable à une forme de Pfister τ_0 telle que $(\tau_0)_L \simeq \tau$.*

En particulier, $\varphi_{F(q)} \sim 0 \Rightarrow \dim q \leq 2^{\deg(\varphi)}$.

Démonstration. — La première affirmation est claire, d'après le lemme 4.3.2 et le théorème 3.2.4. (i) en résulte. Dans (ii), la suffisance est claire. Pour voir la nécessité, il suffit de démontrer que $\deg(q) = n$. Supposons $\deg(q) < n$. Par application répétée de (i) (à q), on obtient que $\deg(q_L) = \deg(q)$ (noter que $\dim(\varphi_i) > 2^n$ pour tout $i < h - 1$). Mais c'est impossible, puisque q_L est semblable à τ. □

4.4.2. Notation. — $\bar{J}_n(F) = J_n(F)/J_{n+1}(F)$.

4.4.3. Corollaire

(i) *Si $\dim q > 2^n$, $\bar{J}_n(F) \to \bar{J}_n(F(q))$ est injectif.*

(ii) *Si $\dim q = 2^n$, $\bar{J}_n(F) \to \bar{J}_n(F(q))$ est injectif, sauf si q est semblable à une n-forme de Pfister τ. Alors on a $\operatorname{Ker}(\bar{J}_n(F) \to \bar{J}_n(F(q))) = \{0, \bar{\tau}\}$.*

(iii) ***cf.* [12, p. 187] :** *Soient $m = \deg(q)$, $(F_i)_{0 \leq i \leq h(q)}$ la tour de déploiement générique de q, et $i \leq h(q)$. Alors :*

- *Si $i < h(q)$, $\operatorname{Ker}(\bar{J}_n(F) \to \bar{J}_n(F_i)) = 0$ pour $n \leq m$.*
- *Si $i = h(q)$, $\operatorname{Ker}(\bar{J}_n(F) \to \bar{J}_n(F_i)) = 0$ pour $n < m$ et $\operatorname{Ker}(\bar{J}_m(F) \to \bar{J}_m(F_{h(q)})) = \{0, \bar{q}\}$.*

Démonstration. — (i) et (ii) sont des traductions du théorème 4.4.1. Pour voir (iii), on raisonne par récurrence sur i en notant que $\dim q_i > 2^m$ pour $i < h(q)-1$. Traitons seulement le cas $i = h(q)$, $n = m$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(\bar{J}_m(F) \to \bar{J}_m(F_{h(q)}))$. D'après (ii), $x_{F_{h(q)-1}} = (a\bar{q})_{F_{h(q)-1}}$, où $a \in \{0,1\}$ et $\bar{q}$ est l'image de q dans $\bar{J}_m(F)$. On a donc $x - a\bar{q} \in \operatorname{Ker}(\bar{J}_m(F) \to \bar{J}_m(F_{h(q)-1}))$, d'où $x = a\bar{q}$ d'après le cas précédent. □

R.W. Fitzgerald a obtenu d'autres généralisations spectaculaires du théorème 3.2.4. Mentionnons seulement sans démonstration :

4.4.4. Théorème **([54, th. 1.6]).** — *Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec $\varphi \not\sim 0$. Supposons que $\varphi_{F(q)} \sim 0$ et que φ ne soit pas semblable à une forme de Pfister. Alors* $\dim\varphi - 2^{\deg(\varphi)} \geq 2\dim q$.

Voir l'exercice 4.5.4 pour une démonstration. En utilisant le théorème 4.4.1, on obtient

4.4.5. Corollaire. — *Pour q, φ comme dans le théorème 4.4.4, on a* $3\dim q \leq \dim\varphi$.

4.4.6. Théorème **([54, th. 3.2]).** — *Soient q une forme quadratique et ρ une forme de Pfister sur F. Soit φ tel que $\varphi_{F(q)} \sim 0$. Alors $(\rho\otimes\varphi)_{F(\rho\otimes q)} \sim 0$.*

4.4.7. Théorème **([55, prop. 3.2]).** — *Soit* $\dim q \geq 5$ *; supposons que q ne soit pas voisine d'une forme de Pfister. Soit φ anisotrope telle que $\varphi_{F(q)} \sim 0$. Alors*

(i) $16 \mid \dim\varphi$ *;*

(ii) *Il existe une 4-forme de Pfister ρ (éventuellement hyperbolique) telle que $\rho_{F(q)} \sim 0$ et $\varphi \equiv \rho \pmod{I^5F}$.*

4.5. Exercices

4.5.1 **(Knebusch).** — Soit $K = F(T_1, \dots, T_n)$, et soit $q = \langle T_1, \dots, T_n\rangle$. Montrer que la hauteur de q est égale à la partie entière de $n/2$.
(*On construira, pour tout $r \leq n/2$, une extension L_r/K telle que $i(q_L) = r$.*)

4.5.2 **(Arason-Knebusch).** — Soient φ, ψ deux formes quadratiques anisotropes sur F de degrés respectifs n et m. Supposons $\deg(\varphi_{F(\psi)}) > n$. D'après le théorème 4.4.1, on a $\dim\psi \leq 2^n$, donc $m \leq n$.

a) Si $m = n$, alors $\psi \in GP_n(F)$ et $\varphi \equiv \psi \pmod{J_{n+1}(F)}$.

b) Si $m = n-1$, alors $\psi \in GP_{n-1}(F)$.

4.5.3 **(Fitzgerald).** — Pour toute forme quadratique non hyperbolique q sur F, on note $N(q) = \dim q - 2^{\deg q}$. On a $N(q) \geq 0$ et $N(q) = 0 \Leftrightarrow q \in GP(F)$ (cf. corollaire 4.3.7).

Soient φ, q deux formes quadratiques anisotropes sur F, chacune représentant 1. Supposons que $q_{F(\varphi)} \sim 0$ et que $N(q) < 2\dim\varphi$. Soit $a \in D(q)$. Si $aq_{F(q)} \simeq q_{F(q)}$,

alors $aq \simeq q$.
(*Raisonner par l'absurde. Soit* $n = \deg(\langle 1, -a\rangle \otimes q)$ *: d'après le cours on a* $n \geq \deg q + 1$. *Si* $n = \deg q + 1$, *obtenir une contradiction grâce à l'exercice 4.5.2. Si* $n > \deg q + 1$, *appliquer le théorème 3.2.4 à* q *et* aq *pour obtenir* $2^{\deg q} < \dim \varphi$, *et en tirer une contradiction.*)

*4.5.4** **(Fitzgerald)**. — On garde la notation de l'exercice précédent.

Soient φ, q deux formes quadratiques anisotropes sur F telles que $q_{F(\varphi)} \sim 0$. Supposons $N(q) < 2\dim\varphi$. On se propose de montrer que $q \in GP(F)$. Pour cela, on procède par l'absurde : soit (F, φ, q) un contre-exemple avec $N(q) > 0$ minimal. Quitte à multiplier φ et q par un scalaire, on peut supposer que chacune représente 1.

a) Montrer que $h(q) \leq 2$, donc (par hypothèse) que $h(q) = 2$.

b) Soit $a \in D(q)$. Montrer que $(q \perp -aq)_{\mathrm{an}} \in GP(F)$.
(*Utiliser la méthode de l'exercice 3.4.2.*)

c) Montrer que $G(q) = D(q)$. (*Soit* a *comme dans b). Montrer que* $(q \perp -aq)_{\mathrm{an}} = 0$ *en passant au corps des fonctions* K *de* q, *en appliquant l'exercice 3.4.2 à* $((q_K)_{\mathrm{an}}, \varphi_K)$ *et à* $((aq_K)_{\mathrm{an}}, \varphi_K)$ *pour montrer que* $\langle 1, -a\rangle \otimes (q_K)_{\mathrm{an}}$ *est isotrope, puis en utilisant l'exercice 4.5.3.*)

d) Conclure à une absurdité en utilisant le théorème 2.4.10.

4.5.5 **(Hoffmann)**. — Soient q et φ deux formes quadratiques, avec q anisotrope. Supposons que $\dim\varphi = 2^n$ et que $\dim q > 2^{n-1}$. Supposons aussi que $\varphi_{F(q)}$ soit semblable à une forme de Pfister (éventuellement isotrope). Montrer qu'il en est de même de φ. (*Utiliser le théorème 4.4.1 ; distinguer selon que* $\dim q \leq 2^{\deg\varphi}$ *ou* $\dim q > 2^{\deg\varphi}$.)

CHAPITRE 5

FORMES DEVENANT ISOTROPES SUR LE CORPS DES FONCTIONS D'UNE QUADRIQUE

5.1. Généralités

Dans ce chapitre, nous étudions le problème suivant, apparenté à celui de la section 3.2 : soient q, φ deux formes quadratiques sur F. Quand φ devient-elle isotrope sur $F(q)$?

Il est utile de donner quelques définitions et de prouver quelques faits élémentaires :

5.1.1. Proposition. — *Soient q, q' deux formes quadratiques sur F. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$q'_{F(q)}$ est isotrope ;*

(ii) *pour toute forme φ sur F, $\varphi_{F(q')}$ isotrope $\Rightarrow \varphi_{F(q)}$ isotrope.*

Démonstration

(i)⇒(ii) : par la proposition 3.1.1 b), l'extension $F(q, q')/F(q)$ est transcendante pure. Comme $\varphi_{F(q')}$ est isotrope, $\varphi_{F(q,q')}$ l'est également. Par le lemme 2.4.1, $\varphi_{F(q)}$ est isotrope.

(ii)⇒(i) : c'est le cas particulier $\varphi = q'$ (cf. proposition 3.1.1 a)).

□

5.1.2. Remarque. — Une autre condition équivalente est qu'il existe une *application rationnelle* de X_q vers $X_{q'}$, cf. §E.7.A.

5.1.3. Définition. — Soient q, q' deux formes *anisotropes*. Si q, q' satisfont aux conditions de la proposition 5.1.1, on dit que q' *domine* q ou que q est *dominée* par q'. Notation : $q' \succcurlyeq q$ ou $q \preccurlyeq q'$. On dit que q et q' sont *i-équivalentes* ou *stablement équivalentes* si $q \preccurlyeq q'$ et $q' \preccurlyeq q$. Notation : $q \approx q'$.

5.1.4. Lemme

a) *La relation $\preccurlyeq$ définit une relation de préordre sur (l'ensemble sous-jacent à l'anneau) $W(F)$; la relation $\approx$ est la relation d'équivalence associée.*

b) $q' \leq q \Rightarrow q' \preccurlyeq q$.
c) *Si* $q' \leq q$ *et* $\dim q' \geq \dim_{\mathrm{es}} q$ *(déf. 4.1.5 b)), alors* $q' \approx q$.

Démonstration. — a) est clair en utilisant la condition (ii) de la proposition 5.1.1. b) est clair également et c) résulte du lemme 4.1.6. □

5.1.5. Remarque. — Réciproquement, si $q' \leq q$ et $q' \approx q$, alors $\dim q' \geq \dim_{\mathrm{es}} q$. Ce résultat, beaucoup plus difficile, résulte du théorème 5.2.10 ci-dessous.

5.2. Le théorème de Hoffmann

Si $q \leq q'$, on a en particulier $\dim q \leq \dim q'$. Existe-t-il une relation analogue quand $q \preccurlyeq q'$?

La réponse est oui et est due à D.W. Hoffmann. Introduisons une nouvelle notation :

5.2.1. Notation. — Pour une forme quadratique q, $l(q)$ dénote l'unique entier tel que $2^{l(q)-1} < \dim q \leq 2^{l(q)}$.

5.2.2. Théorème ([**68**]). — *Si* $q \preccurlyeq q'$, *alors* $l(q) \leq l(q')$. *En d'autres termes, s'il existe* n *tel que* $\dim q' \leq 2^n < \dim q$, *alors* $q'_{F(q)}$ *est anisotrope.*

Pour démontrer le théorème 5.2.2, nous suivrons la méthode de Hurrelbrink-Rehmann [**82**], qui simplifie un peu celle de [**68**]. Cet argument a été obtenu indépendamment par Cédric Peschard.

5.2.3. Proposition ([**82**, th. 1.7]). — *Soient* q, π *deux formes quadratiques anisotropes sur* F, *avec* π *de Pfister et* $\dim q < \dim \pi$. *Posons* $\tilde{q} = \pi \perp -q$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\pi_{F(\tilde{q}_{\mathrm{an}})}$ *est isotrope ;*
(ii) $q \leq \pi$.

Démonstration

(ii)⇒(i) : écrivons $\pi \simeq q \perp q'$. Alors :

$$\tilde{q}_{\mathrm{an}} \sim q \perp q' \perp -q \sim q'$$

d'où $\tilde{q}_{\mathrm{an}} \simeq q'$. Ainsi $\tilde{q}_{\mathrm{an}} \leq \pi$ et $\pi_{F(\tilde{q}_{\mathrm{an}})}$ est isotrope.

(i)⇒(ii) : $\pi_{F(\tilde{q}_{\mathrm{an}})}$ isotrope implique $\pi_{F(\tilde{q}_{\mathrm{an}})} \sim 0$ (corollaire 2.1.8). Comme $\dim q < \dim \pi$, $\pi \perp -\tilde{q}_{\mathrm{an}} \sim q$ est isotrope et il existe $a \in F^*$ représenté par π et $\tilde{q}_{\mathrm{an}}$. En appliquant le théorème 3.2.4 avec $(q, \varphi, a, b) = (\tilde{q}_{\mathrm{an}}, \pi, a, a)$, on voit que $\tilde{q}_{\mathrm{an}} \leq \pi$. Il existe donc q' tel que $\pi \simeq \tilde{q}_{\mathrm{an}} \perp q'$ et

$$\begin{aligned} & \pi \simeq \tilde{q}_{\mathrm{an}} \perp q' \sim \pi \perp -q \perp q' \\ \Longrightarrow \quad & q \sim q' \\ \Longrightarrow \quad & q \simeq q' \end{aligned}$$

puisque q est anisotrope.

$\square$

5.2.4. Corollaire. — *Soient $q, \pi, \tilde{q}$ comme dans la proposition 5.2.3. Soit $F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_h$ la tour de déploiement générique de $\tilde{q}$. Alors il existe $i < h$ tel que π_{F_i} soit anisotrope et $(q_{F_i})_{\mathrm{an}} \le \pi_{F_i}$. Si de plus*

a) *$q_{F(\pi)}$ est anisotrope*

b) $\dim q \le \frac{1}{2} \dim \pi$

l'extension $F_i(\pi)/F(\pi)$ est transcendante pure.

Démonstration. — Notons que $\pi_{F_h} \sim q_{F_h}$, donc que π_{F_h} est isotrope puisque $\dim q < \dim \pi$. Soit i le plus grand entier tel que π_{F_i} soit anisotrope. Par la proposition 5.2.3, on a $(q_{F_i})_{\mathrm{an}} \le \pi_{F_i}$.

Supposons maintenant que q vérifie a) et b). On va montrer que $(\tilde{q}_j)_{F_j(\pi)}$ est isotrope pour tout j tel que $\pi_{F_{j+1}}$ soit anisotrope : alors $F_{j+1}(\pi)/F_j(\pi)$ sera transcendante pure pour tout $j < i$, par la proposition 3.1.1 b). Par récurrence sur j, on peut supposer $j = 0$.

On raisonne par l'absurde, en supposant que $(\tilde{q}_{\mathrm{an}})_{F(\pi)}$ est anisotrope. Notons d'abord que

$$(\tilde{q}_{\mathrm{an}})_{F(\pi)} \sim -q_{F(\pi)}.$$

Comme $q_{F(\pi)}$ est anisotrope, on a $\dim \tilde{q}_{\mathrm{an}} = \dim q$. Comme $\dim q \le \frac{1}{2} \dim \pi$ on a aussi

$$\frac{1}{2} \dim \pi \ge \dim q = \dim(\pi \perp -q)_{\mathrm{an}} \ge \dim \pi - \dim q \ge \frac{1}{2} \dim \pi,$$

d'où $\dim q = \dim \tilde{q}_{\mathrm{an}} = \frac{1}{2} \dim \pi$ et $q \perp \tilde{q}_{\mathrm{an}} \simeq \pi$. Mais ceci contredit l'isotropie de π_{F_1}. $\square$

***5.2.5. Lemme* (Springer).** — *Soient q_1, q_2 deux formes anisotropes sur F. Alors $q_1 \perp T q_2$ est anisotrope sur $F(T)$.*

Démonstration. — Soient V_1, V_2 les espaces vectoriels sous-jacents à q_1 et q_2, et soit si possible $(x, y) \in F(T) \otimes_F V_1 \times F(T) \otimes_F V_2 \setminus \{0, 0\}$ tel que $q_1(x) + T q_2(y) = 0$. Quitte à chasser les dénominateurs, on peut supposer que $(x, y) \in F[T] \otimes_F V_1 \times F[T] \otimes_F V_2$ et que $(x(0), y(0)) \ne (0, 0)$. On a alors

$$q_1(x(0)) = 0$$

d'où $x(0) = 0$ et $x = T x'$ avec $x' \in F[T] \otimes_F V_1$. On a alors

$$T q_1(x') + q_1(y) = 0$$

d'où $q_1(y(0)) = 0$ et $y(0) = 0$, ce qui est absurde. $\square$

5.2.6. Lemme. — *Soient $E = F(T_1, \ldots, T_{n+1})$, $\pi_{n+1} = \langle\langle T_1, \ldots, T_{n+1} \rangle\rangle \in W(E)$ et $L = E(\pi_{n+1})$. Alors*

a) *Pour toute forme φ anisotrope sur F, $\varphi \otimes \pi_{n+1}$ est anisotrope sur E ;*
b) *L/F est transcendante pure.*

Démonstration

a) Par récurrence sur n, on peut supposer que $\varphi \otimes \pi_n$ est anisotrope. On a

$$\varphi \otimes \pi_{n+1} \simeq \varphi \otimes \pi_n \perp -T_{n+1}\varphi \otimes \pi_n$$

et la conclusion résulte du lemme 5.2.5.

b) On a $L = Frac(E[x_2, \ldots, x_{N'}]/(\pi_{n+1}(1, x_2, \ldots, x_{N'})))$ ($N' = 2^{n+1}$). Observons qu'à partir de l'équation $\pi_n(1, x_2, \ldots, x_{N'}) = 0$ en les variables $T_1, \ldots, T_{n+1}$, $x_2, \ldots, x_{N'}$, on peut écrire T_1 comme fonction rationnelle des autres variables. Par conséquent, l'homomorphisme injectif

$$F(T_2, \ldots, T_{n+1})[x_2, \ldots, x_{N'}] \longrightarrow E[x_2, \ldots, x_{N'}]/(\pi_{n+1}(1, x_2, \ldots, x_{N'}))$$

induit un isomorphisme $F(T_1, \ldots, T_{n+1}, x_2, \ldots, x_{N'}) \xrightarrow{\sim} L$.

□

Démonstration du théorème 5.2.2. — On applique le corollaire 5.2.4 à $(F, q, \pi) = (E, q'_E, \pi_{n+1})$, où E et π_{n+1} sont comme dans le lemme 5.2.6 (n est l'entier du théorème 5.2.2). Notons que l'hypothèse a) du corollaire 5.2.4 est vérifiée, car q' est définie sur F et L/F est transcendante pure. L'hypothèse b) est également vérifiée. Il existe donc K/L tel que

– π_K soit anisotrope
– $q'_K \leq \pi_K$
– $K(\pi)/E(\pi)$ soit transcendante pure.

Supposons que $q'_{F(q)}$ soit isotrope. Alors $q'_{K(q)}$ est isotrope et $\pi_{K(q)}$ est hyperbolique. Par conséquent, q_K est semblable à une sous-forme de π_K. Comme $\dim q > \frac{1}{2}\dim \pi$, $q_{K(\pi)}$ est isotrope (corollaire 2.1.8 et lemme 5.1.4 c)). Mais c'est absurde : les extensions $K(\pi)/E(\pi)$ et $E(\pi)/F$ sont transcendantes pures, donc $K(\pi)/F$ l'est aussi et $q_{K(\pi)}$ ne peut pas être isotrope. □

5.2.7. Corollaire. — *Si* $\dim q' \leq 2^n < \dim q$, *on a* $h(q'_{F(q)}) = h(q')$.

Démonstration. — Appliquer le théorème 5.2.2 à q'_i et q_{F_i}, où (F_i) est la tour de déploiement générique de q'. □

5.2.8. Corollaire. — *Soit q anisotrope et soit n le plus grand entier tel que* $2^n < \dim q$. *Alors* $i_1(q) \leq \dim q - 2^n$.

Démonstration. — Prendre une sous-forme $q' \leq q$ de dimension 2^n et appliquer le lemme 5.1.4 c) et le théorème 5.2.2. □

5.2.9. Remarque. — Dans l'esprit de l'énoncé du théorème 5.2.2, signalons le théorème suivant de Karpenko et Merkurjev (obtenu par des techniques faisant appel aux cycles algébriques) :

5.2.10. Théorème. —

a) *Si* $q \preccurlyeq q'$, *alors* $\dim_{\mathrm{es}} q \leq \dim_{\mathrm{es}} q'$.

b) *Si* $q \preccurlyeq q'$ *et* $\dim_{\mathrm{es}} q = \dim_{\mathrm{es}} q'$, *alors* $q \approx q'$.

Voir §E.8.B.

5.3. Voisines

À la fin de la démonstration du théorème 5.2.2, on a vu intervenir une forme quadratique d'un type particulier : une sous-forme d'une forme de Pfister φ de dimension plus grande que $\frac{1}{2}\dim\varphi$. Ces formes, particulièrement importantes, ont été introduites par Knebusch.

5.3.1. Définition **(Knebusch [123**, def. 7.4]**).** — Soient q une forme quadratique et φ une n-forme de Pfister (éventuellement isotropes). La forme q est dite *voisine* de φ si

(i) $\dim q > 2^{n-1}$

(ii) q est semblable à une sous-forme de φ.

Une forme q' telle que $q \perp q' \propto \varphi$ s'appelle la *forme complémentaire* de q.

Noter que n est l'unique entier tel que $2^{n-1} < \dim q \leq 2^n$.

5.3.2. Théorème **([123**, p. 3]**).** — *Les formes* φ *et* q' *de la définition 5.3.1 sont uniquement déterminées par* q.

Démonstration. — Soit $a \in F^*$ tel que $q \perp q' \simeq a\varphi$, et soient φ' un autre forme de Pfister et $a' \in F^*$ tels que $q \leq a'\varphi'$. Alors

$$\dim_{\mathrm{an}}(a\varphi \perp -a'\varphi') < 2^n$$

et

$$a\varphi \perp -a'\varphi' \in I^n F.$$

Par le théorème 3.3.1, $a\varphi \simeq a'\varphi'$; par le corollaire 2.1.9, $\varphi \simeq \varphi'$. Finalement, supposons que $q \perp q' \simeq a\varphi$ et que $q \perp q'' \simeq b\varphi$ pour deux formes quadratiques q', q'' et deux scalaires a, b. Alors $\langle a, -b\rangle \otimes \varphi \in GP(F)$ est isotrope, donc hyperbolique ; on en déduit que $a\varphi \simeq b\varphi$, donc que $q' \simeq q''$. □

Le lemme suivant est souvent utile :

5.3.3. Lemme. — *Soient* q_1, q_2 *deux voisines de codimension* 1 *d'une même forme de Pfister* φ. *Alors* q_1 *et* q_2 *sont semblables.*

Démonstration. — En effet, il existe $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ tels que $q_i \perp \langle a_i\rangle \simeq b_i\varphi$ $(i = 1, 2)$. Alors $a_i q_i \perp \langle 1\rangle \simeq a_i b_i \varphi$. Comme $1 \in D(a_i b_i \varphi)$, on a $a_i b_i \varphi \simeq \varphi$ (corollaire 2.1.9), d'où il résulte que $a_1 q_1 \simeq a_2 q_2$. □

5.3.4. Théorème. — *Soient π une forme de Pfister, q une voisine de π et q' une forme quadratique anisotrope sur F. Alors,*

a) $q \approx \pi$.
b) $q' \preccurlyeq q \Leftrightarrow q'$ *est semblable à une sous-forme de* π.
c) $q' \approx q \Leftrightarrow q'$ *est voisine de* π.

Démonstration. — a) résulte du corollaire 2.1.8 et du lemme 5.1.4 c). On en déduit que $q' \preccurlyeq q$ si et seulement si $q' \preccurlyeq \pi$. Dans b), la suffisance résulte alors du lemme 5.1.4 b) ; la nécessité résulte du corollaire 2.1.8 et du théorème 3.2.4. Dans c), la suffisance a été vue ; pour la nécessité, il suffit de voir que $q' \approx \pi$ implique que q' est voisine de π. On sait déjà que q' est semblable à une sous-forme de π ; d'autre part, le théorème 5.2.2 implique que $\dim q' > \frac{1}{2}\dim \pi$. □

On peut démontrer (voir [**68**], [**82**]) :

5.3.5. Proposition. — *Pour q, n comme dans le corollaire 5.2.8, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $i_1(q) = \dim q - 2^n$;
(ii) *il existe K/F tel que q_K soit voisine d'une K-forme de Pfister et $h(q_K) = h(q)$.*

5.3.6. Remarque. — On prendra garde au fait que, dans le théorème 5.3.4 b), q' n'est pas en général semblable à une sous-forme de q. Un exemple avec $\dim q' = 3$ et $\dim q = 5$ est dû à Wadsworth (non publié) : on le trouvera dans l'article de Lam [**145**], ainsi que de nombreux autres exemples. Pour des résultats positifs, voir par contre le §8.2.

5.4. Formes excellentes

5.4.1. Définition. — Soient K/F une extension et φ une forme quadratique sur K. On dit que φ est *définie sur F* s'il existe une forme quadratique ψ sur F telle que $\psi_K \simeq \varphi$. On dit que φ est *définie sur F à équivalence de Witt près* si $[\varphi] \in \mathrm{Im}(W(F) \to W(K))$.

Pour toute forme quadratique q sur F, les noyaux supérieurs q_i sont évidemment définis sur F à équivalence de Witt près. La question se pose de savoir quand q_i est *défini sur F*. On va répondre complètement à cette question dans deux cas :

– $i = 1$;
– q_i est définie sur F pour tout i.

Commençons par un lemme dû à Knebusch :

5.4.2. Lemme (**[123**, prop. 7.2]). — *Soit q une forme quadratique sur F. Notons $(F_i, q_i)_{0\leq i\leq h}$ sa tour de déploiement générique, et soit $r \in [1, h]$. Alors l'ensemble*

$$X_r(q) = \{[\varphi] \in W(F) \mid \varphi_{F_r} \sim q_r \text{ et } \dim \varphi < \dim q_{r-1}\}$$

a au plus un élément.

Démonstration. — a) Soit $[\varphi] \in X = X_r(q)$ avec $\dim \varphi$ minimal (donc φ anisotrope), soit si possible $[\varphi'] \in X$ avec $\varphi' \not\simeq \varphi$ et posons $\eta = (\varphi \perp -\varphi')_{\mathrm{an}} (\not\simeq 0)$. Traitons d'abord le cas $r = 1$. On a alors $\eta_{F(q)} \sim 0$. En appliquant le théorème 3.2.4, on obtient

$$\eta \simeq aq \perp \psi$$

pour une forme quadratique ψ et un scalaire a convenables. Notons que $[-a\psi] \in X$. D'autre part, on a

$$\dim \varphi + \dim \varphi' \geq \dim \eta = \dim q + \dim \psi$$

ou

$$\dim \varphi - \dim \psi \geq \dim q - \dim \varphi' > 0$$

ce qui contredit la minimalité de $\dim \varphi$.

Supposons maintenant $r > 1$. On raisonne par récurrence sur r. Soit $s \in [0, r-1]$ maximal tel que $\eta_{F_s} \not\sim 0$. Si $s = 0$, on raisonne comme dans le cas $r = 1$ pour obtenir une contradiction. Si $s > 0$, on applique l'hypothèse de récurrence sur F_1, ce qui donne de nouveau une contradiction. □

5.4.3. Théorème (**Knebusch, Hoffmann**). — *On a $X_1(q) \neq \emptyset$ si et seulement si q est voisine d'une forme de Pfister φ ; l'élément de $X_1(q)$ est alors $[-\psi]$, où ψ est la forme complémentaire de q. Dans ce cas, $\psi_{F(q)}$ est* anisotrope, *autrement dit q_1 est définie sur F. De plus, on a*

$$\deg \varphi > \deg q + 1.$$

Démonstration. — Si q est voisine d'une forme de Pfister φ, on a

$$q \perp \psi \simeq a\varphi$$

où ψ est la forme complémentaire de q. On a $\dim \psi < \dim q$ et

$$q_{F(q)} \perp \psi_{F(q)} \simeq a\varphi_{F(q)} \sim 0$$

donc $[-\psi] \in X_1(q)$.

Réciproquement, soit ψ telle que $[-\psi] \in X_1(q)$. On a donc

$$(q \perp \psi)_{F(q)} \sim 0.$$

Par hypothèse, $\dim(q \perp \psi) < 2 \dim q$; en appliquant le théorème 4.4.4, on obtient que $q \perp \psi$ est semblable à une forme de Pfister anisotrope φ. Comme $\dim q > \dim \psi$, q est voisine de φ.

Pour voir que $\psi_{F(q)}$ est anisotrope, il suffit maintenant de remarquer que $\dim \psi$ et $\dim q$ sont séparés par une puissance de 2 et d'appliquer le théorème 5.2.2.

Il reste à voir la dernière inégalité : mais on a $2^{\deg q} \leq \dim q_1$ et

$$\dim q_1 < \frac{1}{2}\dim(q \perp -q_1) = 2^{\deg \varphi - 1}$$

d'où l'énoncé. □

5.4.4. Remarque. — La partie “si” du théorème 5.4.3 est le théorème 7.3 de Knebusch [**123**]. La démonstration de Knebusch évitait le théorème de Fitzgerald 4.4.4 (qui n'était alors pas démontré) mais était nettement plus délicate. Peut-être Fitzgerald a-t-il été inspiré par ce résultat de Knebusch. Il a fallu attendre le théorème de Hoffmann 5.2.2 pour pouvoir démontrer la partie “seulement si”, qui était une question posée par Knebusch [**123**, question 8.3] (Knebusch avait réussi à la démontrer jusqu'à $\deg \varphi = 5$, [**123**, prop. 8.1]).

Nous allons maintenant généraliser un autre résultat de Knebusch [**123**, th. 9.9], qui concerne le cas $j = h - 1$ du corollaire ci-dessous (voir aussi [**97**, prop. 3]).

5.4.5. Corollaire. — *Supposons que $X_j(q) \neq \emptyset$ pour un $j \in]0, h(q)[$, et soit $\tilde{q}_j \in X_j(q)$, anisotrope. Alors $\dim \tilde{q}_j = \dim q_j$ et*

$$\deg(q \perp -\tilde{q}_j) = \deg(q_{j-1} \perp -\tilde{q}_j \otimes_F F_{j-1}) > \deg q + 1.$$

Démonstration. — La dernière inégalité résulte du théorème 5.4.3. D'après le lemme 4.3.2, on a $\deg(q \perp -\tilde{q}_j) \leq \deg(q_{j-1} \perp -\tilde{q}_j \otimes_F F_{j-1})$. Supposons que l'inégalité soit stricte, et soit τ la forme dominante de $q \perp -\tilde{q}_j$: d'après le théorème 4.4.1 et le théorème 5.4.3, on a

$$\dim q \leq \dim \tau \leq \frac{1}{2}\dim_{\mathrm{an}}(q_{j-1} \perp -\tilde{q}_j \otimes_F F_{j-1}) < \frac{1}{2}(\dim q_{j-1} + \dim q_{j-1}) \leq \dim q$$

contradiction.

Pour voir que $\dim \tilde{q}_j = \dim q_j$, on applique le théorème 4.4.4 : par hypothèse $\dim \tilde{q}_j < \dim q_{j-1}$, donc $q_{j-1} \perp -\tilde{q}_j \otimes_F F_{j-1}$ est semblable à une forme de Pfister anisotrope, et a fortiori $\tilde{q}_j \otimes_F F_{j-1}$ est anisotrope. □

5.4.6. Remarque. — Dans le corollaire 5.4.5, notons simplement $\tilde{q}_j = q_j$; soient $\varphi = (q \perp -q_j)_{\mathrm{an}}$, $e = h(\varphi)$ et $(L_i)_{0 \leq i \leq e}$ la tour de déploiement générique de φ. De même que dans [**123**, Ex. 9.10], on voit tout de suite que F_j est équivalent à L_e au sens qu'il existe des F-places de l'un vers l'autre dans les deux sens, et qu'il existe une place de L_{e-1} vers F_{j-1} spécialisant φ_{e-1} en $q_{j-1} \perp -q_j$ (notons que ces deux formes sont semblables à des formes de Pfister de même degré d'après le corollaire 5.4.5).

5.4.7. Proposition. — *Soit q une forme quadratique sur F et $i \in [0, h(q)]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *q_i est définie sur F.*

(ii) *Pour toute extension K/F telle que* $\dim_{\mathrm{an}}(q_K) = \dim q_i$, *la forme* $(q_K)_{\mathrm{an}}$ *est définie sur F.*

Démonstration. — Il est clair que (ii)⇒(i). Pour l'implication réciproque, notons $K_i = KF_i$, et notons encore q_i l'unique F-forme quadratique telle que $(q_i)_{F_i} \simeq q_i$ (cf. lemme 5.4.2). On a évidemment

$$(q_i)_{K_i} \sim (q_K)_{K_i}.$$

On voit comme dans la démonstration du théorème 4.1.3 que l'extension K_i/K est transcendante pure. Il en résulte que

$$(q_i)_K \sim q_K$$

(cf. lemme 2.4.1). Comme par hypothèse $\dim_{\mathrm{an}}(q_K) = \dim q_i$, on en déduit que $(q_i)_K \simeq (q_K)_{\mathrm{an}}$. □

***5.4.8. Théorème* (cf. Knebusch [123, th. 7.14 et rem. 7.15])**

Soient q une forme quadratique sur F et $i \in [0, h(q)]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Pour tout $j \leq i$, $X_j(q) \neq \emptyset$.*

(ii) *Il existe des F-formes de Pfister $\tau_1, \dots, \tau_i$, des F-formes $q'_0, \dots, q'_i$ et des scalaires $a_1, \dots, a_i$ tels que $q'_0 = q_{\mathrm{an}}$ et que, pour tout $j \in [1, i]$, on ait $q'_{j-1} \perp -q'_j \simeq a_j\tau_j$.*

(iii) ***cf.*** [**99**, prop. 5.1]**:** *Il existe des F-formes de Pfister $\tau_1, \dots, \tau_i$, telles que $\tau_j \mid \tau_{j-1}$ pour $j \in [1, i]$, des F-formes $q'_0, \dots, q'_i$ et un scalaire a tels que $q'_0 = q_{\mathrm{an}}$ et que, pour tout $j \in [1, i]$, on ait $q'_{j-1} \perp -q'_j \simeq (-1)^{j+1}a\tau_j$.*

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on a

$$[q] = a([\tau_1] - [\tau_2] + \cdots + (-1)^{i+1}[\tau_i]) + (-1)^{i+2}[q'_i]$$

dans $W(F)$. De plus, on a $h(q'_i) = h(q) - i$, et la suite de déploiement de q'_i (cf. définition 4.1.1) est $(\dim q_i, \dots, \dim q_h)$.

Démonstration. — Il est évident que (iii)⇒(ii). Montrons que (ii)⇒(i) : il suffit de prouver que, pour tout $j \leq i$, $(q'_j)_{F_j} \simeq q_j$. On raisonne par récurrence sur j, le cas $j = 0$ étant trivial. Si $j > 0$, par hypothèse on a

$$(q'_{j-1})_{F_{j-1}} \simeq q_{j-1}$$

d'où

$$(a_j\tau_j)_{F_{j-1}} \simeq q_{j-1} \perp -(q'_j)_{F_{j-1}}.$$

Comme q_{j-1} est voisine de $(\tau_j)_{F_{j-1}}$, cette forme est anisotrope et il en est donc de même de $(q'_j)_{F_{j-1}}$. D'autre part,

$$(a_j\tau_j)_{F_j} \sim 0$$

donc
$$(q'_j)_{F_j} \sim q_j.$$

Mais d'après le théorème 5.4.3, $(q'_j)_{F_j}$ est anisotrope, ce qui conclut la démonstration de (ii)⇒(i).

Montrons maintenant que (i)⇒(iii). Grâce au lemme 5.4.2 et au corollaire 5.4.5, notons, pour tout $j \leq i$, q'_j la descente de q_j à F. Montrons d'abord que, pour tout j, $q'_{j-1} \perp -q'_j \in GP(F)$. On raisonne encore par récurrence sur i. Ceci permet de supposer l'énoncé vrai pour $j < i$.

Soit $\rho = q'_{i-1} \perp -q'_i$. D'après la proposition 4.2.1, il suffit de montrer que $h(\rho) \leq 1$. Notons $K = F(\rho)$ et $K_j = KF_j$. D'après le théorème 5.4.3, on a $\rho_{F_{i-1}} \in GP(F_{i-1})$. Par conséquent, $\rho_{K_{i-1}} \sim 0$.

Montrons que ρ_{K_j} est hyperbolique pour tout $j \in [0, i-1]$, par récurrence descendante sur j. On a $K_j = K_{j-1}(q_{j-1})$ et d'autre part, toujours par le théorème 5.4.3, $\nu := q_{j-1} \perp -(q'_j)_{F_{j-1}} \in GP(F_{j-1})$. Par récurrence $\rho_{K_j} \sim 0$. En appliquant le théorème 5.3.4 a), on obtient donc
$$\rho_{K_{j-1}}(\nu) \sim 0.$$

Supposons $\rho_{K_{j-1}} \not\sim 0$. D'après le théorème 3.2.4, on a alors $\dim \nu \leq \dim \rho_{K_{j-1}}$, ou encore
$$\dim q_{j-1} + \dim q_j \leq \dim q_{i-1} + \dim q_i$$
ce qui est absurde. Ainsi, $\rho_{K_{j-1}} \sim 0$ et finalement $\rho_K \sim 0$.

Par récurrence sur i (appliquée à q'_1), il existe $a \in F^*$ et des $\tau_j \in P(F)$ ($j \in [2, i]$) tels que τ_{j+1} divise τ_j et que $q'_{j-1} \perp -q'_j \simeq (-1)^{j+1} a\tau_j$ pour $j > 1$. D'autre part, on a
$$q \perp -q'_1 \simeq b\tau_1$$
pour $b \in F^*$ et $\tau_1 \in P(F)$ convenables. Tout d'abord, comme q'_1 est voisine de τ_2, on a d'après le théorème 5.3.4 a),
$$(\tau_1)_{F(\tau_2)} \sim 0$$
donc τ_2 divise τ_1, et en particulier $D(\tau_2) \subset D(\tau_1)$. Mais
$$D(q'_1) \subset D(-a\tau_2)$$
donc $D(a\tau_1) \cap D(b\tau_1) \neq \emptyset$. Par multiplicativité de τ_1, il en résulte que $ab \in D(\tau_1) = G(\tau_1)$, et donc que $b\tau_1 \simeq a\tau_1$.

La valeur de $[q] \in W(F)$ est claire. Pour démontrer la dernière assertion, il suffit par récurrence de traiter le cas $i = 1$. Soit S la suite de déploiement de q'_1. On a
$$(q'_1)_{F_1} \sim q_1$$
donc, d'après le théorème 4.1.3, $S \supset \{\dim q_1, \ldots, \dim q_h\}$, où $h = h(q)$. D'autre part,
$$q_{F(q'_1)} \sim -(q'_1)_{F(q'_1)}$$

donc $S \setminus \{\dim q_1'\} \subset \{\dim q_2, \ldots, \dim q_h\}$ (noter que $\dim_{\mathrm{an}} q_{F(q_1')} < \dim q_1' = \dim q_1$). Il en résulte que $S = \{\dim q_2, \ldots, \dim q_h\}$ et en particulier que $h(q_1') = h(q) - 1$. □

***5.4.9. Définition* (Knebusch [123, def. 7.7]).** — Une forme quadratique q est *excellente* si q_{an} vérifie les conditions du théorème 5.4.8 avec $i = h(q)$.

5.4.10. Exemple. — Pour tout $n \geq 1$, la forme $n\langle 1\rangle$ est excellente.

5.4.11. Proposition. — *Si q est excellente et anisotrope, sa suite de déploiement S ne dépend que de $n = \dim q$. On a*

$$S = \{n, c(n), c(c(n)), \ldots\}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c(k) = 2^{l(k)} - k$ (cf. notation 5.2.1). En particulier, $h(q) = h(n)$ ne dépend que de n.

Signalons le théorème récent suivant de Hurrelbrink, Karpenko et Rehmann :

***5.4.12. Théorème* ([80]).** — *Soit q une forme anisotrope de dimension n. Alors $h(q) \geq h(n)$.*

5.5. Formes de Pfister croisées

***5.5.1. Définition* (Fitzgerald).** — Une forme quadratique est *bonne* si sa forme dominante (déf. 4.3.1 b)) est définie sur le corps de base F.

5.5.2. Proposition. — *Soit q une forme quadratique sur F, et soit φ une forme quadratique sur $F(q)$. Supposons φ définie sur F par une forme ψ. Si $\dim\varphi < \dim q$ et si $\varphi \in GP(F(q))$, alors $\psi \in GP(F)$. Si $\varphi \in P(F(q))$, alors on peut choisir ψ dans $P(F)$. Dans ces conditions, ψ est unique.*

Démonstration. — Pour la première assertion, il suffit de montrer que $h(\psi) = 1$. On a

$$\psi_{F(q,\psi)} \simeq \varphi_{F(q,\varphi)} \sim 0.$$

Supposons $\psi_{F(\psi)} \not\sim 0$. Par le théorème 3.2.4, $q_{F(\psi)}$ est alors semblable à une sous-forme de $\psi_{F(\psi)}$, ce qui est impossible puisque $\dim q > \dim\psi$. Finalement, si φ est une forme de Pfister et $\psi \simeq a\tau$ avec $a \in F^*$ et $\tau \in P(F)$, on a $a\tau_{F(q)} \simeq \varphi$, donc $\tau_{F(q)} \simeq \varphi$ d'après le corollaire 2.1.9.

Enfin, soit ψ' une autre forme telle que $\psi'_{F(q)} \simeq \varphi$. Par le même raisonnement que ci-dessus, on voit que $\psi'_{F(\psi)} \sim 0$; donc $\psi' \propto \psi$ puisque $\dim\psi' = \dim\psi$. Si $\psi' \in P(F)$, on a donc $\psi' \simeq \psi$ d'après le corollaire 2.1.9. □

5.5.3. Corollaire. — *Si q est bonne, sa forme dominante est définie sur F par une forme de Pfister uniquement déterminée. Cette forme est appelée la* descente *de la forme dominante de q.*

Démonstration. — On applique la proposition 5.5.2 de manière répétée dans la tour de déploiement générique de q. □

5.5.4. Définition **(Hoffmann [70**, déf. 3.4]**).** — Soit φ une forme quadratique sur F de dimension 2^n.

a) On dit que q est une (n,m)*-forme de Pfister croisée* s'il existe $\varphi \in P_n(F)$ et $\tau \in P_m(F)$ anisotropes, avec $1 \leq m < n$, telles que $q = \varphi - \tau$ dans $W(F)$. L'ensemble des (classes d'isométrie de) (n,m)-formes de Pfister croisées est noté $P_{n,m}(F)$. L'ensemble des (classes d'isométrie de) formes semblables à une (n,m)-forme de Pfister croisée est noté $GP_{n,m}(F)$.

b) On dit que q est une (n,m)*-forme de Pfister faiblement croisée* s'il existe $\tau \in P_m(F)$ avec $1 \leq m < n$ et une forme η de dimension impaire telles que

$$q \equiv \tau \otimes \eta \pmod{J_n(F)}.$$

L'ensemble des (classes d'isométrie) de (n,m)-formes de Pfister faiblement croisées est noté $P^w_{n,m}(F)$.

5.5.5. Remarque. — La définition donnée ci-dessus est un peu plus large que celle de Hoffmann, qui ne considère que les formes de Pfister croisées anisotropes.

5.5.6. Lemme. — *Une forme q est semblable à une (n,m)-forme de Pfister croisée si et seulement si $q \simeq \eta \otimes \pi$ avec $\eta \in GP_{n-m+1,1}(F)$ et $\pi \in P_{m-1}(F)$.*

Démonstration. — Cela résulte facilement du théorème 2.3.2. □

5.5.7. Proposition

a) *On a $GP_{n,m}(F) \subset P^w_{n,m}(F)$.*
b) *Soient q, τ comme dans la définition 5.5.4 b). Alors la forme dominante de q est définie sur F par τ ; en particulier, τ est unique, $q \notin GP(F)$, on a $\deg(q) = m$, et q est bonne. Si $m < n-1$, q_{h-1} est définie sur F, où $h = h(q)$.*
c) *Si φ, τ sont comme dans la définition 5.5.4 a), la forme φ est elle aussi uniquement déterminée par q ; les formes φ et τ sont $(m-1)$-liées au sens de la définition 2.3.1. La forme q_{an} est excellente si et seulement si q est isotrope.*

Démonstration

a) est évident.
b) Par le théorème 4.3.3, la forme dominante de q est définie sur F par τ. Par conséquent, on a $\deg(q) = m$; puisque q est de dimension 2^n, il en résulte que $q \notin GP(F)$. L'unicité de τ découle du corollaire 5.5.3. Si $m < n-1$, on remarque que, d'après le corollaire 6.1.4 ci-dessous[(1)], $q \equiv a\tau \pmod{J_{m+2}(F)}$ pour un $a \in F^*$ convenable. Le théorème 4.3.3 implique alors que q_{h-1} est

[(1)] Le lecteur vérifiera que la démonstration du corollaire 6.1.4 n'utilise pas la proposition 5.5.7 a).

définie sur F par $a\tau$. La première assertion de c) résulte immédiatement de b) ; les deux autres résultent du théorème 2.3.2.

□

5.5.8. Théorème **(cf.** [**70**, prop. 3.6]). — *Soit $q \in P^w_{n,m}(F)$, et soit τ sa forme dominante (vue sur F). Supposons q anisotrope. Alors*

(i) *$q_{F(\tau)}$ est semblable à une n-forme de Pfister anisotrope.*
(ii) *$h(q) = 2$ si $m = n - 1$; on a alors $i_1(q) = 2^{n-2}$.*
(iii) *$h(q) \geq 3$ si $m < n - 1$.*
(iv) *Si $m < n - 1$ et $q \equiv a\tau \pmod{J_n(F)}$ pour un $a \in F^*$, alors $h(q) = 3$ et $i_1(q) = 2^{m-1}$.*

Démonstration. — D'après le corollaire 4.3.7, $q_{F(\tau)} \in GP_n(F(\tau))$. Supposons q isotrope, donc hyperbolique. Par le corollaire 3.2.5, on a $q \simeq \tau \otimes \rho$ pour ρ convenable. Mais $\dim \rho = 2^n - 2^m$ est paire ; on a alors $q \in I^{m+1}F$, ce qui est absurde. Ceci démontre (i).

D'après la proposition 5.5.7 b), on a $h(q) \geq 2$. Soit (F_i, q_i) la tour de déploiement générique de q. On a $\dim q_1 < 2^n$; par le théorème 3.3.1, on a donc $(q_1)_{F_1(\tau)} \sim 0$ et, par le corollaire 3.2.5, $q_1 \simeq \tau_{F_1} \otimes \gamma$. En comparant les dimensions, on obtient $1 \leq \dim \gamma \leq 2^{n-m} - 1$. De plus, $\dim \gamma$ est impaire (voir ci-dessus).

Supposons $m = n - 1$. Alors $\dim \gamma = 1$, d'où $h(q) = 2$; on a $i_1(q) = \frac{1}{2}(\dim q - \dim q_1) = 2^{n-2}$. Ceci démontre (ii). Supposons maintenant $m < n - 1$. Si $h(q) = 2$, q est excellente d'après la proposition 5.5.7 b) ; mais c'est impossible, puisque $\dim q$ est une puissance de 2. On a donc $h(q) \geq 3$. Ceci démontre (iii).

Supposons enfin $m < n - 1$ et $q \equiv a\tau \pmod{J_n(F)}$ pour un $a \in F^*$. Posons

$$\mu = (q \perp -a\tau)_{\mathrm{an}}$$
$$\psi = \tau_{F_1} \otimes (\gamma \perp \langle -a \rangle) \sim \mu_{F_1}.$$

On a $\mu \in J_n(F)$ et $0 < 2^n - 2^m \leq \dim \mu \leq 2^n + 2^m$, d'où $\deg(\mu) = n$. D'autre part, $\psi \in J_n(F_1)$ et $\dim(\gamma \perp \langle -a \rangle) \leq 2^{n-m}$, d'où $\psi \in GP_n(F_1)$ (cf. corollaire 4.3.7).

Si $\psi \sim 0$, alors en particulier, $\deg(\mu_{F(q)}) > \deg(\mu)$; par le théorème 4.4.1 (ii), ceci entraîne que $q \in GP(F)$, ce qui contredit la proposition 5.5.7 b). Par conséquent, ψ est anisotrope.

On a donc $\dim q_1 = 2^n - 2^m > 2^{n-1}$, et donc q_1 est voisine, de forme complémentaire $a\tau_{F_1}$. Il en résulte que $q_2 \simeq a\tau_{F_2}$, donc que $h(q) = 3$. De plus,

$$i_1(q) = \frac{1}{2}(\dim q - \dim q_1) = 2^{m-1}.$$

Ceci démontre (iii). □

5.5.9. Remarque. — On peut montrer que $i_1(q) = 2^{m-1}$ également dans le cas (iii), cf. [**70**, cor. 3.7].

5.5.10. Corollaire. — *Soit q comme dans le théorème 5.5.8 (ii) ou (iv), et soit $q' \leq q$ telle que* $\dim q' \geq 2^n - 2^{m-1}$. *Alors $q' \approx q$.*

Démonstration. — Cela résulte du théorème 5.5.8 et du lemme 5.1.4 c). $\square$

5.5.11. Proposition **(**[**70**, prop. 5.1]**).** — *Soient $1 \leq m < n$ et $\varphi \in P^w_{n,m}(F)$, de forme dominante $\tau \in P_m(F)$. Soit ψ anisotrope de dimension ≥ 2. Supposons que $D(\varphi) \cap D(\psi) \neq \emptyset$. Alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si $\psi_{F(\tau)} \leq \varphi_{F(\tau)}$.*

La condition $D(\varphi) \cap D(\psi) \neq \emptyset$ peut toujours être réalisée en multipliant ψ par un scalaire convenable (ce qui ne change pas son isotropie).

Démonstration. — Supposons $\varphi_{F(\psi)}$ isotrope. D'après le théorème 5.5.8 (i), $\varphi_{F(\psi,\tau)} \sim 0$; la nécessité résulte alors du théorème 3.2.4. Réciproquement, si $\psi_{F(\tau)} \leq \varphi_{F(\tau)}$, alors $\varphi_{F(\psi,\tau)} \sim 0$. Si $\varphi_{F(\psi)}$ était anisotrope, d'une part on aurait $\psi \simeq \tau \otimes \rho$ pour ρ convenable d'après le corollaire 3.2.5, d'autre part $\tau_{F(\psi)}$ serait anisotrope. Mais $\dim \rho = 2^{n-m}$, d'où $\deg(\varphi_{F(\psi)}) > m$, d'où $\tau_{F(\psi)} \sim 0$, contradiction. $\square$

5.5.12. Corollaire. — *Dans la proposition 5.5.11, supposons de plus que $\varphi \in P_{n,m}(F)$. Soit $\sigma \in P_n(F)$ telle que $\varphi = \sigma - \tau \in W(F)$. Alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si $\psi_{F(\tau)} \leq \sigma_{F(\tau)}$.*

Démonstration. — C'est clair, puisque $\varphi_{F(\tau)} \simeq \sigma_{F(\tau)}$. $\square$

5.6. Extensions excellentes

La définition suivante est « adjointe »de la définition 5.4.9[(2)] :

5.6.1. Définition. — Une extension K/F est *excellente* si, pour toute forme quadratique q sur F, la partie anisotrope de q_K est définie sur F.

Les extensions excellentes ont la propriété importante suivante :

5.6.2. Proposition **(**[**50**, prop. 2.11]**).** — *Soit K/F une extension excellente. Soit $\varphi \in P(K)$, définie sur F. Alors il existe $\psi \in P(F)$ telle que $\psi_K \simeq \varphi$.*

Démonstration. — Soit $\psi \in P(F)$ de degré maximal telle que $\psi_K \leq \varphi$. Supposons $\dim \psi < \dim \varphi$. Par la proposition 2.4.11, on peut écrire $\varphi \simeq \psi_K \otimes \tau$, avec $\tau \in P(K)$. Soit τ' la forme pure de τ. On a

$$\psi_K \otimes \tau' \sim \psi_K \perp -\varphi \in \operatorname{Im}(W(F) \longrightarrow W(K)).$$

[(2)] Plus précisément, on pourrait introduire la notion suivante : un couple (q, K) formé d'une F-forme quadratique anisotrope et d'une extension de F est *excellent* si la partie anisotrope de q_K est définie sur F.

Soit γ telle que $\gamma_K \simeq \psi_K \otimes \tau'$. Choisissons $a \in D(\gamma)$, de sorte que $a \in D(\psi_K \otimes \tau') \cap F^*$. Par la proposition 2.3.3, on peut écrire $\varphi \simeq (\psi \otimes \langle\langle a \rangle\rangle)_K \otimes \rho$, ce qui contredit la maximalité de $\deg(\psi)$. $\square$

Voici quelques exemples d'extensions excellentes et non excellentes :

5.6.3. Exemples

i) Supposons que toute forme quadratique anisotrope sur F reste anisotrope sur K. Alors K/F est excellente. Ceci s'applique en particulier aux extensions de degré impair (théorème 1.5.1), aux extensions transcendantes pures (lemme 2.4.1) et plus généralement aux extensions unirationnelles (contenues dans une extension transcendante pure).

ii) Soient $K/F, L/F$ deux extensions régulières. Supposons KL/K et KL/L transcendantes pures. Alors K/F est excellente si et seulement si L/F est excellente. Ce fait est laissé au lecteur en exercice.

iii) Soient q, q' deux formes quadratiques anisotropes sur F. Supposons $q \approx q'$. Alors $F(q)/F$ est excellente si et seulement si $F(q')/F$ est excellente. Cela résulte de ii).

iv) Toute extension quadratique est excellente. Cela résulte de la proposition 3.2.1.

v) Soit q une forme quadratique. Si $F(q)/F$ est excellente, alors q est voisine d'une forme de Pfister. Cela résulte du théorème 5.4.3.

Pour quelles formes de Pfister φ l'extension $F(\varphi)/F$ est-elle excellente ? La réponse est donnée par le théorème suivant :

5.6.4. Théorème. — *Soit φ une n-forme de Pfister anisotrope, avec $n \geq 2$. Alors*

a) ***Arason*** [**8**] **:** *Si $n = 2$, $F(\varphi)/F$ est excellente.*

b) ***Izhboldin*** [**83**]**,** ***Hoffmann*** [**70**] **:** *Supposons $n > 2$. Alors il existe une extension K/F telle que $K(\varphi)/K$ ne soit pas excellente.*

On va démontrer a) et donner des indications sur la démonstration de b). Pour a), il suffit de démontrer que $F(q)/F$ est excellente, où $q = \langle 1, -a, -b \rangle$. Nous suivrons la méthode de Rost [**186**] : celle d'Arason utilise la structure des fibrés vectoriels sur une conique (due essentiellement à Grothendieck). D'autres preuves sont dues à van Geel [**60**] et Pfister [**180**].

Soit $R = F[S,T]/(S^2 - aT^2 - b)$, de sorte que $K = F(q)$ est le corps des fractions de R. On remarque que R est un $F[T]$-module libre de base $(1, S)$. Définissons $d : R \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ par

$$d(P + SQ) = \max(\deg P, 1 + \deg Q)$$

pour $(P, Q) \in F[T]^2 - \{(0,0)\}$, et $d(0) = -\infty$. Soit $R_n = \{r \in R \mid d(r) \leq n\}$: R_n est un sous-espace vectoriel de R et on a $R_0 = F$, $R_m R_n \subset R_{m+n}$.

Soit (V,φ) une forme quadratique sur F. Pour $v \in R_n \otimes_F V$, écrivons

$$v = v_0 + \sum_{i=1}^{n} (ST^{i-1}v_i + T^i w_i), \quad v_i, w_i \in V.$$

5.6.5. Lemme. — *Supposons que $\varphi_K(v) = 0$. Alors $\check{\varphi}(v_n, w_n) = 0$ et $\varphi(w_n) = -a\varphi(v_n)$.*

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(v) \\ &\equiv S^2T^{2(n-1)}\varphi(v_n) + 2ST^{2n-1}\check{\varphi}(v_n, w_n) + T^{2n}\varphi(w_n) \\ &\equiv T^{2n}(a\varphi(v_n) + \varphi(w_n)) + 2ST^{2n-1}\check{\varphi}(v_n, w_n) \pmod{R_{2n-1}} \end{aligned}$$

et T^{2n}, ST^{2n-1} sont linéairement indépendants dans R/R_{2n-1}. $\square$

5.6.6. Lemme. — *Supposons de plus que $v \notin R_{n-1} \otimes_F V$. Alors il existe un sous-espace $L \subset V$ de dimension 2 tel que*

(i) *$\varphi_{|L} \simeq c\langle 1, -a\rangle$ pour un $c \in F^*$;*
(ii) *il existe $\tilde{v} \in R_{n-1} \otimes_F V \setminus \{0\}$ tel que $\tilde{\varphi}(\tilde{v}) = 0$, avec $\tilde{\varphi} = b\varphi_{|L} \perp \varphi_{|L^\perp}$.*

Démonstration. — Puisque $v \notin R_{n-1} \otimes_F V$, on a $v_n \neq 0$ ou $w_n \neq 0$; puisque φ est anisotrope, le lemme 5.6.5 implique que v_n et w_n sont linéairement indépendants sur F. Soit L le sous-espace vectoriel de V de base (v_n, w_n). Alors $\varphi_{|L} \simeq c\langle 1, -a\rangle$ avec $c = \varphi(v_n)$. En particulier, $\varphi_{|L}$ est non dégénérée.

Notons $E = F[Z]/(Z^2 - a)$, et soit α l'image de Z dans E. On peut considérer L comme un E-espace vectoriel de dimension 1 pour la loi

$$\alpha v_n = w_n, \quad \alpha w_n = a v_n.$$

Pour cette loi, on a $\varphi_{|L}(xu) = N_{E/F}(x)\varphi_{|L}(u)$, $(x,u) \in E \times L$.

Soit $W = L^\perp$; écrivons $v = x + y$, $x \in L$, $y \in W$. Alors $x \in T^{n-1}(Sv_n + Tw_n) + R_{n-1} \otimes_F L$ et $y \in R_{n-1} \otimes_F W$. Posons

$$\tilde{v} = b^{-1}(S - T\alpha)x + y.$$

Alors $\tilde{\varphi}(\tilde{v}) = 0$, car

$$b\varphi_{|L}(b^{-1}(S - T\alpha)x) = b^{-1}N_{E/F}(S - T\alpha)\varphi_{|L}(x) = b^{-1}(S^2 - aT^2)\varphi_{|L}(x) = \varphi_{|L}(x).$$

Il reste à voir que $\tilde{v} \in R_{n-1} \otimes_F V$. Pour cela, il faut montrer que $(S - T\alpha)x \in R_{n-1} \otimes_F L$.

Supposons d'abord $n \geq 2$. Écrivons

$$x = T^{n-1}(S + T\alpha)v_n + \sum_{i=1}^{n-1}(ST^{i-1}v'_i + T^i w'_i) + v'_0, \quad v'_i, w'_i \in L.$$

On peut écrire

$$ST^{n-2}v'_{n-1} + T^{n-1}w'_{n-1} = (ST^{n-2} + \alpha T^{n-1})v'_{n-1} + T^{n-1}(w'_{n-1} - \alpha v'_{n-1})$$

de sorte que

$$x = T^{n-1}(S+T\alpha)v_n + T^{n-2}(S+T\alpha)\mu v_n + T^{n-1}\lambda + \tilde{x} = ((S+T\alpha)\omega + T^{n-1}\lambda)v_n + \tilde{x}$$

avec $\lambda, \mu \in E$, $\omega = T^{n-1} + T^{n-2}\mu$ et $\tilde{x} \in R_{n-2} \otimes_F L$.

Soit $\bar{\lambda}$ le conjugué de λ sous l'action de $Gal(E/F)$. Comme $y \in R_{n-1} \otimes_F W$, on a, en calculant modulo R_{2n-2} :

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(v) &\equiv \varphi(x) \\ &\equiv N_{E/F}((S+T\alpha)\omega + T^{n-1}\lambda)\varphi(v_n) \\ &\equiv (N((S+T\alpha)\omega) + \mathrm{Tr}((S+T\alpha)\omega T^{n-1}\bar{\lambda}) + N(T^{n-1}\lambda))\varphi(v_n) \\ &\equiv (bN(\omega) + \mathrm{Tr}(S+T\alpha)T^{2n-2}\bar{\lambda}) + 0)\varphi(v_n) \\ &\equiv (0 + ST^{2n-2}\,\mathrm{Tr}(\bar{\lambda}) + T^{2n-1}\,\mathrm{Tr}(\alpha\bar{\lambda}))\varphi(v_n) \pmod{R_{2n-2}}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathrm{Tr}(\bar{\lambda}) = \mathrm{Tr}(\alpha\bar{\lambda}) = 0$, donc que $\lambda = 0$. Finalement,

$$(S - T\alpha)x = b\omega v_n + (S - T\alpha)\tilde{x} \in R_{n-1} \otimes_F L.$$

Supposons maintenant $n = 1$. Alors $x = (S + T\alpha + \lambda)v_n$ pour un $\lambda \in E$, et il suffit de montrer que $\lambda = 0$. Mais

$$0 = \varphi(v) = (b + S\,\mathrm{Tr}(\bar{\lambda}) + T\,\mathrm{Tr}(\alpha\bar{\lambda}) + N(\lambda))\varphi(v_n) + \varphi(y)$$

d'où de nouveau $\lambda = 0$, puisque $\varphi(y) \in F$. □

5.6.7. Proposition. — *Soient $q = \langle 1, -a, -b\rangle$, $K = F(q) = Frac(F[S,T]/(S^2 - aT^2 - b))$ et φ une forme quadratique sur F. Alors il existe un entier p, des formes φ_i, ψ_i $(0 \le i \le p)$ et des scalaires $c_i \in F^*$ $(0 \le i \le p-1)$ tels que $\varphi_0 = \varphi$ et*

(i) $\varphi_i \simeq c_i\langle 1, -a\rangle \perp \psi_i$, $0 \le i \le p-1$;

(ii) $\varphi_{i+1} \simeq c_i b\langle 1, -a\rangle \perp \psi_i$, $0 \le i \le p-1$;

(iii) $((\varphi_p)_{\mathrm{an}})_K$ *est anisotrope.*

Démonstration. — Récurrence sur $\dim\varphi$. On peut supposer φ anisotrope et φ_K isotrope.

Comme K est le corps des fractions de R, il existe $n \ge 0$ et $v \in R_n \otimes_F V$ tels que $\varphi(v) = 0$. On raisonne par récurrence sur n. Puisque φ est anisotrope, on a $n > 0$. On peut supposer que $v \notin R_{n-1} \otimes_F V$. On choisit $\varphi_1 = \tilde{\varphi}$, où $\tilde{\varphi}$ est comme dans le lemme 5.6.6. Si $\tilde{\varphi}$ est anisotrope, on applique l'hypothèse de récurrence pour $n-1$; si $\tilde{\varphi}$ est isotrope, on applique l'hypothèse de récurrence pour $\dim_{\mathrm{an}}(\tilde{\varphi}) < \dim\varphi$. On obtient ainsi une suite de formes $(\varphi_0, \dots, \varphi_p)$ vérifiant les conditions (i)–(iii) de la proposition 5.6.7 (p est le premier entier – qui existe nécessairement – tel que $(\varphi_p)_{\mathrm{an}}$ reste anisotrope sur K). □

5.6.8. Remarque. — On peut montrer que, dans la démonstration ci-dessus, l'entier n peut être choisi $\le \frac{\dim\varphi - i(\varphi_K)}{2}$, cf. [**148**]. Cela rend la construction de la suite (φ_i) effective.

Démonstration du théorème 5.6.4 a). — On remarque simplement qu'avec les notations de la proposition 5.6.7, $(\varphi_i)_K \simeq \varphi_K$ pour tout $i \leq p$. □

La démonstration de b) repose sur le théorème suivant :

5.6.9. Théorème **([70**, th. 7.2]). — *Soient* $1 \leq m < n$ *et* $q \in P_{n,m}(F)$*, définie par* (σ, τ)*. Soit* $\varphi \in P_n(F)$*. Supposons* $q_{F(\varphi)}$ *isotrope et* $(q_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ *définie sur* F*. Alors* σ *et* φ *sont* $(n-1)$*-liées.*

(La réciproque est vraie, cf. [**70**, th. 7.2].)

Démonstration. — On remarque d'abord que

$$\dim_{\mathrm{an}}(q_{F(\varphi)}) = \begin{cases} 2^m & \text{si } \sigma \simeq \varphi \\ 2^n - 2^m & \text{si } \sigma \not\simeq \varphi. \end{cases}$$

En effet, si $\sigma \simeq \varphi$, on a $q_{F(\varphi)} \sim -\tau_{F(\varphi)}$; d'autre part, $\tau_{F(\varphi)}$ est anisotrope d'après le théorème 3.2.4. Si $\sigma \not\simeq \varphi$, $\sigma_{F(\varphi)}$ est anisotrope et $2^n > \dim_{\mathrm{an}}(q_{F(\varphi)}) \geq \dim \sigma - \dim \tau = 2^n - 2^m$. Par le théorème 5.5.8, $i_1(q) = 2^{m-1}$, d'où l'assertion.

Supposons $(q_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ définie sur F par une forme η. D'après ce qui précède, on a

$$2^m \leq \dim \eta \leq 2^n - 2^m$$

d'où

$$0 < \dim_{\mathrm{an}}(q \perp -\eta) < 2^{n+1}.$$

Comme $(q \perp -\eta)_{F(\varphi)} \sim 0$, le corollaire 3.2.5 entraîne que $(q \perp -\eta)_{\mathrm{an}} \simeq a\varphi$ pour un scalaire a. Par conséquent :

$$a\varphi \sim q \perp -\eta \sim \sigma \perp -\tau \perp -\eta$$

c'est-à-dire

$$\sigma \perp -a\varphi \sim \tau \perp \eta.$$

Mais $\dim(\tau \perp \eta) \leq 2^m + 2^n - 2^m = 2^n$, d'où $i(\sigma \perp -a\varphi) \geq 2^{n-1}$. La conclusion résulte alors du théorème 2.3.2. □

La démonstration du théorème 5.6.4 b) consiste alors à fabriquer une extension convenable K de F, une forme $\sigma \in P_n(K)$ telle que φ et σ ne soient pas $(n-1)$-liées, et une forme $\tau \in P_m(K)$ telle que τ et σ soient $(m-1)$-liées, telles que $q := (\sigma \perp -\tau)_{\mathrm{an}}$ devienne isotrope sur $K(\varphi)$. Nous renvoyons à [**83**] et à [**70**, §8] pour les détails.

Sivatski a travaillé sur les extensions excellentes, donnant de nombreux contre-exemples : notamment des exemples d'extensions biquadratiques non excellentes, cf. [**199**].

5.7. Formes de hauteur 2

La classification des formes de hauteur 2 est, à l'heure actuelle, encore un problème ouvert. Le terrain a toutefois été bien défriché par Knebusch, Fitzgerald, l'auteur, Hurrelbrink-Rehmann et Hoffmann. Décrivons ici les résultats connus (voir aussi §E.9.A).

Soit q une forme quadratique de hauteur 2. On peut classifier q selon l'un des trois types suivants :

Type I : q est excellente.
Type II : q est bonne sans être excellente.
Type III : q n'est pas bonne.

Les formes excellentes sont considérées comme connues. Pour les autres, on a :

5.7.1. Théorème. — *Si q est de type II,*

a) ***Knebusch*** [**123**, lemme 10.1]**:** $q_{F(\tau)} \in GP(F(\tau)) \setminus \{0\}$, *où τ est la descente de la forme dominante de q ; on a* $\dim q = 2^N$, *avec* $N > \deg q$.
b) ***Hoffmann*** [**71**]**:** *On a* $N = \deg(q) + 1$. *En particulier,* $q \in P^w_{n+1,n}(F)$, *où* $n = \deg(q)$.

Démonstration

a) On a $q_{F(q,\tau)} \sim 0$, donc $h(q_{F(\tau)}) \leq 1$. Supposons $q_{F(\tau)}$ isotrope, donc hyperbolique. Par le corollaire 3.2.5, il existe ρ telle que $q \simeq \tau \otimes \rho$. Comme $\deg(\tau) = \deg(q)$, $\dim \rho$ est nécessairement impaire. Mais alors, on a
$$\rho \equiv \langle a \rangle \pmod{I^2F}$$
pour $a \in F^*$ convenable (cf. corollaire 6.1.4(3)). Donc
$$q \simeq a\tau \perp \psi$$
avec $\deg \psi > \deg q + 1$. D'après le théorème 4.3.3, q_1 est définie sur F, ce qui contredit l'hypothèse.

b) Écrivons
$$\tau = \sigma \otimes \langle\langle a \rangle\rangle$$
avec $\sigma \in P_{n-1}(F)$. Soient $k \geq 1$, $K = F(T_1, \ldots, T_k)$ et $\eta = \langle\langle T_1, \ldots, T_k \rangle\rangle \in P_k(K)$. Alors τ_K est anisotrope par le lemme 2.4.1 et $\sigma_K \otimes \eta$ est anisotrope par le lemme 5.2.6 a). De même, la forme
$$\psi = \sigma_K \otimes (\langle a \rangle \perp -\eta') \sim \sigma_K \otimes \eta \perp -\tau_K$$
est anisotrope : si $\eta_1 = \langle\langle T_1, \ldots, T_{k-1} \rangle\rangle$, on a
$$\psi \simeq \sigma_K \otimes (\langle a \rangle \perp -\eta'_1) \perp -T_k \sigma_K \otimes \eta_1$$
et on applique le lemme 5.2.5 et une récurrence sur k. Par conséquent, $\psi \in P_{k+n-1,n}(K)$. Finalement, q_K est anisotrope, de hauteur 2 et de type II : les

(3) Le lecteur vérifiera que la démonstration du corollaire 6.1.4 n'utilise pas le théorème 5.7.1 a).

deux premières assertions sont claires, q_K est évidemment bonne mais ne peut pas être excellente puisque sa dimension est une puissance de 2.

Prenons maintenant $k = N - n + 1$. On a

$$\psi \perp q_K \equiv \sigma_K \otimes \eta \perp -\tau_K \perp \tau_K \equiv 0 \pmod{J_{n+1}(K)}$$

c'est-à-dire $\deg(\psi \perp q_K) > n$. Soit E le corps de déploiement générique de $\psi \perp q_K$. Par le théorème 3.2.4 appliqué de manière répétée, τ_E est anisotrope. Par ailleurs, $q_{K(\tau)}, \psi_{K(\tau)} \in GP_N(K(\tau)) \setminus \{0\}$: cela résulte de a) pour q_K et du théorème 5.5.8 (i) pour ψ. En appliquant le lemme 4.3.8, on en déduit que q_L et ψ_L sont anisotropes, où L est le corps de déploiement générique de $(\psi \perp q_K)_{K(\tau)}$. Mais l'extension EL/L est transcendante pure ; par conséquent q_{EL} et ψ_{EL} sont anisotropes, et donc q_E et ψ_E sont anisotropes.

Comme $\dim \psi = \dim q$, on a $\psi_E \simeq -q_E$. Mais, puisque τ_E est anisotrope, $\psi_E \in P_{N,n}(E)$. Comme $h(q_E) \leq h(q) = 2$, le théorème 5.5.8 entraîne alors que $N = n + 1$.

□

D'après les théorèmes 5.5.8 et 5.7.1, une forme q est de hauteur 2, de type II et de degré n si et seulement si $q \in P^w_{n+1,n}(F)$. On a

5.7.2. Conjecture ([**99**, conj. 7 a)], [**70**, conj. 3.9]). — *On a $GP_{n+1,n}(F) = P^w_{n+1,n}(F)$ pour tout $n \geq 1$. En d'autres termes (lemme 5.5.6), toute forme q de hauteur 2, de degré n et de type II est de la forme $\eta \otimes \pi$, où $\dim \eta = 4$ et $\pi \in P_{n-1}(F)$.*

Cette conjecture est vraie pour $n \leq 3$ (voir ci-dessous). En général, elle est au moins vraie « stablement » :

5.7.3. Proposition ([**70**, cor. 3.13]). — *Soient $1 \leq m < n$. Soit $q \in P^w_{n,m}(F)$, anisotrope. Alors il existe une extension K/F telle que q_K soit anisotrope et dans $GP_{n,m}(K)$.*

Démonstration. — Soient τ la (descente de la) forme dominante de q, de sorte que $q \equiv \tau \otimes \eta \pmod{J_n(F)}$ pour une forme η de dimension impaire. On se ramène d'abord au cas où $\dim \eta = 1$. Soit L le corps dominant de $\tau \otimes \eta$. Comme $\deg(\tau \otimes \eta) = m$ (corollaire 4.3.10), $(\tau \otimes \eta)_L \sim a\tau$ pour un $a \in L^*$. D'autre part, $q_{F(\tau)} \in GP_n(F(\tau)) - \{0\}$ (théorème 5.5.8 (i)) ; par ailleurs, $L(\tau)/F(\tau)$ est transcendante pure puisque $(\tau \otimes \eta)_{F(\tau)} \sim 0$. Par conséquent, $q_{L(\tau)}$ est anisotrope, et donc q_L est anisotrope. Il en résulte qu'on a encore $q_L \in GP_{n,m}(L)$, et $q \equiv a\tau \pmod{J_n(L)}$.

Soit maintenant K le corps dominant de $\varphi := q_L \perp -a\tau$. On a $\varphi \in J_n(L) \setminus \{0\}$ et $\dim \varphi < 2^{n+1}$, donc $\deg(\varphi) = n$. En appliquant le théorème 5.2.2 de manière répétée, on voit que q_K et τ_K sont anisotropes. De plus,$(q_K \perp \tau_K)_{\mathrm{an}} \in GP_n(K)$, donc $q_K \in GP_{n,m}(K)$. □

5.7.4. Conjecture **(**[**99**, conj. 8] **; cf. proposition 5.6.2)**
Soit $q \in GP_n(F)$ *; soit* $\varphi \in P_{n+1}(F(q))$*, définie sur* F*. Alors il existe* $\psi \in P_{n+1}(F)$ *telle que* $\psi_{F(q)} \simeq \varphi$*.*

Cette conjecture est vraie si $n = 1, 2$, d'après l'exemple 5.6.3 (iv), le théorème 5.6.4 a) et la proposition 5.6.2. Elle est vraie également pour $n = 3$ (voir ci-dessous).

5.7.5. Théorème **(**[**99**, th. 4.2]**)**. — *Les conjectures 5.7.2 et 5.7.4 sont équivalentes.*

5.7.6. Conjecture **(**[**99**, conj. 9]**,** [**70**, conj. 3.10]**)**. — *Soit* $q \in J_{n+1}(F) \setminus \{0\}$*, avec* $\dim q > 2^{n+1}$*. Alors* $\dim q \geq 2^{n+1} + 2^n$*.*

Cette conjecture est vraie pour $n \leq 1$ (trivialement), pour $n = 2$ (Pfister) et pour $n = 3$ (Hoffmann [**72**]).

Il suffirait de démontrer la conjecture 5.7.6 pour q de hauteur 2. Elle est vraie pour les formes de type I ou II. En ce qui concerne les formes de type III, on a une conjecture plus précise. Notons d'abord qu'il n'y a pas de formes de type III et de degré 1 : en effet, toute forme de degré 1 est bonne (proposition 6.1.6 ci-dessous). Les formes suivantes sont des exemples de formes de hauteur 2, de type III et de degré 2 :

5.7.7. Définition. — Une *forme d'Albert* q est une forme de dimension 6 telle que $q \in I^2F$.

5.7.8. Conjecture **(**[**99**, conj. 7 b)]**)**. — *Soit* q *de hauteur* 2*, de type III et de degré* $n + 1 \geq 2$*. Alors* $q \simeq \gamma \otimes \pi$*, où* γ *est une forme d'Albert et* $\pi \in P_{n-1}(F)$*.*

5.7.9. Théorème

a) *La conjecture 5.7.8 entraîne la conjecture 5.7.6.*
b) [**99**, prop. 4.3]**,** [**70**, prop. 3.11] **:** *La conjecture 5.7.6 entraîne les conjectures 5.7.2 et 5.7.4.*

Démonstration

a) est évident.
b) Soit q de hauteur 2, de type II et de degré n, de forme dominante τ. Soit $\varphi = (q \perp -a\tau)_{\mathrm{an}}$, où $a \in D(q)$. Alors $\varphi \in J_n(F) \setminus \{0\}$ et $\dim \varphi < 2^{n+1} + 2^n$. La conjecture 5.7.6 implique donc que $\dim_{\mathrm{an}}(\varphi) = 2^{n+1}$, c'est-à-dire $\varphi \in GP_{n+1}(F)$. On conclut par le théorème 5.7.5.

□

5.7.10. Corollaire. — *Les conjectures 5.7.2, 5.7.4 et 5.7.6 sont vraies pour* $n \leq 3$*.*

Par contre, la conjecture 5.7.8 n'est pas connue dans ce domaine. Toutefois, nous verrons plus loin (corollaire 7.2.2) que

5.7.11. Théorème **(**[**99**]**)**. — *La conjecture 5.7.8 est vraie pour* $n = 1$*.*

Mentionnons également que Vishik a démontré les conséquences « dimensionnelles »des conjectures 5.7.2 et 5.7.8 :

5.7.12. Théorème (**[212**, th. 3.1]). — *Soit q une forme anisotrope de hauteur* 2 *et de degré $n \geq 0$. Alors*

a) *Si $n = 0$, $\dim q$ est de la forme $2^a - 2^b + 1$ et $i_1(q)$ est de la forme $2^{a-1} - 2^b + 1$ pour $a > b > 1$ (le cas $a = b + 1$ est permis).*

b) *Si $n > 0$, on a*

$$\dim q \in \{2^n + 2^{n-1}, 2^{n+1}, 2^{r+1} - 2^n\} \quad (r > n).$$

Voir §E.9.A.

5.8. Exercices

5.8.1. — Justifier l'exemple 5.6.3 (ii).

5.8.2*

a) Si q est une sous-forme d'une forme de Pfister φ, on a $G(q) \subset G(\varphi)$.

b) Si q est voisine d'une forme de Pfister φ, on a $D^2(q) = D^2(\varphi)$ (voir exercice 2.5.2). En particulier, $D^2(q)$ est un sous-groupe de F^*.

c) Montrer par un exemple qu'en général, si q est voisine d'une forme de Pfister, l'inclusion $G(q) \subset D^2(q)$ est stricte.
(*On calculera $G(q)$ quand* $\dim q = 3$.)

d) Est-il vrai en général que, si $q \approx q'$, alors $D^2(q) = D^2(q')$?

5.8.3 **(Knebusch)**. — Soit q une forme excellente de hauteur h ; notons q_i l'unique F-forme définissant la i-ème forme noyau de q. Notons ρ la forme de Pfister dont q est voisine, et ρ_1 la forme de Pfister dont q_1 est voisine. Soit $s \in [1, h]$.

a) Si s est impair, $q \perp (-1)^s q_s$ est excellente et voisine de ρ.

b) Si s est pair, on a $q \simeq \varphi \perp (-1)^s q_s$, avec φ excellente. Si $s = 2$ et $\dim \rho = 2 \dim \rho_1$, alors φ est semblable à ρ_1. Sinon, φ est voisine de ρ.
(*Procéder comme dans le cours, qui traite le cas où $s = h$ et* $\deg q = 0$.)

5.8.4 **(Hoffmann)**. — Soient $n > 0$ et q une forme anisotrope de dimension $2^n + m$, avec $0 < m \leq 2^n$. On rappelle que $i(q_{F(q)}) \leq m$ (corollaire 5.2.8). On dit que q a *déploiement maximal* si $i(q_{F(q)}) = m$.

a) Si q est voisine d'une forme de Pfister, elle a déploiement maximal.

b) Il existe des formes ayant déploiement maximal qui ne sont pas voisines d'une forme de Pfister.
(*Considérer une sous-forme de dimension* 5 *d'une forme d'Albert anisotrope.*)

c) Si q a déploiement maximal et $q' \leq q$ avec $\dim q' > 2^n$, alors q' a également déploiement maximal et $q' \approx q$. En particulier, q' est voisine si et seulement si q l'est.

5.8.5*.** — Soient $n > 1$ et q une forme quadratique anisotrope de dimension $> 2^{n-2}$.

a) ***Fitzgerald*:** Montrer que les n-formes de Pfister anisotropes contenant une sous-forme semblable à q forment les éléments $\neq 0$ d'un sous-groupe additif de $W(F)$.

b) ***Hoffmann*:** On suppose $\dim q \leq 2^{n-1}$. Montrer qu'il existe une extension K/F et une n-forme de Pfister anisotrope π sur K telles que l'extension $K(\pi)/F$ soit transcendante pure et que π contienne une sous-forme isomorphe à q_K.
(*Raisonner comme dans la démonstration du théorème 5.2.2.*)

c) ***Hoffmann*:** On suppose $\dim q = 2^{n-1} + 1$. Montrer que la conclusion de b) reste vraie à condition de ne pas exiger que $K(\pi)/F$ soit transcendante pure.
(*Appliquer b) à une sous-forme q' de q de dimension 2^n : avec les notations de b), on a $q \simeq q' \perp \langle a\rangle$ et $\pi \simeq q'_K \perp q''$ avec $a \in F^*$ et $\dim q'' = 2^{n-1}$. Considérer $K(q'' \perp \langle -a\rangle)$.*)

d) On suppose que $2^{n-1} < \dim q \leq 2^n$. Montrer que q a déploiement maximal (exercice 5.8.4) si et seulement s'il existe une extension L/F telle que

– q_L soit voisine d'une n-forme de Pfister anisotrope ;
– $h(q_L) = h(q)$.

(*Utiliser l'exercice 5.8.4, reprendre la construction de c) et utiliser le théorème 5.2.2.*)

CHAPITRE 6

INVARIANTS ÉLÉMENTAIRES

À une forme quadratique sont associés des invariants de grande importance. Le premier que nous avons considéré est la dimension modulo 2 introduite dans la section 2.1 ; bien qu'assez trivial, il sert à définir l'idéal IF et ses puissances. Après celui-ci, le plus connu est le discriminant, étudié au §6.1. Mais il existe aussi l'invariant de Clifford, introduit au §6.2, et les invariants cohomologiques supérieurs, intimement liés à la K-théorie algébrique, qui apparaîtront au chapitre 9.

6.1. Le discriminant

6.1.1. Définition. — Soit q une forme quadratique de dimension n. Soient V l'espace sous-jacent à q, $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et Q la matrice de q dans la base $\underline{e}$ ($q_{ij} = \check{q}(e_i, e_j)$). Le *discriminant* de q (appelé *signed discriminant* dans Lam [**146**]) est

$$d_{\pm}q = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det Q \in F^*/F^{*2}.$$

Il est indépendant de la base $\underline{e}$.

La dernière affirmation est claire, puisque si $\underline{e'}$ est autre base de V et P est la matrice de passage de $\underline{e}$ à $\underline{e'}$, la matrice de q dans la base $\underline{e'}$ est

$$Q' = {}^tPQP$$

et $\det Q' = \det Q(\det P)^2$.

Il paraîtrait plus naturel de définir le discriminant de q comme $\det Q$; mais celui-ci ne dépend pas que de la classe de q dans $W(F)$. C'est au contraire le cas de $d_{\pm}q$. Plus précisément :

6.1.2. Proposition

a) *Si $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, on a $d_{\pm}q = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 \ldots a_n$.*

b) *$d_{\pm}(q \perp q') = d_{\pm}q d_{\pm}q'(-1)^{nn'}$ si $n' = \dim q'$.*

c) $d_\pm(q \perp \mathbb{H}) = d_\pm q$.
d) $d_\pm(q \otimes q') = (d_\pm q)^{n'}(d_\pm q')^n$.

Démonstration. — a) est clair, b) et d) résultent respectivement des identités

$$\binom{n+n'}{2} = \binom{n}{2} + \binom{n'}{2} + nn' \qquad \binom{nn'}{2} = n\binom{n'}{2} + n'\binom{n}{2} + 2\binom{n}{2}\binom{n'}{2}.$$

c) résulte de b). □

6.1.3. Théorème. — *L'invariant $d_\pm$ induit un isomorphisme $IF/I^2F \xrightarrow{\sim} F^*/F^{*2}$.*

Démonstration. — La proposition 6.1.2 b) montre que $d_{\pm|IF}$ est un homomorphisme, et d) montre que $d_{\pm|I^2F} = 1$. Ainsi $d_\pm$ induit un homomorphisme $\bar{d} : IF/I^2F \to F^*/F^{*2}$, qui est surjectif puisque $d_\pm(\langle 1, -a\rangle) = a$ pour $a \in F^*/F^{*2}$.

Pour démontrer que $\bar{d}$ est injectif, il faut montrer que $q \in I^2F$ si $q \in IF$ est tel que $d_\pm q = 1$. On procède par récurrence sur $\dim q$. Écrivons $q = \langle a_1, \dots, a_{2n}\rangle$. Alors $a_{2n} = (-1)^n a_1 \dots a_{2n-1} \in F^*/F^{*2}$ et

$$q \sim \langle a_1, \dots, a_{2n-3}, (-1)^{n-1} a_1 \dots a_{2n-3}\rangle \perp \langle (-1)^n a_1 \dots a_{2n-3}, a_{2n-2}, a_{2n-1}, (-1)^n a_1 \dots a_{2n-1}\rangle.$$

Par récurrence, le premier facteur est dans I^2F, et le second peut s'écrire

$$(-1)^n a_1 \dots a_{2n-3}\langle 1, (-1)^n a_1 \dots a_{2n-3}a_{2n-2}\rangle \otimes \langle 1, (-1)^n a_1 \dots a_{2n-3}a_{2n-1}\rangle \in I^2F.$$

□

6.1.4. Corollaire

a) *Pour toute forme quadratique q de dimension impaire, on a $q \equiv \langle d_\pm q\rangle \pmod{I^2F}$.*
b) *Pour toute forme quadratique q de dimension paire, on a $q \equiv \langle 1, -d_\pm q\rangle \pmod{I^2F}$.*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 6.1.2 b) et du théorème 6.1.3. □

On peut décrire explicitement l'extension de $\mathbb{Z}/2$ par F^*/F^{*2} définie par $W(F)/I^2F$ *via* le théorème 6.1.3. Notons $Q(F)$ l'ensemble $\mathbb{Z}/2 \times F^*/F^{*2}$ muni de la loi de composition suivante :

$$(a, u) + (b, v) = (a + b, (-1)^{ab}uv).$$

6.1.5. Proposition. — *L'application $q \mapsto (\overline{\dim}\, q, d_\pm q)$ induit un isomorphisme*

$$W(F)/I^2F \xrightarrow{\sim} Q(F).$$

Démonstration. — D'après le théorème 6.1.3, il suffit de vérifier que l'application en question est un homomorphisme, ce qui résulte immédiatement de la proposition 6.1.2 b). □

6.1.6. Proposition. — *Toute forme de degré* 1 *est bonne.*

Démonstration. — Soit q de degré 1, de hauteur h et de forme dominante τ. On a évidemment $d_\pm q = d_\pm q_{h-1} = d_\pm \tau$, d'où $\tau \simeq \langle\langle d_\pm \tau\rangle\rangle = \langle\langle d_\pm q\rangle\rangle$. □

6.1.7. Lemme. — *Soit* $\dim q \geq 3$. *Alors* $F^*/F^{*2} \to F(q)^*/F(q)^{*2}$ *est injectif.*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 3.1.4. □

6.1.8. Proposition

a) $\deg q = 1$ *si et seulement si* $q \in IF$ *et* $d_\pm q \neq 1$.
b) $J_2(F) = I^2F$.

Démonstration. — On sait déjà que $J_2(F) \supset I^2F$ (corollaire 4.3.6). Réciproquement, le lemme 6.1.7 montre que $q \in J_2(F) \Rightarrow d_\pm q_{h-1} = 1 \Rightarrow d_\pm q = 1$, ce qui implique $q \in I^2F$ par le théorème 6.1.3. □

6.2. L'algèbre de Clifford

6.2.1. Définition. — Soit q une forme quadratique sur F (éventuellement dégénérée), d'espace vectoriel sous-jacent V. L'*algèbre de Clifford* de q, notée $C(q)$, est le quotient de l'algèbre tensorielle $T(V)$ de V par l'idéal bilatère engendré par les $v \otimes v - q(v)1$, $v \in V$.

Si on écrit $q = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$ sur une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ de V, on peut décrire $C(q)$ comme l'algèbre définie par des générateurs e_i (de degré 1) soumis aux relations

$$e_i^2 = a_i$$
$$e_ie_j + e_je_i = 0 \quad \text{if } i \neq j.$$

***6.2.2. Proposition* (propriété universelle de $C(q)$).** — *Si A est une F-algèbre et $f : V \to A$ un homomorphisme de F-espaces vectoriels tel que $f(v)^2 = q(v)$ pour tout v, alors f se prolonge de manière unique en un homomorphisme de F-algèbres $\tilde{f} : C(V) \to A$.*

Comme $T(V)$ est une algèbre graduée et que les relations de $C(q)$ ont des parties homogènes de degré pair, l'algèbre $C(q)$ hérite d'une $\mathbb{Z}/2$-graduation. On note $C_0(q)$ (resp. $C_1(q)$) sa partie de degré pair (resp. impair).

6.2.3. Définition. — On appelle *superalgèbre* une algèbre $\mathbb{Z}/2$-graduée.

6.2.4. Définition. — Soient A, B deux F-superalgèbres. Le *produit tensoriel gradué* de A et B est la superalgèbre $A\hat{\otimes}_F B$ définie comme suit :

– l'espace vectoriel sous-jacent à $A\hat{\otimes}_F B$ est $A\otimes_F B$;

– si $(a, a', b, b') \in A^2 \times B^2$ sont homogènes, on a
$$(a\hat{\otimes} b)(a'\hat{\otimes} b') = (-1)^{|a'||b|} aa'\hat{\otimes} bb'.$$
– pour $a \in A$, $b \in B$ homogènes de degrés i, j, ab est homogène de degré $i + j$.

6.2.5. Proposition. — *Si* $\dim q = n$, *alors* $\dim_F C(q) = 2^n$.

Démonstration

a) $q = 0$: dans ce cas, $C(q)$ est canoniquement isomorphe à l'*algèbre extérieure* de V, $\bigwedge(V)$, qui est de dimension 2^n.
b) En général, la filtration canonique de $T(V)$ induit une filtration $Fil^i C(V)$, telle que $Fil^i Fil^j \subset Fil^{i+j}$. Posons $gr^* = \bigoplus_{i \geq 0} Fil^i / Fil^{i+1}$: $gr^* C(V)$ est une algèbre graduée. L'homomorphisme naturel
$$T^i(V) = V^{\otimes i} \longrightarrow Fil^i C(V) \twoheadrightarrow gr^i C(V)$$
se factorise à travers un isomorphisme $\bigwedge(V) \xrightarrow{\sim} gr^* C(V)$, puisque les relations de $C(V)$ se réduisent à celles de $\bigwedge(V)$ dans le gradué $gr^* C(V)$.

□

Si q_1, q_2 sont deux formes quadratiques sur F, d'espaces sous-jacents V_1, V_2, les inclusions $V_i \hookrightarrow V_1 \oplus V_2 \hookrightarrow C(q_1 \perp q_2)$ et la propriété universelle de l'algèbre de Clifford induisent des homomorphismes d'algèbres
$$C(q_i) \longrightarrow C(q_1 \perp q_2)$$
qui sont des homomorphismes de superalgèbres.

Dans $C(q_1 \perp q_2)$, on a $v_1 v_2 = -v_2 v_1$ pour $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$: ces homomorphismes se prolongent donc en un homomorphisme de superalgèbres

$$C(q_1)\hat{\otimes}_F C(q_2) \longrightarrow C(q_1 \perp q_2). \tag{6.2.1}$$

6.2.6. Théorème. — *L'homomorphisme* (6.2.1) *est un isomorphisme de superalgèbres.*

Démonstration. — Il est clairement surjectif, et il est injectif par la proposition 6.2.5.

□

On aura besoin plus loin du corollaire suivant :

6.2.7. Corollaire. — *Soient q une forme quadratique, $a \in F^*$ et $q' = \langle -a \rangle \perp q$. Alors $C(aq)$ est isomorphe (en tant qu'algèbre non graduée) à $C_0(q')$.*

Démonstration. — On a $C(q') \simeq C(\langle -a \rangle)\hat{\otimes}_F C(q)$, d'où un isomorphisme d'espaces vectoriels
$$C(q') \simeq C_0(\langle -a \rangle)\hat{\otimes}_F C(q) \oplus C_1(\langle -a \rangle)\hat{\otimes}_F C(q) = C(q) \oplus zC(q)$$

où z est le générateur canonique de $C_1(\langle -a\rangle)$ tel que $z^2 = -a$. On en déduit :

$$C_0(q') \simeq C_0(q) \oplus zC_1(q).$$

Il reste à identifier le membre de droite à $C(aq)$. Mais z commute à $C_0(q)$ et anticommute à $C_1(q)$; en particulier,

$$(zv)^2 = zvzv = -z^2v^2 = aq(v)$$

pour $v \in V$, où V est l'espace vectoriel sous-jacent à q. Il en résulte (proposition 6.2.2) que l'application linéaire

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow C_0(q) \oplus zC_1(q) \\ v &\longmapsto zv \end{aligned}$$

se prolonge en un homomorphisme d'algèbres

$$C(aq) \longrightarrow C_0(q) \oplus zC_1(q).$$

Comme zV engendre évidemment $C_0(q)\oplus zC_1(q)$, cet homomorphisme est surjectif, et il est bijectif pour des raisons de dimension. $\square$

6.2.8. Corollaire. — *Pour toute forme quadratique q de dimension n, on a* $\dim C_0(q) = \dim C_1(q) = 2^{n-1}$.

6.3. Le groupe de Brauer-Wall

Rappelons (appendice A) que le *groupe de Brauer* $B(F)$ de F est défini comme le groupe des classes de similitudes de F-algèbres centrales simples, la loi de groupe étant induite par le produit tensoriel des algèbres. Si A est une F-algèbre centrale simple, on note $[A]$ sa classe dans $B(F)$; l'inverse de $[A]$ est la classe de l'algèbre opposée A^0 ; le groupe $B(F)$ est commutatif.

Nous allons décrire ici un analogue du groupe de Brauer pour les F-superalgèbres : le *groupe de Brauer-Wall*.

Soit A une F-superalgèbre. Commençons par rappeler quelques notions sur A :

6.3.1. Définition. — La superalgèbre A est *simple* si ses seuls idéaux gradués bilatères sont 0 et A.

6.3.2. Définition

a) Le *centre (gradué)* d'une superalgèbre A est $\hat{Z}(A) = Z_0(A) \oplus Z_1(A)$, où $Z_i(A) = \{a \in A_i \mid \forall x \in A_j, ax = (-1)^{ij}xa, j = 0, 1\}$.

b) La F-superalgèbre A est *centrale* si $\hat{Z}(A) = (F, 0)$.

6.3.3. Exemples

i) Soit A une F-algèbre. On définit une superalgèbre $i(A)$ par $i(A)_0 = A$, $i(A)_1 = 0$. Si A est centrale simple, $i(A)$ est centrale simple (comme superalgèbre).

ii) Soit $V = V_0 \hat{\oplus} V_1$ un F-superespace vectoriel de dimension finie. L'algèbre $End_F(V)$ admet une graduation naturelle, où un endomorphisme u est pair si $u(V_i) \subset V_i$ et impair si $u(V_i) = V_{i+1}$ ($i \in \mathbb{Z}/2$). Cette superalgèbre est centrale simple [**146**, ex. IV.2.6].

iii) Soit $a \in F^*$. La superalgèbre $C(\langle a \rangle)$ est isomorphe, comme algèbre non graduée, à $F[t]/(t^2 - a)$. Sa graduation est l'unique graduation telle que $|t| = 1$. Il est facile de voir que cette superalgèbre est centrale simple [**146**, ex. IV.2.4].

6.3.4. Proposition **([146**, th. IV.2.3]**)**. — *Si A, B sont deux F-superalgèbres centrales et simples, il en est de même de $A \hat{\otimes}_F B$.*

6.3.5. Théorème. — *Pour toute forme quadratique q non dégénérée, la F-superalgèbre $C(q)$ est centrale simple.*

Démonstration. — Par le théorème 1.2.1, le théorème 6.2.6 et la proposition 6.3.4, on se réduit au cas $\dim q = 1$, qui est traité dans l'exemple 6.3.3 (iii). □

6.3.6. Définition

a) Deux F-superalgèbres A, B sont *semblables* s'il existe deux F-superespaces vectoriels V, W tels que l'on ait $A \hat{\otimes} End_F(V) \simeq B \hat{\otimes} End_F(W)$ (cf. exemple 6.3.3). Notation : $A \sim B$.

b) Soit A une superalgèbre. La *superalgèbre opposée* A^* est définie comme suit : son espace vectoriel sous-jacent est $\{a^* \mid a \in A\}$, sa graduation est donnée par $A_i^* = \{a^* \mid |a| = i\}$ et son produit est donné par $a^* b^* = (-1)^{|a||b|} b^* a^*$ pour a, b homogènes.

6.3.7. Théorème **([222], [146**, IV.4.1]**)**. — *La relation de similitude est une relation d'équivalence entre F-superalgèbres centrales simples, compatible avec le produit tensoriel gradué. Le semi-groupe des classes d'équivalence est un groupe commutatif, appelé* groupe de Brauer-Wall *de F et noté* $\mathrm{BW}(F)$. *Si A est une F-superalgèbre centrale simple, de classe $\langle A \rangle$ en $\mathrm{BW}(F)$, un représentant de $-\langle A \rangle$ est l'algèbre A^* de la définition 6.3.6 b).*

Pour vérifier que $\mathrm{BW}(F)$ est commutatif, on observe que, si A et B sont deux F-superalgèbres, on a un isomorphisme de F-superalgèbres

$$A \hat{\otimes} B \xrightarrow{\sim} B \hat{\otimes} A$$

donné par

$$a \hat{\otimes} b \longmapsto (-1)^{|a||b|} b \hat{\otimes} a$$

pour a, b homogènes.

Pour $a, b \in F^*$, notons $\left(\frac{a, b}{F}\right)$ l'algèbre de quaternions déterminée par (a, b) (cf. appendice A.3.A).

6.3.8. Proposition

a) *On a un isomorphisme*

$$C(\mathbb{H}) \simeq End_F(F\hat{\oplus}F).$$

b) *Pour $a, b, c \in F^*$, on a des isomorphismes et similitudes*
 (i) $C(\langle ac, bc\rangle)\hat{\otimes}i\binom{ac\ bc}{F} \simeq C(\langle a, b\rangle)\hat{\otimes}i\binom{a\ b}{F}$;
 (ii) $C(\langle\langle a, b\rangle\rangle) \sim i\binom{a\ b}{F}$;
 (iii) $C(\langle\langle a, b, c\rangle\rangle) \sim 1$.

Démonstration. — Remarquons que les superalgèbres intervenant sont toutes centrales simples. Pour montrer que deux d'entre elles sont isomorphes, il suffit donc de vérifier qu'elles ont même dimension et de produire un homomorphisme de l'une vers l'autre. En effet, cet homomorphisme sera injectif par simplicité, et surjectif pour des raisons de dimension.

a) Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{H} = \langle 1, -1\rangle$. Alors $C(\mathbb{H})$ a pour base $(1, e_1, e_2, e_1e_2)$, avec $|e_1| = |e_2| = 1$ et $e_1^2 = 1$, $e_2^2 = -1$, $e_1e_2 = -e_2e_1$. De même, $End_F(F\hat{\oplus}F)$ a pour base $(E_{ij})_{i,j\in\{0,1\}}$ avec $|E_{00}| = |E_{11}| = 0$, $|E_{01}| = |E_{10}| = 1$. On vérifie que l'isomorphisme cherché est induit par

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto E_{00} + E_{11} \\ e_1 &\longmapsto E_{01} + E_{10} \\ e_2 &\longmapsto E_{01} - E_{10} \end{aligned}$$

(cf. démonstration du théorème A.3.3).

b) Notons que (i) se réduit formellement à son cas particulier $ac = 1$. Il suffit donc de définir un homomorphisme (de superalgèbres)

$$C(\langle 1, ab\rangle)\hat{\otimes}i(M_2(F)) \xrightarrow{\sim} C(\langle a, b\rangle)\hat{\otimes}i\begin{pmatrix} a\ b \\ F \end{pmatrix}.$$

Rappelons que $M_2(F)$ peut être décrit comme l'algèbre de quaternions de base $(1, i, j, ij)$, avec $i^2 = a$, $j^2 = 1$, $ij = -ji$. Soit de même $(1, i', j', i'j')$ la base canonique de l'algèbre $\binom{a\ b}{F}$, avec $i'^2 = a$, $j'^2 = b$, $i'j' = -j'i'$. Soit enfin (e_1, e_2) (resp. (e_1', e_2')) la base orthogonale canonique de la forme $\langle 1, ab\rangle$ (resp. $\langle a, b\rangle$), de sorte que $C(\langle 1, ab\rangle)$ (resp. $C(\langle a, b\rangle)$) a pour base

$$(1, e_1, e_2, e_1e_2) \quad \text{avec} \quad e_1^2 = 1, e_2^2 = ab, e_1e_2 = -e_2e_1$$

(resp.

$$(1, e_1', e_2', e_1'e_2') \quad \text{avec} \quad {e_1'}^2 = a, {e_2'}^2 = b, e_1'e_2' = -e_2'e_1').$$

On vérifie alors que l'homomorphisme cherché est induit par

$$\begin{aligned} e_1\hat{\otimes}1 &\longmapsto e'_1\hat{\otimes}{i'}^{-1}\\ e_2\hat{\otimes}1 &\longmapsto e'_2\hat{\otimes}i'\\ 1\hat{\otimes}i &\longmapsto 1\hat{\otimes}i'\\ 1\hat{\otimes}j &\longmapsto e'_1e'_2\hat{\otimes}(i'j')^{-1}. \end{aligned}$$

Enfin, (ii) et (iii) se déduisent facilement de (i) ((ii) est équivalent au cas particulier juste démontré).

□

6.3.9. Corollaire. — *Le foncteur $q \mapsto C(q)$ induit un homomorphisme*

$$C : W(F)/I^3F \to \mathrm{BW}(F).$$

Démonstration. — Le théorème 6.3.5 dit que, pour toute forme q non dégénérée, $C(q)$ définit un élément $\langle C(q)\rangle$ de $\mathrm{BW}(F)$, et le théorème 6.2.6 dit que $\langle C(q \perp q')\rangle = \langle C(q)\rangle + \langle C(q')\rangle$. La conclusion résulte de la proposition 6.3.8. □

6.4. Une filtration sur $\mathrm{BW}(F)$; un théorème de Merkurjev

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une F-superalgèbre centrale simple. D'après [**222**], [**146**, ch. IV, th. 3.6 et 3.8], deux cas se présentent :

– La F-algèbre A est simple centrale en tant qu'algèbre non graduée.
– A n'est pas centrale. Alors A est semi-simple et son centre $Z(A)$ est une F-algèbre étale de rang 2.

Dans le premier (resp. second) cas, on dit que A est *de type pair* (resp. *de type impair*). De plus (*ibid.*) :

– Dans le cas pair, A_0 est semi-simple et son centre est une F-algèbre étale de rang 2.
– Dans le cas impair, A_0 est centrale simple sur F. De plus, le A_0-module A_1 est isomorphe à A_0 (donc de même dimension).

Définissons une application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{BW}(F) &\longrightarrow \mathbb{Z}/2 \times F^*/F^{*2} \times B(F)\\ \langle A\rangle &\longmapsto (\varepsilon(A), \delta(A), b(A)) \end{aligned}$$

de la manière suivante :

– $\varepsilon(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est de type impair}\\ 0 & \text{si } A \text{ est de type pair.}\end{cases}$

– $\delta(A) = \begin{cases} d(Z(A)) & \text{si } A \text{ est de type impair}\\ d(Z(A_0)) & \text{si } A \text{ est de type pair}\end{cases}$

où, pour toute F-algèbre étale E, $d(E)$ est son discriminant.

– $b(A) = \begin{cases} [A_0] & \text{si } A \text{ est de type impair} \\ [A] & \text{si } A \text{ est de type pair.} \end{cases}$

6.4.1. Théorème

a) *L'application φ est une bijection.*
b) *ε est un homomorphisme.*
c) *Soit* $\mathrm{BW}^{(1)}(F)$ *le noyau de ε. Alors la restriction de δ à* $\mathrm{BW}^{(1)}(F)$ *est un homomorphisme.*
d) *Soit* $\mathrm{BW}^{(2)}(F)$ *le noyau de δ. Alors* $\mathrm{BW}^{(2)}(F) = i(B(F))$ *et la restriction de b à* $\mathrm{BW}^{(2)}(F)$ *est l'inverse de i.*
e) *L'application $\langle A\rangle \mapsto (\varepsilon(A), \delta(A))$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{BW}(F)/\,\mathrm{BW}^{(2)}(F) \longrightarrow Q(F)$$

où $Q(F)$ est le groupe défini avant la proposition 6.1.5.
f) *La loi d'addition induite sur $\mathbb{Z}/2 \times F^*/F^{*2} \times B(F)$ par transport de structure* via *φ est donnée par*

$$(m, a, x) + (n, b, y) = (m + n, (-1)^{mn}ab, x + y + ((-1)^{m(n+1)}a, (-1)^{(m+1)n}b))$$

où (u, v) désigne la classe de l'algèbre de quaternions $\left(\frac{u\ \ v}{F}\right)$ dans $B(F)$.

Démonstration

a)–e) Voir [**222**], [**146**, ch. IV, th. 3.11 et 4.4].
f) Voir [**146**, p. 117–119].

□

6.4.2. Proposition. — *Soit q une forme quadratique sur F. Alors on a :*

$$\varepsilon(C(q)) = \overline{\dim}\, q$$
$$\delta(C(q)) = d_\pm q.$$

Démonstration. — Considérons les deux homomorphismes

$$(\overline{\dim}, d_\pm), (\varepsilon, \delta) \circ C : W(F)/I^3F \rightrightarrows Q(F).$$

Pour démontrer qu'ils coïncident, il suffit de le vérifier sur un système de générateurs de $W(F)$, par exemple les $\langle a\rangle$ pour $a \in F^*$, auquel cas c'est trivial. □

6.4.3. Corollaire. — *Avec les notations du corollaire 6.3.9 et du théorème 6.4.1, on a, pour $n = 1, 2, 3$:*

$$C(I^nF) \subset \mathrm{BW}^{(n)}(F).$$

On aura besoin plus loin du lemme suivant :

6.4.4. Lemme. — *Soit $q \in I^2F$. On a alors*

$$C_0(q) \simeq A \times A$$
$$C(q) \simeq M_2(A)$$

pour une algèbre centrale simple A convenable.

Démonstration. — D'après la proposition 6.4.2, $C(q)$ est de type pair et $\delta(C(q)) = 1$. D'après le théorème 6.4.1, $C(q)$ est donc semblable à $i(A_0)$ pour une algèbre centrale simple A_0 convenable. En d'autres termes, il existe un superespace vectoriel $V = V_0 \oplus V_1$ tel que

$$C(q) \simeq i(A_0)\hat{\otimes}_F End_F(V).$$

Comme $\dim C_0(q) = \dim C_1(q)$, on a $\dim V_0 = \dim V_1$. En identifiant V_1 à V_0, on peut donc encore écrire

$$i(A_0)\hat{\otimes}_F End_F(V) \simeq i(A_0 \otimes_F End_F(V_0))\hat{\otimes}_F M_2(F)$$

ce qui donne le lemme avec $A = A_0 \otimes_F End_F(V_0)$. □

Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons la table de [**146**, p. 111] donnant la structure de l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique, cas par cas. Pour les démonstrations nous renvoyons à Lam [**146**]. On fixe une forme quadratique q ; on note $\dim q = n$, $d_\pm q = d$. Pour toute F-algèbre A, on note $Z(A)$ le centre de A.

n	d	$Z(C(q))$	$C(q)$	$Z(C_0(q))$	$C_0(q)$	$\deg(q)$
impair	$\notin F^{*2}$	$F(\sqrt{d})$	simple	F	centrale simple	0
	$\in F^{*2}$	$F \times F$	$C_0(q) \times C_0(q)$			
pair	$\notin F^{*2}$	F	centrale simple	$F(\sqrt{d})$	simple	1
	$\in F^{*2}$		$M_2(A)$	$F \times F$	$A \times A$, A c.s.	≥ 2

6.4.5. Définition. — Pour toute forme quadratique, on note $c(q)$ l'élément $b(C(q))$ de $B(F)$; on l'appelle l'*invariant de Clifford* de q.

On a donc

$$c(q) = \begin{cases} [C_0(q)] & \text{si } \dim q \text{ est impaire} \\ [C(q)] & \text{si } \dim q \text{ est paire.} \end{cases}$$

6.4.6. Remarque. — Dans [**146**], l'invariant $c(q)$ est appelé l'*invariant de Witt* de q ; le terme *invariant de Clifford* y désigne la classe de $C(q)$ dans $\mathrm{BW}(F)$. Bien que cette terminologie soit plus logique et historiquement plus correcte, celle ci-dessus s'est progressivement imposée. C'est donc celle que nous adopterons ici.

Le théorème 6.4.1 f) fournit la loi d'addition suivante pour l'invariant c :

6.4.7. Proposition. — *Soient q, q' deux formes quadratiques. Alors*

$$c(q \perp q') = c(q) + c(q') + ((-1)^{m(n+1)}d_\pm q, (-1)^{(m+1)n}d_\pm q')$$

où $m = \dim q$, $n = \dim q'$.

On aura aussi besoin plus loin des formules suivantes :

6.4.8. Proposition

a) *Soient* $\varphi, \psi \in IF$. *Alors* $c(\varphi \otimes \psi) = (d_\pm \varphi, d_\pm \psi)$.

b) *Soient* q *une forme quadratique et* $a \in F^*$. *Alors*

$$c(aq) = \begin{cases} c(q) + (a, d_\pm q) & \textit{si } \dim q \textit{ est paire} \\ c(q) & \textit{si } \dim q \textit{ est impaire.} \end{cases}$$

Démonstration

a) Soient $a = d_\pm \varphi$, $b = d_\pm \psi$. Alors $\varphi \equiv \langle 1, -a \rangle \pmod{I^2F}$ et $\psi \equiv \langle 1, -b \rangle \pmod{I^2F}$ (corollaire 6.2.7 b)). Il en résulte que $\varphi \otimes \psi \equiv \langle\langle a, b \rangle\rangle \pmod{I^3F}$. D'après la proposition 6.4.7, la restriction de c à I^2F est un homomorphisme de noyau contenant I^3F. Par conséquent,

$$c(\varphi \otimes \psi) = c(\langle\langle a, b \rangle\rangle) = (a, b)$$

d'après la proposition 6.3.8 (ii).

b) Supposons d'abord $q \in IF$. On a

$$\begin{aligned} c(q \perp aq) &= c(q) + c(aq) + (d_\pm q, d_\pm(aq)) \quad \text{(proposition 6.4.7)} \\ &= c(q) + c(aq) + (d_\pm q, d_\pm q) \quad \text{(proposition 6.1.2 d))} \\ &= c(q) + c(aq) + (-1, d_\pm q) \quad \text{(lemme A.3.5).} \end{aligned}$$

D'autre part, $c(q \perp aq) = c(\langle 1, a \rangle \otimes q) = (-a, d_\pm q)$, d'où l'énoncé.

Supposons maintenant $\dim q$ impaire. Soit $t \in F^*$. D'après la proposition 6.4.7 et la proposition 6.1.2 d), on a

$$\begin{aligned} c(q \perp \langle t \rangle) &= c(q) + (d_\pm q, t) \\ c(bq \perp \langle bt \rangle) &= c(bq) + (bd_\pm q, bt). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le cas précédent, on a

$$c(aq \perp \langle at \rangle) = c(q \perp \langle t \rangle) + (a, d_\pm(q \perp \langle t \rangle)) = c(q \perp \langle t \rangle) + (a, -td_\pm q).$$

Il en résulte :

$$c(aq) + (ad_\pm q, at) = c(q) + (d_\pm q, t) + (a, -td_\pm q)$$

soit

$$\begin{aligned} c(aq) &= c(q) + (d_\pm q, t) + (ad_\pm q, at) + (-td_\pm q, a) \\ &= c(q) + (d_\pm q, t) + (a, at) + (d_\pm q, at) + (-t, a) + (d_\pm q, a) \\ &= c(q) + (a, -a) = c(q). \end{aligned}$$

□

6.4.9. Proposition. — *Soit* $q \in I^2F$, *avec* $\operatorname{ind} c(q) = 2^r > 1$ *(cf. déf. A.2.8 b)). Alors* $\dim_{\mathrm{an}} q \geq 2r + 2$.

Démonstration. — On peut supposer q anisotrope ; l'énoncé résulte alors du lemme 6.4.4. □

6.4.10. Lemme

a) *Soient* $a, b \in F^*$. *Alors la forme* $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ *est hyperbolique si et seulement si* $c(\langle\langle a, b\rangle\rangle) = 0$.

b) *Soient* $a, b, c, d \in F^*$. *Alors* $\langle\langle a, b\rangle\rangle \simeq \langle\langle c, d\rangle\rangle$ *si et seulement si* $(a, b) = (c, d)$.

c) *Soient* $\sigma, \tau \in GP_2(F)$. *Alors* σ *et* τ *sont semblables si et seulement si* $c(\sigma) = c(\tau)$.

Démonstration

a) En effet, on a $c(\langle\langle a, b\rangle\rangle) = \left(\frac{a\ b}{F}\right)$ d'après la proposition 6.3.8 b) (ii). Les deux conditions sont chacune équivalente au fait que b soit une norme dans l'extension $F(\sqrt{a})/F$.

b) Supposons d'abord que $b = d$. Alors $(ac, b) = 0$, donc $\langle\langle ac, b\rangle\rangle \sim 0$ d'après a), d'où
$$\langle\langle a, b\rangle\rangle \perp -\langle\langle c, d\rangle\rangle \sim c\langle\langle ac, b\rangle\rangle \sim 0$$
d 'où l'énoncé. En général, d'après le lemme A.3.6, il existe e tel que $(a, b) = (a, e) = (c, e) = (c, d)$, d'où
$$\langle\langle a, b\rangle\rangle \simeq \langle\langle a, e\rangle\rangle \simeq \langle\langle c, e\rangle\rangle \simeq \langle\langle c, d\rangle\rangle.$$

c) Posons $\sigma = a\sigma_0$, $\tau = b\tau_0$ avec $\sigma_0, \tau_0 \in P_2(F)$. Alors $c(\sigma) = c(\sigma_0)$, $c(\tau) = c(\tau_0)$. L'énoncé résulte donc de b).

□

D'après la proposition 6.4.7, la restriction de l'invariant de Clifford à I^2F est un homomorphisme, prenant ses valeurs dans le sous-groupe de 2-torsion ${}_2B(F)$ de $B(F)$. Merkurjev a démontré le remarquable résultat suivant, qui englobe le lemme 6.4.10 a) et b) :

***6.4.11. Théorème* (Merkurjev, [157]).** — *L'homomorphisme induit*
$$c : I^2F/I^3F \longrightarrow {}_2B(F)$$
est un isomorphisme.

La démonstration de [**157**] repose sur un résultat de Suslin utilisant la K-théorie de Quillen. Voir [**11**] et [**221**] pour des démonstrations élémentaires (la deuxième étant due à Merkurjev lui-même !). Nous reviendrons sur ce résultat dans l'appendice A.

Notons $\mathrm{BW}_2(F)$ le sous-ensemble de $\mathrm{BW}(F)$ formé des x tels que $b(x) \in {}_2B(F)$. On vérifie facilement que $\mathrm{BW}_2(F)$ est un sous-groupe de $\mathrm{BW}(F)$ contenant $i({}_2B(F))$ (ce n'est pas le sous-groupe de 2-torsion de $\mathrm{BW}(F)$!). On déduit du théorème 6.4.11 :

6.4.12. Corollaire. — *L'homomorphisme* C *du corollaire 6.3.9 induit un isomorphisme*
$$C : W(F)/I^3F \xrightarrow{\sim} \mathrm{BW}_2(F).$$

***6.4.13. Proposition* (Arason [9, p. 469]).** — *Soit q une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2. Alors $B(F) \to B(F(q))$ est injectif, sauf si q est semblable à une sous-forme d'une 2-forme de Pfister. Dans ce cas,* $\operatorname{Ker}(B(F) \to B(F(q))) = \{c(\tau) \mid \tau \in P_2(F), q$ *est semblable à une sous-forme de* $\tau\}$. *En particulier,*

(i) *Pour $d \in F^* \setminus F^{*2}$, on a* $\operatorname{Ker}(B(F) \to B(F(\sqrt{d}))) = \{(a,d) \mid a \in F^*\}$.

(ii) *Si q est voisine d'une 2-forme de Pfister, on a* $\operatorname{Ker}(B(F) \to B(F(q))) = \{0, c(q)\}$.

Cette proposition est due à Witt [**223**] dans le cas $\dim q = 3$.

Démonstration. — Écrivons $F(q)$ comme extension quadratique d'une extension transcendante pure L de F. Soit A une F-algèbre centrale simple telle que $[A] \in \operatorname{Ker}(B(F) \to B(F(q)))$. On peut supposer A à division. D'après la proposition A.2.10 c) ci-dessous, A_L est toujours à division ; d'après la proposition A.2.10 b), A_L est soit triviale, soit un corps de quaternions. Il en est donc de même de A. Supposons que A soit un corps de quaternions $\left(\frac{a\ b}{F}\right)$, et soit $\varphi := \langle\langle a, b\rangle\rangle$. D'après le lemme 6.4.10, on a $\varphi_{F(q)} \sim 0$. Mais alors, d'après le théorème 3.2.4, q est semblable à une sous-forme de φ, ce qui démontre la première assertion. Le reste se vérifie alors facilement. □

6.4.14. Proposition

a) $\deg q = 2$ *si et seulement si* $\dim q$ *est paire,* $d_\pm q = 1$ *et* $c(q) \neq 0$.

b) $J_3(F) = I^3F$.

Démonstration

a) La nécessité résulte de la proposition 6.1.8 et du lemme 6.4.10 ; pour la suffisance, soit (q_i) la famille des noyaux supérieurs de q. La proposition 6.4.14 montre que $c(q) \neq 0 \Rightarrow c(q_{h-1}) \neq 0$, où h est la hauteur de q. En effet, pour tout $i < h-1$, $\dim q_i > 4$.

b) D'après le corollaire 4.3.6 et la proposition 6.1.8, on a $I^3F \subset J_3(F) \subset I^2F$. D'après a), $J_3(F) \subset \operatorname{Ker} c$. La conclusion résulte donc du théorème 6.4.11.

□

6.5. Exercices

6.5.1. — Soient q, q' deux formes quadratiques de dimension impaire. Supposons que q et q' soient semblables et que $d_\pm q = d_\pm q'$. Montrer que q et q' sont équivalentes. Montrer par un exemple que la conclusion est fausse si la dimension est paire.

6.5.2. — a) Soit $q \in I^2F$ de dimension $2n$. Montrer (en raisonnant par récurrence sur n) que $C(q) \simeq M_2(E(q))$, où $E(q)$ est produit tensoriel de $n-1$ algèbres de quaternions. En particulier, l'algèbre $C(q)$ n'est pas à division.

b) Soit E un produit tensoriel de $n-1$ algèbres de quaternions. Montrer qu'il existe $q \in I^2F$, de dimension $2n$, telle que $E(q) \simeq E$.

CHAPITRE 7

LE THÉORÈME DE RÉDUCTION D'INDICE ET SES APPLICATIONS

7.1. Le théorème de réduction d'indice

Soit A une F-algèbre centrale simple d'indice $\operatorname{ind} A = e$. On s'intéresse ici au comportement de e par extension des scalaires. Plus précisément, soit K/F une extension. Que peut-on dire de $\operatorname{ind}(A_K)$?

Cette question est analogue à celle du chapitre IV. Nous allons donner une réponse complète, due à A.S. Merkurjev, quand K est le *corps des fonctions d'une quadrique.*

Soit q une forme quadratique sur F, de dimension ≥ 2 et de corps des fonctions K. Si $\dim q = 2$, supposons q anisotrope. Alors K est extension quadratique d'une extension transcendante pure de F (cf. début de la section 3.1). D'après la proposition A.2.10, on a donc $\operatorname{ind}(A_K) = \operatorname{ind}(A)$ ou $\operatorname{ind}(A)/2$. Le théorème suivant dit exactement quand ces deux cas se produisent :

7.1.1. Théorème **(théorème de réduction d'indice, Merkurjev [159])**
On a $\operatorname{ind}(A_K) = \operatorname{ind}(A)/2$ *si et seulement s'il existe un homomorphisme non trivial (d'algèbres ordinaires) de* $C_0(q)$ *vers* A.

En termes plus détaillés :

Variante. — *On a* $\operatorname{ind}(A_K) = \operatorname{ind}(A)/2$ *si et seulement si*

(1) $\dim q$ *est impaire et* A *est de la forme* $C_0(q) \otimes B$ *;*
(2) $\dim q$ *est paire,* $d = d_\pm q \neq 1$ *et* $A_{F(\sqrt{d})}$ *est de la forme* $M_2(C_0(q)) \otimes B$ *(noter que* $C_0(q)$ *est alors centrale sur* $F(\sqrt{d})$*) ;*
(3) $\dim q$ *est paire,* $d_\pm q = 1$ *et* A *est de la forme* $C' \otimes B$*, où* $C_0(q) \simeq C' \times C'$.

Démonstration. — En effet, (1) et (3) sont équivalents au théorème 7.1.1 d'après la structure de $C_0(q)$ (voir table dans la section précédente) et le théorème A.1.5 b) (iv). Le cas (2) résulte de la proposition A.2.12. □

D'après la proposition 6.1.8 a) et la proposition 6.4.14 a), on peut remplacer les conditions (1), (2), (3) de la variante respectivement par $\deg(q) = 0$, $\deg(q) = 1$, $\deg(q) \geq 2$.

La démonstration initiale du théorème 7.1.1 par Merkurjev utilise la K-théorie algébrique. La formulation ci-dessus est due à J.-P. Tignol. Nous allons donner une esquisse de sa démonstration, qui est élémentaire ; pour les détails, nous renvoyons à [**208**].

7.1.2. Définition. — Soit A une algèbre centrale simple sur le corps des fonctions rationnelles $F(T)$. Un *ordre* de A est une sous-$F[T]$-algèbre B de A, de type fini en tant que $F[T]$-module.

(On exige souvent que A soit de plus *engendrée* par B et $F(T)$; nous ne voulons pas de cette condition ici.)

7.1.3. Lemme **(**[**208**, th. 2]**).** — *Soit D un corps gauche de centre F et de dimension finie sur F. Alors tout ordre de $D(T)$ est conjugué à un sous anneau de $D[T]$.*

Démonstration. — On observe d'abord que $D[T]$ est euclidien à gauche et à droite, donc principal à gauche et à droite (même raisonnement que dans le cas commutatif). Soit Λ un ordre de $D(T)$, et soit

$$M = D[T]\Lambda = \{\sum x_i y_i \mid x_i \in D[T], y_i \in \Lambda\}.$$

Le $F[T]$-module M est clairement de type fini, car il est engendré par l'ensemble des produits $e_i f_j$ où (e_i) (resp. (f_j)) parcourt une base de $D[T]$ (resp. Λ) sur $F[T]$. Si (g_m) est une base de D sur F (donc aussi de $D(T)$ sur $F(T)$), on peut écrire

$$e_i f_j = \sum a_{ijm} g_m$$

pour certains coefficients $a_{ijm} \in F(T)$, non tous nuls. Si $d \in F[T]$ est un dénominateur commun de ces coefficients, alors

$$dM \subset D[T].$$

Vu la définition de M, l'ensemble dM est un idéal à gauche non nul de $D[T]$; il existe donc $x \in D[T] \setminus \{0\}$ tel que

$$dM = D[T]x.$$

Considérons alors

$$\Lambda' = \{z \in D(T) \mid dMz \subset dM\};$$

La définition de M montre que $\Lambda' \supset \Lambda$; par ailleurs, comme $dM = D[T]x$, on a pour tout $z \in \Lambda'$:

$$xz \in D[T]x$$

d'où

$$\Lambda' \subset x^{-1}D[T]x.$$

□

Démonstration du théorème 7.1.1. — On peut supposer que A est un corps. On raisonne par récurrence sur $n = \dim q$. Si $n = 2$, cela résulte du lemme A.2.11. Supposons $n \geq 3$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $q \simeq \langle -1, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle = \langle -1\rangle \perp q_1$, avec $q_1' = \langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$. D'après le corollaire 6.2.7, on a $C_0(q) \simeq C(q_1)$. Il existe donc un homomorphisme de $C_0(q)$ vers A si et seulement si A contient des éléments $d_1, \ldots, d_{n-1}$ vérifiant

$$\begin{cases} d_i^2 & = a_i \\ d_i d_j & = -d_j d_i \quad (i \neq j). \end{cases} \tag{7.1.1}$$

Soit $q' = \langle -1, a_1, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}T^2 + a_{n-1}\rangle$ (définie sur $F(T)$). On remarque que

$$F(q) \simeq F(T)(q')$$

comme extensions de F. Pour démontrer le théorème 7.1.1, il suffit donc de prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

– A contient des éléments $d_1, \ldots d_{n-1}$ vérifiant (7.1.1).

– $A(T)$ contient des éléments $e_1, \ldots, e_{n-1}$ vérifiant les relations

$$\begin{cases} e_i^2 = a_i \quad (i < n-2); e_{n-2}^2 = a_{n-2}T^2 + a_{n-1} \\ e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j). \end{cases} \tag{7.1.2}$$

Si les relations (7.1.2) sont satisfaites, la sous-$F[T]$-algèbre Λ de $A(T)$ engendrée par $e_1, \ldots, e_{n-2}$ est un ordre de $D(T)$; d'après le lemme 7.1.3, quitte à conjuguer (ce qui ne change pas (7.1.2)), on peut supposer $\Lambda \subset D[T]$. Pour $i = 1, \ldots, n-3$, on a alors $e_i \in D$ puisque $\deg(a_i) = 0$. Par ailleurs, comme e_{n-2}^2 est de degré 2, on doit avoir

$$e_{n-2} = xT + y$$

pour certains éléments $x, y \in D$. Ces éléments anticommutent avec $e_1, \ldots, e_{n-3}$. De plus, la relation $e_{n-2}^2 = a_{n-2}t^2 + a_{n-1}$ donne

$$x^2 = a_{n-2}, xy + yx = 0, y^2 = a_{n-1}.$$

Les éléments

$$d_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i < n-2 \\ x & \text{si } i = n-2 \\ y & \text{si } i = n-1 \end{cases}$$

satisfont donc les relations (7.1.1).

Réciproquement, si $d_1, \ldots, d_{n-1}$ satisfont (7.1.1), alors les éléments $e_1, \ldots, e_{n-2}$ de $D(T)$ définis par

$$e_i = \begin{cases} d_i & \text{si } i < n-2 \\ d_{n-2}T + d_{n-1} & \text{si } i = n-2 \end{cases}$$

satisfont la relation (7.1.2). □

7.1.4. Corollaire. — *Il n'y a pas réduction d'indice dans les cas suivants ($n = \dim q$) :*

(i) $\deg(q) = 0$ *et* $2^{\frac{n-1}{2}} \nmid \mathrm{ind}(A)$.
(ii) $\deg(q) = 1$ *et* $2^{\frac{n}{2}} \nmid \mathrm{ind}(A)$.
(iii) $\deg(q) = 2$ *et* $2^{\frac{n}{2}-1} \nmid \mathrm{ind}(A)$.
(iv) $\deg(q) \geq 3$.

Démonstration. — Cela résulte de la variante du théorème 7.1.1. $\square$

7.2. Application I : déploiement générique

7.2.1. Théorème. — *Soit q une forme quadratique de degré 2, et soit 2^r l'indice de $C(q)$. Soit $(F_i, q_i)_{0\leq i\leq h}$ la tour de déploiement générique de q. Alors on a*

a) $\dim q \geq 2r + 2$.
b) $\dim q = 2r + 2$ *et* $r \geq 2 \Rightarrow \dim q_1 = 2r$ *;* $\dim q = 4$ *et* $r = 1 \Rightarrow h(q) = 1$.
c) $\dim q_{h-i} = 2i + 2$ *pour tout* $i \in [1, r]$.
d) $h \geq r$.

Démonstration. — a) résulte du lemme 6.4.4. Si $\dim q = 2r + 2$, on a $\dim_{\mathrm{an}}(q_{F(q)}) \leq 2r$, donc $\mathrm{ind}(D_{F(q)}) = 2^{r-1}$ d'après les propositions 6.4.9 et A.2.10 ; si de plus $r > 1$, on a alors $\dim_{\mathrm{an}}(q_{F(q)}) = 2r$, encore d'après la proposition 6.4.9. Si $\dim q > 2r + 2$, le corollaire 7.1.4 (iii) implique que $D_{F(q)}$ est un corps. D'où b), c) et d) par récurrence sur h et r. $\square$

7.2.2. Corollaire ([99]). — *Toute forme de hauteur 2, de degré 2 et de type III est une forme d'Albert.*

Démonstration. — Soit 2^r l'indice de $C(q)$. D'après la proposition 6.4.14 a) et le théorème 7.2.1 d), on a $1 \leq r \leq 2$. Si $r = 1$, $c(q)$ est la classe d'une algèbre de quaternions. On a donc $c(q) = c(\tau)$ pour $\tau \in P_2(F)$; alors $c(q_1) = c(\tau_{F(q)})$, ce qui montre que q est bonne. On a donc $r = 2$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 7.2.1 c) pour $i = 0$. $\square$

On a les variantes suivantes du théorème 7.2.1, dont la démonstration est laissée au lecteur :

7.2.3. Théorème. — *Soit q une forme quadratique de degré 1 et de discriminant d ; soit $E = F(\sqrt{d})$ et soit 2^r l'indice de $c(q_E)$. Soient $(F_i, q_i)_{0\leq i\leq h}$ la tour de déploiement générique de q et $E_i = F_i(\sqrt{d})$. Alors on a*

a) $\dim q \geq 2r + 2$.
b) $\dim q = 2r + 2$ *et* $r \geq 2 \Rightarrow \dim q_1 = \dim(q_1)_{E_1} = 2r$ *;* $\dim q = 4$ *et* $r = 1 \Rightarrow \dim q_1 = 2$, $h(q) = 2$, $h(q_E) = 1$.
c) $\dim q_{h-i} = \dim(q_{h-i})_{E_{h-i}} = 2i$ *pour tout* $i \in [2, r + 1]$.
d) $h \geq r + 1$.

e) *La tour de déploiement générique de* $(q_{h-r-1})_{E_{h-r-1}}$ *est* $(E_{h-r-1},\dots,E_{h-1})$.

7.2.4. Théorème. — *Soit q une forme quadratique de degré 0 et soit 2^r l'indice de $c(q)$. Soit $(F_i,q_i)_{0\le i\le h}$ la tour de déploiement générique de q. Alors on a*

a) $\dim q \ge 2r+1$.
b) $\dim q = 2r+1$ *et* $r\ge 1 \Rightarrow \dim q_1 = 2r-1$.
c) $\dim q_{h-i} = 2i+1$ *pour tout* $i\in[0,r]$.
d) $h\ge r$.

7.3. Application II : le u-invariant des corps

7.3.A. Généralités

7.3.1. Définition. — Le *u-invariant* de F est

$$u(F)=\sup\{\dim_{\mathrm{an}} q \mid q\in W(F)\}\le +\infty.$$

7.3.2. Exemples

1) Pour tout corps F, on a $u(F)\ge s(F)$, où $s(F)$ est le niveau de F (section 2.2).

2) Il existe des corps F de niveau 1 tels que $u(F)=+\infty$: si $F=\mathbb{C}(T_1,\dots,T_n,\dots)$, pour tout $n\ge 1$ la forme quadratique $\langle T_1,\dots,T_n\rangle$ est anisotrope sur F.

3) Si F est algébriquement clos, $u(F)=1$.

4) Si F est un corps fini (de caractéristique $\neq 2$), $u(F)=2$. En effet, un argument de comptage classique montre que toute forme quadratique en trois variables sur F représente zéro.

5) $u(F)=2$ si et seulement si $IF\neq 0$ et $I^2F=0$ (ceci est laissé au lecteur en exercice).

6) Si F est un corps local ou un corps global qui n'est pas totalement imaginaire, $u(F)=4$. Cela résulte des théorèmes de Meyer et de Hasse-Minkowski.

Quelles sont les valeurs possibles du u-invariant d'un corps ? À l'heure actuelle, cette question est toujours ouverte. Le premier progrès important a été fait par A.S. Merkurjev en 1989, comme application du théorème 7.1.1. Donnons pour commencer quelques restrictions sur l'ensemble de ces valeurs :

7.3.3. Proposition. — *Si $I^3F=0$, $u(F)$ est pair, égal à 1 ou égal à $+\infty$.*

Démonstration. — Supposons que $1<u(F)<+\infty$ et que $u(F)$ soit impair. Soit q une forme quadratique anisotrope telle que $\dim q=u(F)$. D'après le corollaire 6.1.4, on a

$$q\equiv\langle d\rangle \pmod{I^2F}$$

où $d = d_\pm q$. Par hypothèse, $q \perp \langle -d\rangle$ est isotrope, donc $q \simeq q' \perp \langle d\rangle$, avec $q' \in I^2F$. Comme $I^3F = 0$, on a

$$aq' \simeq q'$$

pour tout $a \in F^*$. Ceci implique que $D(q') = F^*$. En particulier, $-d \in D(q')$; mais alors q est isotrope, contradiction. □

7.3.4. Proposition. — *Si $u(F) < 2^n$, alors $I^nF = 0$.*

Démonstration. — En effet, toute n-forme de Pfister est alors isotrope, donc hyperbolique. □

7.3.5. Corollaire. — *$u(F)$ ne peut pas être égal à $3, 5$ ou 7.*

Démonstration. — En effet, on aurait alors $I^3F = 0$ d'après la proposition 7.3.4, donc une contradiction d'après la proposition 7.3.3. □

7.3.6. Proposition. — *Soit A un anneau de valuation discrète (cf. appendice C), de corps des fractions E et dont le corps résiduel F est de caractéristique $\neq 2$. Alors $u(E) \geq 2u(F)$.*

Démonstration. — Soient $q_1 = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$, $q_2 = \langle b_1, \dots, b_n\rangle$ deux formes quadratiques anisotropes sur F. Soient $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i$ des éléments de A relevant les a_i et les b_i, et posons

$$\tilde{q}_1 = \langle \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n\rangle$$
$$\tilde{q}_2 = \langle \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\rangle$$
$$q = q_1 \perp \pi q_2$$

où π est une uniformisante de A. Alors q est anisotrope sur E. En effet, soit $x = (x_1, x_2)$ tel que $q(x) = \tilde{q}_1(x_1) + \pi\tilde{q}_2(x_2) = 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que x_1 et x_2 ont toutes leurs composantes dans A et que $(x_1, x_2) \not\equiv (0,0) \pmod{\pi A}$. En réduisant modulo πA, on obtient

$$q_1(\bar{x}_1) = 0$$

donc $x_1 = \pi y_1$ où y_1 a toutes ses composantes entières. Alors

$$\pi\tilde{q}_1(y_1) + \tilde{q}_2(x_2) = 0.$$

En réduisant de nouveau modulo π, on obtient une contradiction. □

7.3.7. Remarque. — Si A est complet, on a $u(E) = 2u(F)$: cela se déduit facilement du théorème de Springer C.1.15 e).

7.3.8. Corollaire. — *Soit K/F une extension de type fini de F, de degré de transcendance d. Alors $u(K) \geq 2^d u(E)$ pour une extension finie E/F convenable.*

Démonstration. — Par récurrence, on se ramène au cas $d = 1$. On écrit K comme extension finie de $F(T)$; la valuation discrète de $F(T)$ donnée par l'idéal (T) de $F[T]$ peut se prolonger en une valuation discrète de K, dont le corps résiduel est une extension finie de F. On peut alors appliquer la proposition 7.3.6. □

7.3.B. Corps C_n

7.3.9. Définition. — Soient $n \geq 0$ et $d \geq 1$. On dit qu'un corps F est $C_n(d)$ si tout polynôme homogène sur F, de degré d, en au moins $d^n + 1$ variables, a un zéro non trivial. On dit que F est C_n s'il est $C_n(d)$ pour tout d.

Il est clair que F est $C_n(2)$ si et seulement si $u(F) \leq 2^n$; en particulier, si F est C_n, alors $u(F) \leq 2^n$. Une bonne référence pour la théorie des corps C_n est le livre de M. Greenberg [**62**]. Nous nous bornerons à citer :

***7.3.10. Théorème* (Tsen-Lang, Chevalley).** — *Les corps suivants sont C_n :*

(i) *Un corps de degré de transcendance n sur un corps algébriquement clos ;*
(ii) *un corps de degré de transcendance $n - 1$ sur un corps fini.*

On déduit de ce théorème, du corollaire 7.3.8 et des exemples 7.3.2 (3), (4) :

7.3.11. Théorème. — *On a $u(F) = 2^n$ dans les cas suivants :*

(i) *F est de degré de transcendance n sur un corps algébriquement clos ;*
(ii) *F est de degré de transcendance $n - 1$ sur un corps fini.*

7.3.C. Valeurs du u-invariant. — Guidé par les exemples ci-dessus, I. Kaplansky a conjecturé que, pour tout corps F, $u(F)$ est une puissance de 2. Cette conjecture est restée ouverte une trentaine d'années avant d'être réfutée spectaculairement par Merkurjev, qui a montré que $u(F)$ peut prendre toute valeur paire. Plus précisément, le théorème de Merkurjev est le suivant :

***7.3.12. Théorème* ([159]).** — *Soient n un entier ≥ 2 et k un corps de caractéristique $\neq 2$. Il existe un corps F contenant k tel que*

(i) *$I^3F = 0$;*
(ii) *$u(F) = 2n$.*

(D'après la proposition 6.2.2, la condition $I^3F = 0$ force la parité de $u(F)$.)

Démonstration. — On commence par remplacer le corps k par un sur-corps k_1 tel qu'il existe une forme quadratique $q \in I^2k_1$ telle que $\dim q = 2n$ et $\operatorname{ind} C(q) = 2^{n-1}$. Pour cela, on pose

$$k_1 = k(T_1, \dots, T_{2n-2})$$
$$D = \binom{T_1 \ \ T_2}{k_1} \otimes_{k_1} \cdots \otimes_{k_1} \binom{T_{2n-3} \ \ T_{2n-2}}{k_1}$$

et on choisit une forme quadratique $q \in I^2 k_1$, de dimension $2n$ et telle que $C(q)$ soit semblable à D. On prend pour q la partie anisotrope de

$$a_1 \langle\langle T_1, T_2 \rangle\rangle \perp \cdots \perp a_n \langle\langle T_{2n-3}, T_{2n-2} \rangle\rangle$$

où les a_i sont convenablement choisis. Plus précisément, supposons $a_1, \ldots, a_i$ ($i < n-1$) choisis tels que la forme $a_1\langle\langle T_1, T_2\rangle\rangle \perp \cdots \perp a_i\langle\langle T_{2i-1}, T_{2i}\rangle\rangle$ soit de dimension anisotrope $\leq 2i+2$, et soit q_i sa partie anisotrope. On choisit $a_{i+1} \in D(-q_i)$; alors $q_i \perp a_{i+1}\langle\langle T_{2i+1}, T_{2i+2}\rangle\rangle$ est isotrope, donc de dimension anisotrope $\leq 2i+4$. On a :

7.3.13. Lemme. — *L'algèbre D est à division.*

La démonstration est étonnamment difficile ; nous renvoyons à [**207**] et en particulier à son corollaire 2.13. Voir toutefois aussi [**182**, §19.9].

On va maintenant construire F par un procédé transfini. Soit $k_1 \subset k_2 \subset \cdots \subset k_i \subset \ldots$ la suite d'extensions de k_1 obtenue de la manière suivante : soient X l'ensemble des classes d'isométrie de formes quadratiques sur k_i de dimension $> 2n$, Y l'ensemble des classes d'isométrie de 3-formes de Pfister et $Z = X \cup Y$. On pose

$$k_{i+1} = \varinjlim k_i(\prod_{q \in T} X_q)$$

où T décrit les sous-ensembles finis de Z.

On pose alors $F = \varinjlim k_i$. Le corps F a les propriétés suivantes :

- $u(F) \leq 2n$.
- $I^3 F = 0$.
- D_F est à division.

Les deux premières propriétés résultent immédiatement de la construction de F ; la troisième également, *via* le théorème 7.1.1 : en effet, D reste à division par passage au corps des fonctions de toute quadrique correspondant à une forme quadratique de dimension $> 2n$ ou à une 3-forme de Pfister, d'après le corollaire 7.1.4.

Il résulte alors de la proposition 6.4.9 que q_F est anisotrope, et donc que $u(F) = 2n$. □

7.3.14. Remarques. — 1. La même construction permet de fabriquer un corps F tel que $I^3 F = 0$ et $u(F) = +\infty$. On remplace le corps k_1 par le corps des fonctions rationnelles en une infinité dénombrable d'indéterminées, et on construit les corps k_i en n'utilisant que les 3-formes de Pfister.

2. Une variante de cette construction consiste à remplacer h_{i+1} par une extension algébrique parfaite de h_{i+1} déterminée par un 2-sous-groupe de Sylow du groupe de Galois absolu de h_{i+1}. Le corps F' obtenu est alors *de dimension cohomologique* 2, cf. §B.8.

La question suivante est restée ouverte plusieurs années après le théorème de Merkurjev :

7.3.15. Question. — Existe-t-il un corps de u-invariant impair > 1 ?

Le meilleur résultat dans cette direction est dû à Izhboldin, puis à Vishik :

7.3.16. Théorème **([86] pour $n = 3$, [214] en général)**
Pour tout $n \geq 3$, il existe un corps de u-invariant $2^n + 1$.

Pour une autre application du théorème de réduction d'indice, voir l'exercice 8.3.3.

7.4. Exercices

7.4.1 **(d'après [97**, lemme 4]**).** — Soient q une forme anisotrope, $K = F(q)$ et C une F-algèbre centrale simple. Supposons que C_K soit semblable à algèbre de quaternions. En utilisant le théorème de réduction d'indice, montrer qu'il en est de même de C dans les cas suivants :
– $\dim q$ impaire et ≥ 7.
– $\dim q$ paire et ≥ 8.
– $\dim q = 6$ et $d_\pm q \neq 1$.
– $\dim q = 6$, $d_\pm q = 1$ mais $C(q)_K \not\sim C_K$.

Les exercices 7.4.2 à 7.4.10 sont inspirés de [**102**]. Soit J un idéal de $W(F)$. Pour toute forme quadratique q, on note

$$\dim_J q = \inf\{\dim q' \mid q' \equiv q \pmod{J}\}.$$

C'est la *J-dimension* ou la *dimension modulo J* de q. Pour $J = I^{n+1}F$, on note $\dim_J q = \dim_n q$. On dit que q est *anisotrope modulo J* si $\dim_J q = \dim q$: cela implique que q est anisotrope.

7.4.2. — Montrer que, pour deux formes $(q, q') \in W(F) \times I^n F$ non triviales, on a :

$$\dim_n(q \perp q') \leq \dim_n q + \dim_n q' - 2.$$

En particulier, si q est anisotrope modulo $I^{n+1}F$, ses seules sous-formes appartenant à $I^n F$ sont 0 et peut-être q.

7.4.3. — Calculer $\dim_0 q$ et $\dim_1 q$ en fonction de $\dim q$ et $d_\pm q$.

7.4.4. — La suite $(\dim_n q)$ est croissante ; si $2^n \geq \dim_{\mathrm{an}} q$, on a $\dim_n q = \dim_{\mathrm{an}} q$.

Pour $n \geq 0$ et $x \in I^n F / I^{n+1} F$, on note

$$\lambda(x) = \inf\{r \mid x \text{ est somme de } r \text{ classes de } n\text{-formes de Pfister}\}.$$

Si $q \in I^n F$, on note $\lambda(q) = \lambda(x)$, où x est l'image de q dans $I^n F / I^{n+1} F$.

7.4.5. — Montrer que, pour $q \in I^n F - I^{n+1}F$,

$$2^n \leq \dim_n q \leq (2^n - 2)\lambda(q) + 2$$

et que, pour $q \notin I^n F$,

$$\dim_n q \leq (2^n - 2)\lambda(q') + \dim_{n-1} q$$

pour une forme $q' \in I^{n+1}F$ convenable.

7.4.6. — Montrer que, pour $q \in I^2 F - I^3 F$, on a

$$\dim_2 q = 2\lambda(q) + 2.$$

On note

$$u_n(F) = \sup\{\dim_n(q) \mid q \in W(F)\}$$
$$\lambda^n(F) = \sup\{\lambda(x) \mid x \in I^n F/I^{n+1}F\}.$$

7.4.7. — La suite $u_n(F)$ est croissante ; $\sup_{n\geq 0} u_n(F) = u(F)$; $u_0(F) = 1$.

7.4.8. — Si $IF \neq 0$, $u_1(F) = 2$; si $I^2 F \neq 0$, $u_2(F) = 2\lambda^2(F) + 2$.

7.4.9. — Pour $n \geq 2$, on a

$$u_n(F) \leq (2^n - 2)\lambda^n(F) + u_{n-1}(F).$$

7.4.10. — Calculer les $u_n(F)$ pour $F = \mathbb{R}$.

CHAPITRE 8

FORMES DE BASSE DIMENSION

8.1. Formes de basse dimension

Dans cette section, nous rassemblons quelques résultats sur les formes de basse dimension.

8.1.A. Classification par invariants

8.1.1. Théorème **(Pfister [178, Satz 14]).** — *Soit q une forme quadratique de dimension paire, avec $d_\pm q = 1$ et $c(q) = 0$. Alors :*

a) *Si* $\dim q < 8$, $q \sim 0$.
b) *Si* $\dim q = 8$, $q \in GP_3(F)$.
c) *Si* $\dim q = 10$, *q est isotrope.*
d) *Si* $\dim q = 12$, *il existe $a, b \in F^*$ et $\sigma, \tau \in P_2(F)$ tels que $q \simeq a\langle\langle b\rangle\rangle \otimes (\sigma' \perp -\tau')$, où σ', τ' sont les parties pures de σ, τ.*

8.1.2. Remarque. — En particulier, le théorème 8.1.1 implique qu'une forme de dimension ≤ 12 d'invariants triviaux est dans I^3F, cas particulier du théorème 6.4.11. La démonstration (élémentaire) de Pfister date de 1966 !

Démonstration. — Elle procède cas par cas :

(i) $\dim q = 2$. On a $q \simeq a\langle 1, -d_\pm q\rangle \sim 0$.

(ii) $\dim q = 4$. On a $q \in I^2F$, donc $q \simeq a\langle\langle b, c\rangle\rangle$. Le lemme 6.4.10 a) implique alors que $q \sim 0$.

(iii) $\dim q = 6$. Si q est isotrope, $q \sim 0$ d'après (ii) ; supposons donc q anisotrope. On écrit $q \simeq a\langle 1, -b\rangle \perp \varphi$, avec $b \neq 1$. Alors $q_{F(\sqrt{b})} \sim \varphi_{F(\sqrt{b})} \sim 0$ d'après (ii). Donc $q \sim \langle 1, -b\rangle \otimes \varphi$ (proposition 3.2.1). Mais alors $d_\pm q = b \neq 1$, contradiction.

(iv) On a besoin d'un lemme :

8.1.3. Lemme. — *Soit q de dimension* 6, *avec $d_\pm q = 1$ et* $\operatorname{ind} c(q) = 2$. *Alors q est isotrope.*

Démonstration. — En effet, supposons q anisotrope. Soit $E = F(\sqrt{a})$ une extension quadratique telle que $c(q)_E = 0$. Alors $q_E \sim 0$ d'après (iii). Mais alors on obtient la même contradiction que dans la démonstration de (iii). □

(v) $\dim q = 8$. On peut supposer q anisotrope (sinon $q \sim 0$ d'après (iii)). On écrit $q = a\langle 1, -b\rangle \perp \varphi$. On a $q_{F(\sqrt{b})} \sim 0$ d'après (iii), donc $\varphi_{F(\sqrt{b})} \sim 0$ et $\varphi \simeq c\langle 1, -b\rangle \perp \varphi$, d'où

$$q \simeq \langle a, c\rangle \otimes \langle 1, -b\rangle \perp \psi.$$

Mais alors $d_\pm \psi = 1$ et $c(\psi) = c(\langle a, c\rangle \otimes \langle 1, -b\rangle)$; d'après le lemme 6.4.10 c), ψ est isométrique à $\langle a, c\rangle \otimes \langle 1, -b\rangle$, ce qui donne l'énoncé.

(vi) $\dim q = 10$. Supposons q anisotrope. Toute forme de dimension 4 peut s'écrire $c\langle d, -a, -b, ab\rangle$ pour a, b, c, d convenables. On écrit donc $q = c\langle d, -a, -b, ab\rangle \perp \varphi$. Soit $E = F(\sqrt{d})$. On a $d_\pm(\varphi_E) = d_\pm(c\langle d, -a, -b, ab\rangle_E) = 1$ et $c(\varphi_E) = (a, b)$, donc φ_E est isotrope d'après le lemme 8.1.3. Donc $\varphi \simeq e\langle 1, -d\rangle \perp \psi$ avec $d_\pm \psi = 1$, d'où $\psi \in GP_2(F)$. Mais alors, la forme $\rho = c\langle d, -a, -b, ab\rangle \perp e\langle 1, -d\rangle$ vérifie $d_\pm \rho = 1$, $\operatorname{ind} c(\rho) \leq 2$; d'après (iii) et (iv), elle est isotrope. Comme ρ est une sous-forme de q, on a une contradiction.

(vii) $\dim q = 12$. On a besoin d'un autre lemme sur les formes de dimension 6 :

8.1.4. Lemme. — *Soit q de dimension 6 avec $d_\pm q = 1$. Alors il existe $\lambda \in F^*$ et $\sigma, \tau \in P_2(F)$ tels que $q \simeq \lambda(\sigma' \perp -\tau')$, où σ', τ' sont les parties pures de σ, τ.*

Démonstration. — En effet, écrivons $q \simeq \langle a, b, c, d, e, f\rangle$ avec $abcdef = -1$. Soit $\lambda = abc$. Alors

$$\lambda q \simeq \langle bc, ac, ab, abcd, abce, -de\rangle \simeq \langle\langle abcd, abce\rangle\rangle' \perp -\langle\langle -bc, -ca\rangle\rangle'.$$

□

Soit maintenant q comme dans le théorème 8.1.1 d). Si q est isotrope, l'énoncé résulte de (v) et (vi) (avec $\sigma \sim 0$, c'est-à-dire $q \sim a\langle\langle b\rangle\rangle \otimes \tau$). Supposons maintenant q anisotrope. Écrivons $q \simeq a_0\langle 1, -b\rangle \perp \varphi$. Par (vi), $\varphi_{F(\sqrt{b})}$ est isotrope, donc $\varphi \simeq a_1\langle 1, -b\rangle \perp \varphi$ et $q \simeq \tau_1 \perp \psi$, avec $\tau_1 = \langle a_0, a_1\rangle \otimes \langle 1, -b\rangle \in GP_2(F)$ et donc $d_\pm \psi = 1$, $\operatorname{ind} c(\psi) = 2$. Écrivons $\psi \simeq a_2\langle 1, -b'\rangle \perp \rho$. Soit $E = F(\sqrt{b'})$. Alors $d_\pm \rho_E = 1$, $\operatorname{ind} c(\rho_E) = 2$, donc ρ_E est isotrope par le lemme 8.1.4. Par conséquent, $\rho \simeq a_3\langle 1, -b'\rangle \perp \tau_3$ et donc $\psi \simeq \langle a_2, a_3\rangle \otimes \langle 1, -b'\rangle \perp \tau_3$, d'où $\tau_3 \in GP_2(F)$. On a donc écrit

$$q \simeq \tau_1 \perp \tau_2 \perp \tau_3$$

avec $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in GP_2(F)$.

Soit $c \in F^*$ tel que $\tau_1 \perp c\tau_2$ soit isotrope. Alors $q' = \tau_1 \perp c\tau_2 \perp \tau_3$ est isotrope et d'invariants triviaux ; par (v) et (vi), on a donc $q' \in I^3F$. D'autre part,

$$q \perp -q' \sim \langle 1, -c\rangle \otimes \tau_2 \in I^3F$$

d'où $q \in I^3F$.

Écrivons $\tau_i \simeq c_i\sigma_i$, avec $b_i \in F^*$ et $\sigma_i \in GP_2(F)$. D'après ce qui précède, on a

$$\sigma_1 \perp \sigma_2 \equiv \sigma_3 \pmod{I^3F}.$$

En appliquant le corollaire 3.3.3, on en déduit qu'il existe d, e, f tels que $\sigma_1 \simeq \langle\langle d, e\rangle\rangle$, $\sigma_2 \simeq \langle\langle d, f\rangle\rangle$, $\sigma_3 \simeq \langle\langle d, ef\rangle\rangle$. Alors $q \simeq \langle\langle d\rangle\rangle \otimes \pi$ avec

$$\pi = c_1\langle 1, -e\rangle \perp c_2\langle 1, -f\rangle \perp c_3\langle 1, -ef\rangle.$$

On a $\dim \pi = 6$, $d_\pm \pi = 1$. En appliquant le lemme 8.1.4, on en déduit $\pi \simeq \lambda(\mu_1' \perp \mu_2')$ avec $\lambda \in F^*$ et $\mu_1, \mu_2 \in P_2(F)$. D'où l'énoncé. □

8.1.5. Corollaire. — *Une forme q de dimension ≤ 3 est déterminée à isométrie près par son rang, son discriminant et son invariant de Clifford.*

Démonstration. — Soit q' ayant les mêmes invariants ; alors $q \perp -q' \sim 0$ d'après le théorème 8.1.1 a). □

8.1.6. Corollaire. — *Soit q une forme d'Albert. Alors,*
- *q est anisotrope si et seulement si* $\operatorname{ind} c(q) = 4$ *;*
- *q est isotrope mais non hyperbolique si et seulement si* $\operatorname{ind} c(q) = 2$ *;*
- *q est hyperbolique si et seulement si $c(q) = 0$.*

Démonstration. — Si $c(q) = 0$, on a $q \sim 0$ d'après le théorème 8.1.1 a). Si $\operatorname{ind} c(q) = 2$, alors $q \not\sim 0$, mais q est isotrope d'après le lemme 8.1.3. Enfin, si $\operatorname{ind} c(q) = 4$, q est anisotrope d'après le lemme 6.4.4. □

En complément du théorème 8.1.1, nous nous devons d'indiquer :

8.1.7. Théorème. — a) ***Rost*** [**185**] **:** *Soit q une forme quadratique de dimension 14 telle que $d_\pm q = 1$, $c(q) = 0$. Alors il existe $a \in F^*$ et une 3-forme de Pfister φ sur $E = F[t]/(t^2 - a)$ telle que $q \simeq as_*\varphi'$, où s_* est le « transfert de Scharlau »pour E/F (cf. remarque 1.5.3) défini par la forme linéaire $x \mapsto Tr_{E/F}(x/\alpha)$ avec $\alpha \in E \setminus F$ tel que $\alpha^2 = a$, et φ' est la partie pure de φ.*

b) ***Hoffmann-Tignol*** [**78**, prop. 2.3]**,** ***Izhboldin-Karpenko*** [**90**, prop. 17.2] **:** *q est somme dans I^3F de classes de trois 3-formes de Pfister.*

c) ***Hoffmann-Tignol*** [**78**, cor. 6.2 (v) et ex. 6.3] **:** *Il existe un corps F et une forme $q \in I^3F$, de dimension 14, telle que q ne soit pas équivalente à la différence de deux 3-formes de Pfister.*

8.1.8. Remarque. — Dans le cas particulier de a) où a est un carré, on a $E = F \times F$. Une 3-forme de Pfister sur E s'identifie alors à un couple $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ de 3-formes de Pfister sur F et $s_*\varphi' = \varphi_1' \perp -\varphi_2'$. C'est ce qui a inspiré b) et c). La démonstration de Rost utilise la théorie des groupes algébriques linéaires, qui dépasse le cadre de ce cours ; voir aussi le mémoire à paraître de Skip Garibaldi [**59**].

Dans cette direction, on peut aussi signaler :

8.1.9. Théorème **(Parimala-Suresh [174**, dém. du th. 3.4]**, Kahn [102**, cor. 2.1]**)**
Pour tout entier (pair) $n \geq 8$, il existe une constante universelle $c(n)$ telle que, pour tout corps F et toute forme $q \in I^3F$ de dimension n, q soit somme de $c(n)$ classes de 3-formes de Pfister dans I^3F.

8.1.10. Proposition **(Wadsworth [220**, th. 7]**)**. — *Soient q, q' deux formes de dimension 4 telles que $d_\pm q = d_\pm q' = d \neq 1$. Soit $E = F(\sqrt{d})$. Alors q et q' sont semblables si et seulement si q_E et q'_E sont semblables.*

Démonstration. — La nécessité est claire. Pour la suffisance, quitte à multiplier q et q' par un scalaire, on peut supposer que ces deux formes représentent 1. On a donc

$$q \simeq \langle 1 \rangle \perp q_1, \qquad q' \simeq \langle 1 \rangle \perp q'_1.$$

Soit $\varphi = q_1 \perp -q'_1$. Alors $\varphi \in I^2F$. Les formes q_E et q'_E sont de dimension 4, de discriminant 1 et représentent 1 : ce sont donc des 2-formes de Pfister. Comme par hypothèse q_E et q'_E sont semblables, elles sont isométriques par le corollaire 2.1.9 et $\varphi_E \sim 0$. Si φ était anisotrope, on aurait $\varphi \simeq \langle 1, -d \rangle \otimes \rho$ avec $\dim \rho = 3$ (proposition 3.2.1), donc $d_\pm \varphi = d$, ce qui contredirait $\varphi \in I^2F$. Donc φ est isotrope et il existe $a \in D(q_1) \cap D(q'_1)$. Autrement dit, on a

$$q \simeq \langle 1, a, b, abd \rangle, \qquad q' \simeq \langle 1, a, b', ab'd \rangle$$

pour b, b' convenables.

Posons maintenant $\psi = \langle 1, a, -bb', -abb'd \rangle$. On a

$$0 \sim \varphi_L \simeq \langle a, -a, b, abd, -b', -ab'd \rangle \sim b\langle 1, ad, -bb', -abb'd \rangle \simeq b\psi_E$$

donc $\psi_E \sim 0$. Si ψ était anisotrope, en réappliquant la proposition 3.2.1 on aurait $\psi \simeq \langle 1, -d \rangle \otimes \tau$ avec $\dim \tau = 2$, donc $\psi \in I^2F$; mais c'est impossible puisque $d_\pm \psi = d$. Donc ψ est isotrope et il existe $t \in D(\langle 1, a \rangle) \cap D(\langle bb', abb'd \rangle)$. Mais alors $t \in G(\langle 1, a \rangle)$ et $tbb' \in G(\langle 1, ad \rangle)$. En particulier,

$$t\langle 1, a \rangle \simeq \langle 1, a \rangle, \qquad t\langle b, abd \rangle \simeq \langle b', ab'd \rangle$$

et $tq \simeq q'$. □

8.1.11. Corollaire. — *Soient q, q' deux formes de dimension 4 ayant même discriminant et même invariant de Clifford. Alors q et q' sont semblables.*

Démonstration. — On distingue deux cas :

a) $d_\pm q = d_\pm q' = 1$. Alors $q, q' \in GP_2(F)$, soit $q \simeq a\tau$, $q' \simeq a'\tau'$ avec $a, a' \in F^*$ et $\tau, \tau' \in P_2(F)$. Mais $c(q) = c(q') \Rightarrow c(\tau) = c(\tau') \Rightarrow \tau \simeq \tau'$.

b) $d_\pm q = d_\pm q' = d \neq 1$. Soit $E = F(\sqrt{d})$. D'après a), q_E et q'_E sont semblables ; la conclusion résulte maintenant de la proposition 8.1.10. □

8.1.12. Remarque. — La réciproque du corollaire 8.1.11 n'est pas vraie, comme le montre la proposition 6.4.8 b). De même, il n'est pas vrai en général que $q \simeq q'$ dans le corollaire 8.1.11 (considérer le cas $d_\pm q = 1$).

***8.1.13. Théorème* (Jacobson [93]).** — *Soient q, q' deux formes d'Albert . Alors q et q' sont semblables si et seulement si $c(q) = c(q')$.*

Démonstration. — Nous suivrons celle de Mammone-Shapiro [**154**]. Tout d'abord, il est clair que si q et q' sont semblables, alors $c(q) = c(q')$ (proposition 6.4.8 b)). Réciproquement, soit $a \in F^*$ tel que $\varphi = q' \perp -aq$ soit isotrope. Comme $d_\pm\varphi = 1$ et $c(\varphi) = 0$, on a $i(\varphi) \geq 2$ d'après le théorème 8.1.1 c). On peut donc écrire

$$aq \simeq \psi \perp \rho, \qquad q' \simeq \psi' \perp \rho$$

avec $\dim \psi = \dim \psi' = 4$. On a $d_\pm\psi = d_\pm\psi'$ et $c(\psi) = c(\psi')$, donc d'après le corollaire 8.1.11, il existe b tel que $\psi' \simeq b\psi$.

On a $d = d_\pm\psi = d_\pm\psi' = d_\pm\rho$ et

$$c(b\psi) = c(\psi) + (b, d)$$

d'après la proposition 6.4.8 b). On a donc $(b, d) = 0$, d'où $b \in G(\langle 1, -d\rangle) = G(\rho)$ et donc $q' \simeq bq$. □

***8.1.14. Remarque*.** — Soit X l'ensemble des classes de similitude de formes d'Albert et soit Y l'ensemble des classes d'isomorphisme d'algèbres centrales simples de degré 4 et d'exposant 2. L'invariant de Clifford définit une application

$$\tilde{c} : X \longrightarrow Y.$$

Le théorème 8.1.13 dit que $\tilde{c}$ est injective. D'autre part, le théorème d'Albert A.3.8 dit que $\tilde{c}$ est *surjective* : en effet, si $a, b, c, d \in F^*$, la forme d'Albert $\langle a, b, -ab, -c, -d, cd\rangle$ a pour invariant de Clifford $(a, b) + (c, d)$.

***8.1.15. Remarque*.** — Il n'est pas vrai en général que deux formes de dimension 5 ayant même discriminant et même invariant de Clifford soient semblables. Par exemple, soit φ une forme de dimension 4 et de discriminant d ; choisissons $a \in D(\langle 1, -d\rangle)$, $b \in F^*$, et soient $q = \varphi \perp \langle b\rangle$, $q' = a\varphi \perp \langle b\rangle$. On a

$$\begin{aligned} d_\pm q &= db = d_\pm q' \quad \text{(proposition 6.1.2)}\\ c(q) &= c(\varphi) + (d, -b) \quad \text{(proposition 6.4.7)}\\ c(q') &= c(a\varphi) + (d, -b) = c(q). \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on utilise que $c(a\varphi) = c(\varphi) + (a, d)$ (proposition 6.4.8 b)) et que $(a, d) = 0$ d'après le choix de a. Soit t tel que $q' \simeq tq$. On a alors

$$\langle t, -a\rangle \otimes \varphi \sim b\langle 1, -t\rangle.$$

Comme le premier membre est dans I^2F, cela impose $t = 1$, soit $q' \simeq q$ ou $a \in G(\varphi)$. Il suffit donc d'exhiber φ et $a \in D(\langle 1, -d_\pm\varphi\rangle)$ tels que $a \notin G(\varphi)$.

Pour cela, choisissons $F = F_0(A, B, C)$ où F_0 est un corps donné et A, B, C sont des indéterminées. Soit $\psi = \langle\langle B, C\rangle\rangle$. D'après le lemme 5.2.6, la forme de Pfister

$\langle\langle A, B, C\rangle\rangle$ est anisotrope ; par conséquent, $A \notin D(\psi)$. Posons alors

$$\varphi = \langle -A, -B, -C, BC\rangle \sim \psi \perp \langle -1, -A\rangle.$$

On a $d_\pm\varphi = -A$ et $A \in D(\langle 1, A\rangle) = G(\langle 1, A\rangle)$, mais alors $A \notin G(\psi) \Rightarrow A \notin G(\varphi)$.

8.1.B. Formes excellentes de petite dimension

8.1.16. Proposition **(Knebusch [123**, cor. 7.19]). — *Soit q une forme excellente de dimension impaire $n \geq 3$; soient ρ la forme de Pfister dont q est voisine et ρ_1 la forme de Pfister dont la forme complémentaire de q est voisine. Soit $d = d_\pm q$.*

a) *Si $h(q)$ est impair, $q \perp \langle -d\rangle$ est encore excellente, et est une voisine de ρ.*
b) *Si $h(q)$ est pair, on a $q \simeq \langle d\rangle \perp \varphi$ avec φ excellente. Si n est de la forme 2^r+1, alors φ est semblable à ρ_1. Sinon, φ est voisine de ρ.*

Démonstration. — Récurrence sur $h = h(q)$. Si $h = 0$, on a $q \simeq \langle d\rangle$ et l'énoncé est trivial. Supposons $h > 0$ et soit $-q_1$ la forme complémentaire de q. On a $d_\pm q_1 = d$.

a) Si $h(q)$ est impair, alors $h(q_1)$ est pair ; par récurrence, on a $q_1 \simeq \langle d\rangle \perp \varphi_1$, avec φ_1 excellente. D'autre part, il existe $a \in F^*$ tel que
$$q \perp -q_1 \simeq a\rho.$$
Par conséquent, $q \perp \langle -d\rangle$ est excellente, voisine de ρ et de forme complémentaire $-\varphi_1$.
b) Si $h(q)$ est pair, alors $h(q_1)$ est impair. Par récurrence, $q' = q_1 \perp \langle -d\rangle$ est excellente et voisine de ρ_1. Par conséquent, $-q' \perp \varphi \simeq b\rho$ pour φ et $b \in F^*$ convenables, puisque $\rho_1 \leq \rho$. On en déduit $q \simeq \varphi \perp \langle d\rangle$ comme dans la démonstration du théorème 5.3.2.

On a $\dim q' \leq \dim \rho_1 \leq \frac{1}{2}\dim\rho$, donc $\dim\varphi \geq \frac{1}{2}\dim\rho$. Supposons d'abord que $\dim\varphi > \frac{1}{2}\dim\rho$. Alors φ est voisine de ρ, de forme complémentaire $-q'$, donc est excellente. De plus, on a $\frac{1}{2}\dim\rho + 1\langle \dim\varphi + 1 = \dim q \leq \dim\rho$, donc n n'est pas de la forme 2^r+1. Supposons maintenant que $\dim\varphi = \frac{1}{2}\dim\rho$. Ceci est équivalent à $\dim q' = \dim\rho_1 = \frac{1}{2}\dim\rho$, d'où $n = \dim q = \frac{1}{2}\dim\rho + 1$. Alors q' est semblable à ρ_1 ; il en est donc de même de φ, qui est encore excellente. □

8.1.17. Théorème **(Knebusch [123**, p. 10–11]). — *Soit q une forme quadratique anisotrope sur F, de dimension ≥ 3, de discriminant d et d'invariant de Clifford c. Pour que q soit excellente, il faut et il suffit que les conditions équivalentes suivantes soient remplies :*

a) $\dim q = 3$ *: aucune condition.*
b) $\dim q = 4$ *:*
   (i) $d = 1$ *;*
   (ii) $h(q) = 1$ *;*
   (iii) $\deg(q) = 2$.
c) $\dim q = 5$ *:*

  (i) $d \in D(q)$;
  (ii) $\operatorname{ind}(c) = 2$.
- d) $\dim q = 6$:
  (i) $d \neq 1$ *et* q *est divisible par* $\langle 1, -d\rangle$;
  (ii) q *est divisible par une forme binaire ;*
  (iii) $d \neq 1$ *et* $c_{F(\sqrt{d})} = 0$;
  (iv) $i_1(q) = 2$.
- e) $\dim q = 7$: $c = 0$.
- f) $\dim q = 8$:
  (i) $d = 1, c = 0$;
  (ii) $h(q) = 1$;
  (iii) $\deg(q) = 3$.
- g) $\dim q = 9$: $d \in D(q)$ *et* $c = 0$.
- h) $\dim q = 10$: q *est divisible par* $\langle 1, -d\rangle$ *et* $q \geq \varphi$, *où* φ *est l'unique forme binaire telle que* $d_\pm\varphi = d$ *et* $c(\varphi) = c$.
- i) $\dim q = 11$: $q \perp \langle -d\rangle$ *est anisotrope et excellente.*
- j) $\dim q = 12$: q *est divisible par* $\tau \in P_2(F)$ *telle que* $c(\tau) = c$.

Démonstration

- a) Si $q \simeq \langle a, b, c\rangle$, q est voisine de la 2-forme de Pfister $\langle\langle -ab, -ac\rangle\rangle$. Comme la forme complémentaire est de dimension 1, elle est excellente.
- b) C'est clair, puisqu'une forme de dimension 2^n est excellente si et seulement si elle est semblable à une n-forme de Pfister.

  Pour $5 \leq \dim q \leq 8$, notons que q est excellente si et seulement si elle est voisine de Pfister, d'après les cas précédents.
- c) Supposons q excellente. Alors (i) est vrai par la proposition 8.1.16. Si (i) est vrai, on a $q \simeq \varphi \perp \langle d\rangle$ avec $\varphi \in GP_2(F)$, donc $c(q) = c(\varphi)$ est d'indice ≤ 2. Enfin, si (ii) est vrai, soit $\tau \in P_2(F)$ telle que $c(q) = c(\tau)$ et posons $\psi = q \perp d\tau'$ où τ' est la forme pure de τ. Alors ψ est de dimension 8 et d'invariants triviaux, donc $\psi \in GP_3(F)$ par le théorème 8.1.1 et q est voisine.
- d) Si q est excellente, sa forme complémentaire est de dimension 2 ; donc $\deg(q) = 1$ et (i) résulte du théorème 5.4.8. Les implications (i)⇒(ii) et (i)⇒(iii) sont triviales.

  Montrons que non-(iv)⇒non-(iii). On a $i_1(q) = 1$ ou 2. Si $i_1(q) = 1$, $(q_1)_{F_1(\sqrt{d})} \not\sim 0$ d'après la proposition 8.1.10. En particulier, $c_{F_1(\sqrt{d})} \neq 0$ et donc $c_{F(\sqrt{d})} \neq 0$.

  Montrons que (iv)⇒(ii). Comme $\dim q_1 = 2$, on a $q_1 \simeq a\langle 1, -d\rangle$ et $d \neq 1$. Par conséquent, $q_{F_1(\sqrt{d})} \sim 0$. La forme $q_{F(\sqrt{d})}$ ne peut pas être anisotrope (sans quoi elle serait de hauteur 1), puisque sa dimension n'est pas une puissance de 2. Par conséquent, l'extension $F_1(\sqrt{d})/F(\sqrt{d})$ est transcendante pure ; mais alors $q_{F(\sqrt{d})} \sim 0$.

Enfin, si (ii) est vrai, alors q est produit tensoriel d'une forme de dimension 3 et d'une forme binaire, donc est excellente puisque toute forme de dimension 3 est excellente.

e) Si q est voisine, on a évidemment $c(q) = 0$. Réciproquement, si $c(q) = 0$, alors $q \perp \langle -d \rangle$ est de dimension 8 et d'invariants triviaux, donc semblable à une 3-forme de Pfister d'après le théorème 8.1.1.

f) q est excellente si et seulement si elle est semblable à une 3-forme de Pfister. L'équivalence avec (i) résulte alors du théorème 8.1.1 ; l'équivalence avec (ii) résulte de la proposition 4.2.1, et l'équivalence avec (iii) du corollaire 4.3.7.

g) Si q est excellente, alors $q \simeq \varphi \perp \langle d \rangle$ d'après la proposition 8.1.16. Comme la forme complémentaire de q est excellente, son invariant de Clifford est nul et donc aussi celui de q. Réciproquement, si $c(q) = 0$, on a $c(\varphi) = 0$, donc $\varphi \simeq a\tau$ avec $\tau \in P_3(F)$ (théorème 8.1.1). Par conséquent, q est voisine de $\tau \otimes \langle\langle -ad \rangle\rangle$ et sa forme complémentaire est voisine de τ.

h) Il résulte du théorème 5.4.8 que q est excellente si et seulement si $q \simeq \langle 1, -d \rangle \otimes \varphi$ avec φ excellente. L'énoncé résulte alors du cas c).

j) Si q est excellente, sa forme complémentaire est de la forme $a\tau$ avec $\tau \in P_2(F)$; par conséquent, $c(q) = c(\tau)$ et $q_{F(\tau)} \sim 0$, donc q est divisible par τ. Réciproquement, si $q \simeq \tau \otimes \psi$, on a $\dim \psi = 3$, donc ψ est excellente, ainsi que q.

i) Si q est excellente, alors $\varphi = q \perp \langle -d \rangle$ est anisotrope et excellente d'après la proposition 8.1.16. Réciproquement, si φ est anisotrope et excellente, on peut écrire $\varphi \simeq c\tau \otimes \sigma'$ avec $\sigma, \tau \in P_2(F)$ et $c(\varphi) = c(\tau)$. Alors q est une voisine de $\tau \otimes \sigma$, de forme complémentaire $a\tau \perp \langle -d \rangle$.

□

8.1.C. « Classification »des formes de petite dimension. — Pour les besoins du problème d'isotropie, on se propose de décomposer l'ensemble des formes quadratiques anisotropes q d'une dimension $n \leq 7$ donnée en « classes »ayant des comportements différents. Notons $d = d_\pm q$, $c = c(q)$; $E = F(\sqrt{d})$ (lorsque $d \neq 1$).

1) $n = 1$. Une seule classe.

2) $n = 2$. Une seule classe.

3) $n = 3$. Une seule classe.

4) $n = 4$. Deux classes : $\begin{cases} \text{4-I.} & d \neq 1. \\ \text{4-II.} & d = 1. \end{cases}$

On a

$$q \in \text{4-I} \iff \deg(q) = 1 \iff h(q) = 2.$$
$$q \in \text{4-II} \iff \deg(q) = 2 \iff h(q) = 1$$

5) $n = 5$. Deux classes : $\begin{cases} \text{5-I.} & d \notin D(q). \\ \text{5-II.} & d \in D(q). \end{cases}$

On a

$$\begin{aligned} q \in \text{5-I} &\iff q \perp \langle -d \rangle \text{ est une forme d'Albert anisotrope.} \\ q \in \text{5-II} &\iff q \text{ est excellente.} \end{aligned}$$

On notera que les classes 5-I et 5-II ne sont pas distinguées par leur suite de déploiement.

6) $n = 6$. Quatre classes : $\begin{cases} \text{6-I.} & d \neq 1,\ \operatorname{ind} c_E = 4. \\ \text{6-II.} & d \neq 1,\ \operatorname{ind} c_E = 2. \\ \text{6-III.} & d \neq 1,\ c_E = 0. \\ \text{6-IV.} & d = 1. \end{cases}$

On a :

$$\begin{aligned} q \in \text{6-I} &\iff d \neq 1 \text{ et } q_E \text{ est anisotrope.} \\ q \in \text{6-II} &\iff d \neq 1 \text{ et } i(q_E) = 1 \iff q \simeq a\tau \perp b\langle 1, -d \rangle \text{ pour } a, b \in F^* \text{ et } \tau \in P_2(F). \\ q \in \text{6-III} &\iff q \text{ est excellente} \iff q_E \sim 0 \iff h(q) = 2,\ \deg(q) = 1. \\ q \in \text{6-IV} &\iff q \text{ est une forme d'Albert anisotrope} \iff h(q) = 2,\ \deg(q) = 2. \end{aligned}$$

On notera que les classes 6-II et 6-III ne sont pas distinguées par leur suite de déploiement.

7) En dimension 7, la classification devient plus hasardeuse. En première approximation, on a cinq classes :

$$\begin{cases} \text{7-I.} & d \notin D(q),\ \operatorname{ind} c = 8. \\ \text{7-II.} & d \notin D(q),\ \operatorname{ind} c = 4. \\ \text{7-III.} & d \notin D(q),\ \operatorname{ind} c = 2. \\ \text{7-IV.} & d \notin D(q),\ c = 0. \\ \text{7-V.} & q \simeq \gamma \perp \langle d \rangle. \end{cases}$$

Toutefois, on sait que la classe 7-V doit être au moins subdivisée en deux sous-classes : les formes contenant une voisine de Pfister de dimension 5 et celles qui n'en contiennent pas (cf. corollaire 8.2.16). Il est possible que les autres classes doivent également être raffinées.

8.2. Retour au chapitre 5 pour les formes de basse dimension

Dans cette section, nous revenons au problème de l'isotropie d'une forme quadratique q sur le corps des fonction d'une quadrique : nous allons énoncer les résultats connus lorsque $\dim q \leq 8$, et en démontrer quelques uns. On note $d = d_\pm q$, $c = c(q)$ et $E = F(\sqrt{d})$ si $d \neq 1$. D'après le théorème 5.3.4, on peut supposer que q n'est pas voisine d'une forme de Pfister. On cherche les formes q' telles que $q' \preccurlyeq q$: par la proposition 3.2.1, on peut supposer $\dim q' \geq 3$.

***8.2.1. Théorème* (D. Shapiro, D. Leep [198], [147]).** — *Supposons* $\dim q = 4$, $d \neq 1$. *Soit* $q' \notin GP_2(F)$. *Alors* $q' \preccurlyeq q$ *si et seulement si* q' *est semblable à une sous-forme de* q.

Démonstration. — Par la proposition 8.1.10, on a $q_E \in GP_2(E) \setminus \{0\}$. D'après le théorème 5.3.4, q'_E est donc semblable à une sous forme de q_E ; en particulier, $\dim q' \leq 4$.

Si $\dim q' = 4$, q'_E est semblable à q_E ; en particulier, $d_\pm q' \in \{1, d\}$. Le cas $d = 1$ est exclu par hypothèse, donc $d_\pm q' = d$ et $q' \propto q$ d'après la proposition 8.1.10.

Si $\dim q' = 3$, on peut plonger q' dans une (unique) forme q'' de dimension 4 et de discriminant d. Alors $q_E, q''_E \in GP_2(E)$; comme q_E et q''_E ont en commun la voisine q'_E, elles sont semblables et donc $q'' \propto q$ en réappliquant la proposition 8.1.10. En particulier, q' est semblable à une sous-forme de q. □

***8.2.2. Théorème* (Merkurjev, Leep [158], [147]).** — *Supposons que* q *soit une forme d'Albert. Soit* $q' \notin GP_2(F)$. *Alors* $q' \preccurlyeq q$ *si et seulement si* q' *est semblable à une sous-forme de* q.

Démonstration. — Nous suivrons celle de A. Laghribi [**131**]. D'après le corollaire 8.1.6, $q_{F(q')}$ est isotrope si et seulement si $\operatorname{ind}(c_{F(q')}) \leq 2$; d'après le corollaire 7.1.4, ceci entraîne pour commencer $\deg(q') \leq 2$ et

- $\dim q' \leq 6$ si $\deg(q') = 2$;
- $\dim q' \leq 4$ si $\deg(q') = 1$;
- $\dim q' \leq 5$ si $\deg(q') = 0$.

Supposons d'abord $\deg(q') = 2$, et soit $c' = c(q')$. On a $\dim q' = 6$, le cas $\dim q' = 4$ étant exclu par hypothèse. Soient D un corps gauche de classe c et D' un corps gauche de classe c'. Par le théorème de réduction d'indice, $\operatorname{ind}(c_{F(q')}) \leq 2$ si et seulement si D' est isomorphe à un sous-corps de D. Alors $D' \simeq D$, donc $c' = c$ et $q' \propto q$ par le théorème 8.1.13.

Supposons maintenant $\deg(q') = 1$, donc $\dim q' = 4$. Soient $d' = d_\pm q'$, $c' = c(q')$ et $E' = F(\sqrt{d'})$. Soient D un corps gauche de classe c et D' un corps gauche de centre E' tel que $C_0(q') \simeq D'$: alors $c'_{E'} = [D']$. D'après le théorème de réduction d'indice, $\operatorname{ind}(c_{F(q')}) \leq 2$ si et seulement si $M_2(D')$ se plonge, donc est isomorphe à, $D_{E'}$. Il en résulte que $q_{E'}$ est isotrope. On a donc $c(q') + c(q) \in \operatorname{Ker}(B(F) \to B(E'))$. Par la proposition 6.4.13 (i), cela implique

$$c = c' + (a, d)$$

pour $a \in F^*$ convenable. Soit $q'' = q' \perp -a\langle 1, -d\rangle$. Alors q'' est une forme d'Albert de discriminant c ; par le théorème 8.1.13, on a $q'' \propto q$ et q contient donc une sous-forme semblable à q'.

Supposons enfin $\deg(q') = 0$, donc $\dim q' = 3$ ou 5. Alors $\operatorname{ind}(c_{F(q')}) \leq 2$ si et seulement si $D \simeq C_0(q) \otimes D''$. Si $\dim q' = 3$, $C_0(q)$ est une algèbre de quaternions, donc aussi D''. Choisissons q'' de dimension 3 telle que $\dim q'' = \dim q'$ et $C_0(q'') = D''$: alors $q' \perp -q''$ est de dimension 6, de discriminant trivial et d'invariant de Clifford c, donc est semblable à q. Si $\dim q' = 5$, $C_0(q') \simeq D$, d'où $c(q') = c(q)$. Alors $q'' = q' \perp \langle -d_\pm q' \rangle$ est une forme d'Albert anisotrope telle que $c(q') = c(q'')$. Le théorème 8.1.13 entraîne alors $q'' \propto q$, et q contient une sous-forme semblable à q'. □

8.2.3. Corollaire. — *Supposons* $\dim q = 6$*,* $d \neq 1$ *et* q_E *anisotrope. Alors* $q' \preccurlyeq q \Rightarrow \dim q' \leq 6$.

Démonstration. — En effet, q'_E est semblable à une sous-forme de q_E d'après le théorème 8.2.2. □

***8.2.4. Théorème* (Hoffmann [67]).** — *Supposons que* $\dim q = 5$*. Soit* $q' \notin GP_2(F)$*. Alors* $q' \preccurlyeq q$ *si et seulement si* q' *est semblable à une sous-forme de* q*. (Rappelons que dans toute cette sous-section,* q *est supposée ne pas être une voisine.)*

Démonstration. — Nous suivons celle de Hoffmann, avec quelques variantes. Par hypothèse, q n'est pas une voisine de Pfister ; par conséquent, $\gamma = q \perp \langle -d \rangle$ est une forme d'Albert anisotrope. Par le théorème 8.2.2, q' est semblable à une sous-forme de γ.

Supposons d'abord $\dim q' = 3$. On a alors $\gamma \simeq aq' \perp q''$ pour a, q'' convenables. Il existe (un unique) $b \in F^*$ tel que $d_\pm(q \perp bq'') = 1$: on a alors

$$c(q \perp bq'') = c(q) + c(q'') = c(\gamma) + c(q'') = c(q').$$

En particulier, $c(q \perp bq'')_{F(q')} = 0$. Comme $(q \perp bq'')_{F(q')}$ est isotrope, elle est hyperbolique d'après le théorème 8.1.1. Par le corollaire 3.2.5, on a $(q \perp bq'')_{\mathrm{an}} \simeq \sigma \otimes \rho$, où σ est la 2-forme de Pfister associée à q' et $\dim \rho = 1$ ou 2. Mais l'égalité $c(q \perp bq'') = c(\sigma)$ entraîne $\dim \rho = 1$; par conséquent, on a $s\sigma \simeq \varphi \perp \langle r \rangle$ pour $\varphi \leq q$, r et s convenables. Le lemme 5.3.3 montre que φ et q' sont semblables.

Supposons maintenant $\dim q' = 4$. Le cas $d_\pm q' = 1$ se ramène au précédent par le théorème 5.3.4. Supposons $d' = d_\pm q' \neq 1$. On a besoin d'un lemme, dû à Fitzgerald [**55**] :

8.2.5. Lemme. — *Soit* $\tau \in GP_3(F)$*. Alors* $\tau_{F(q')} \sim 0$ *si et seulement si* $\tau \simeq \langle 1, -x \rangle \otimes q'$*, où* $x \in D(\langle 1, -d' \rangle)$*.*

Démonstration. — Notons que, pour $x \in D(\langle 1, -d' \rangle)$, on a $(x, d') = 0$ donc $\tau_x := \langle 1, -x \rangle \otimes q' \in GP_3(F)$. De plus, τ_x devient isotrope, donc hyperbolique sur $F(q')$. Réciproquement, soit $\tau \in GP_3(F)$ telle que $\tau_{F(q')} \sim 0$. Par le théorème 3.2.4, il existe $a \in F^*$ et φ de dimension 4 tels que $\tau \simeq aq' \perp \varphi$. En particulier, φ et q' ont les mêmes invariants donc sont semblables par le corollaire 8.1.11. □

Soit q'' une sous-forme de q' de dimension 3. Alors $q_{F(q'')}$ est isotrope, donc q'' est semblable à une sous-forme de q d'après le cas précédent. Par ailleurs, q' est semblable à une sous-forme de γ par le théorème 8.2.2. On a donc des isométries :

$$\gamma = q \perp \langle -d\rangle \qquad q' \simeq q'' \perp \langle a\rangle$$
$$q \simeq cq'' \perp \varphi \qquad \gamma \simeq bq' \perp \psi$$

avec $a, b, c \in F^*$ et $\dim \varphi = \dim \psi = 2$.

En particulier, on a

$$\gamma \simeq cq'' \perp \varphi \perp \langle -d\rangle \simeq bq'' \perp \langle ab\rangle \perp \psi. \tag{8.2.1}$$

La forme $\langle b, -c\rangle \otimes \gamma$ est dans I^3F et de dimension anisotrope ≤ 6 : par le Hauptsatz (ou le théorème 8.1.1), elle est donc hyperbolique et $b\gamma \simeq c\gamma$. Il en résulte que

$$\gamma \simeq bc\gamma \simeq cq' \perp bc\psi.$$

Quitte à changer ψ en $bc\psi$, on peut donc supposer que $b = c$; quitte à remplacer q par bq, d par bd et γ par $b\gamma$, on peut aussi supposer que $b = 1$. De plus, quitte à multiplier q' par un scalaire, on peut supposer que $a = d'$ et donc que $d_\pm q'' = 1$. Les isométries ci-dessus deviennent alors :

$$\gamma = q \perp \langle -d\rangle \qquad q' \simeq q'' \perp \langle d'\rangle$$
$$q \simeq q'' \perp \varphi \qquad \gamma \simeq q' \perp \psi.$$

L'équation (8.2.1) donne alors $\varphi \perp -\psi \sim \langle d', d\rangle$; on peut donc écrire $\varphi \simeq \langle e, f\rangle$, $\psi \simeq \langle e, g\rangle$ pour e, f, g convenables. Une comparaison de discriminants donne $g = -d'e$. On a alors

$$\langle f, -d\rangle \simeq d'\langle 1, -e\rangle.$$

En prenant les discriminants, on en déduit $df = e$, d'où $\langle de, -d\rangle \simeq \langle d', -d'e\rangle$, soit encore $\langle de, -d'\rangle \simeq \langle d, -d'e\rangle$, ou

$$e \in D(\langle 1, -dd'e\rangle).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\gamma \perp -dd'e\gamma &\simeq q \perp \langle -d\rangle \perp -dd'e(q' \perp \langle e, -d'e\rangle)\\
&\sim q \perp -dd'eq' \perp \langle -dd'\rangle\\
&\simeq q'' \perp \langle e, de\rangle \perp -dd'eq'' \perp \langle -de, -dd'\rangle\\
&\sim \langle 1, -dd'e\rangle \otimes q'' \perp \langle e, -dd'\rangle\\
&\simeq \langle 1, -dd'e\rangle \otimes (q'' \perp \langle e\rangle)\\
&\simeq \langle 1, -dd'e\rangle \otimes (q'' \perp \langle 1\rangle) \in P_3(F).
\end{aligned}$$

Comme $q_{F(q')}$ et $q'_{F(q')}$ sont isotropes, on a

$$\dim_{\mathrm{an}}(\gamma \perp -dd'e\gamma)_{F(q')} \leq 6$$

donc $(\gamma \perp -dd'e\gamma)_{F(q')} \sim 0$. Par le lemme 8.2.5, on a donc

$$\langle 1, -dd'e\rangle \otimes (q'' \perp \langle 1\rangle) \simeq h\langle 1, -x\rangle \otimes q' \simeq h\langle 1, -x\rangle \otimes (q'' \perp \langle d'\rangle)$$

avec $h \in F^*$, $x \in D(\langle 1, -d'\rangle)$. Le membre de droite peut donc aussi s'écrire $h\langle 1, -x\rangle \otimes (q'' \perp \langle 1\rangle) \in GP_3(F)$; ceci montre qu'on peut choisir $h = 1$ (corollaire 2.1.8). On a alors

$$\langle\langle dd'ex\rangle\rangle \otimes (q'' \perp \langle 1\rangle) \sim 0$$

d'où

$$\langle\langle dd'ex, x\rangle\rangle \otimes q' \sim 0$$

ou

$$\langle 1, -x, dd'e\rangle \otimes q' \sim dd'exq'.$$

Il résulte alors de l'équivalence $q \perp -dd'eq' \perp \langle -dd'\rangle \sim \langle 1, -x\rangle \otimes q'$:

$$q \sim \langle dd'\rangle \perp \langle 1, -x, dd'e\rangle \otimes q' \sim \langle dd'\rangle \perp dd'exq'$$

et q' est semblable à une sous-forme de q.

Supposons maintenant $\dim q' = 5$. Par le théorème 8.2.2, q' est semblable à une sous-forme de γ, donc $q' \perp \langle -d'\rangle$ est semblable à γ, où $d' = d_\pm q'$. En particulier, q' n'est pas voisine d'une 3-forme de Pfister. Choisissons une sous-forme $q'' \leq q'$ de dimension 4 : par le cas précédent, q'' est semblable à une sous-forme de q ; quitte à multiplier q par un scalaire, on peut supposer $q'' \leq q$, soit $q \simeq q'' \perp \langle a\rangle$, $q' \simeq q'' \perp \langle b\rangle$. Soit $\varphi = q' \perp -abq \sim \langle 1, -ab\rangle \otimes q''$. Comme $c(q) = c(q') = c(\gamma)$, on a

$$d_\pm\varphi = 1, c(\varphi) = 0$$

donc $\langle 1, -ab\rangle \otimes q'' \in GP_3(F)$. Par ailleurs, $\varphi_{F(q')} \simeq q'_{F(q')} \perp -abq_{F(q')}$ est d'indice ≤ 2 ; il en résulte que $(\langle 1, -ab\rangle \otimes q'')_{F(q')} \sim 0$. Mais alors $\langle 1, -ab\rangle \otimes q'' \sim 0$, sans quoi q' en serait une sous-forme (théorème 3.2.4) et q' serait voisine d'une 3-forme de Pfister. Donc $q' \simeq abq$.

Montrons enfin que $\dim q' \geq 6$ est impossible : il suffit de le faire dans le cas $\dim q' = 6$. Supposons le contraire : par le théorème 8.2.2, q' est semblable à γ. De plus, par le cas précédent, toute sous-forme $q'' \leq q'$ de dimension 5 est semblable à q. Ceci reste vrai sur le corps $K = F(t)$. Mais c'est impossible : soit φ une sous-forme de dimension 4 de q' (définie sur F), et écrivons $q' \simeq q'' \perp \langle a, b\rangle$, avec $a, b \in F^*$. Soit $c = aT^2 + b \in D(\langle a, b\rangle_K)$. Alors $\varphi_K \perp \langle a\rangle$ est semblable à $\varphi_K \perp \langle c\rangle$ si et seulement si $ac\varphi_K \simeq \varphi_K$. Écrivons $\varphi \simeq \psi \perp \langle d\rangle$: ceci implique

$$T^2 + ab \in D(d\varphi_K).$$

Par le théorème 2.4.4, ceci implique $ab \in D(d\psi)$. On a donc $\psi \simeq \tau \perp \langle abd\rangle$, d'où

$$\gamma \simeq \tau \perp \langle abd, d, a, b\rangle.$$

Mais $\langle abd, d, a, b\rangle \in I^2F$: on a donc $\tau \in I^2F$ et $\tau \sim 0$, ce qui contredit l'anisotropie de γ. □

8.2.6. Remarque. — En particulier, si q est une forme de dimension 5 non voisine, de forme d'Albert associée γ, $q_{F(\gamma)}$ est une voisine de Pfister anisotrope. Ce phénomène est parfois dénommé *déploiement anisotrope* (anisotropic splitting, Rehmann).

Mentionnons sans démonstration :

***8.2.7. Théorème* (Laghribi [131], Izhboldin-Karpenko [89])**
Supposons $\dim q = 6$ *et* q_E *anisotrope. Soit* $q' \notin GP_2(F)$*. Alors* $q' \preccurlyeq q$ *si et seulement si* q' *est semblable à une sous-forme de* q*.*

8.2.8. Théorème. — *Supposons* $q = \sigma \perp -\tau$*, avec* $\sigma \in P_2(F)$ *et* $\tau \in GP_1(F)$*.*

a) ***Hoffmann*** **[75] :** *Soit* q' *une forme de dimension* $\neq 4$*. Alors* $q' \preccurlyeq q$ *si et seulement si*
   – *soit* q' *est semblable à une sous-forme de* q *;*
   – *soit il existe* $x \in D(\tau)$ *tel que* q' *soit semblable à une sous-forme de* $\sigma \otimes \langle\langle x \rangle\rangle$*.*
b) ***Izhboldin-Karpenko*** **[87] :** *Soit* q' *une forme de dimension* 4 *et de discriminant* $d' \neq 1$*. Alors la conclusion de a) reste vraie, sauf peut-être dans le cas suivant :* $d \neq d'$*,* $\operatorname{ind}((c(q) + c(q'))_K) = 2$*, où* $K = F(\sqrt{d}, \sqrt{d'})$*.*
c) ***Izhboldin-Karpenko*** **[90] :** *Il existe un couple* $q' \preccurlyeq q$ *comme dans le cas exceptionnel de b) tel que* q' *ne vérifie aucune des deux conditions de a).*

Montrons seulement que, dans a), on a $\varphi := \sigma \otimes \langle\langle x \rangle\rangle \preccurlyeq q$ si $x \in D(\tau)$. En effet, φ est une 3-forme de Pfister, donc elle devient hyperbolique sur $F(\varphi)$. Autrement dit

$$\sigma_{F(\varphi)} \simeq x\sigma_{F(\varphi)}$$

d'où

$$q_{F(\varphi)} = \sigma_{F(\varphi)} \perp -\tau_{F(\varphi)} \simeq x\sigma_{F(\varphi)} \perp -\tau_{F(\varphi)}$$

et $x\sigma \perp -\tau$ est évidemment isotrope.

Pour énoncer le théorème suivant, on a besoin de la notion de *formes conjuguées* :

8.2.9. Proposition. — *Soient* $n \geq 1$ *et* q_1, q_2 *deux formes de dimension* 2^n*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $q_1 \perp -q_2 \in J_{n+1}(F)$.
(ii) $q_1 \perp -q_2 \in GP_{n+1}(F)$.
(iii) $(q_1)_{F(q_1)} \simeq (q_2)_{F(q_1)}$.
(iv) $(q_1)_{F(q_1 \perp -q_2)} \simeq (q_2)_{F(q_1 \perp -q_2)}$.

Si ces conditions sont vérifiées, on a $q_1 \approx q_2$*.*

Démonstration. — (i)⇒(ii) résulte du corollaire 4.3.7 ; (ii)⇒(iv) résulte du corollaire 2.1.8 ; (iv)⇒(iii) résulte du fait que $q_1 \preccurlyeq q_1 \perp -q_2$. Montrons enfin que (iii)⇒(i). Soit $m = \deg(q_1 \perp -q_2) \leq n + 1$. L'inégalité $m < n$ est impossible par le théorème 3.2.4 (i). Si $m = n$, le théorème 4.4.1 (ii) implique que q_1 est semblable à une forme de Pfister ; alors $(q_1)_{F(q_1)} \sim 0$, donc $(q_2)_{F(q_1)} \sim 0$ et q_2 est semblable à q_1 par le théorème 3.2.4 ; alors $q_1 \perp -q_2 \in I^{n+1}F$, contradiction. On a donc $m = n + 1$. Enfin, la dernière assertion résulte trivialement de la condition (iii). □

8.2.10. Définition. — Deux formes q_1 et q_2 de dimension 2^n sont *strictement conjuguées* si elles vérifient les conditions équivalentes de la proposition 8.2.9. Elles sont *conjuguées* s'il existe $a \in F^*$ tel que q_1 et aq_2 soient strictement conjuguées.

8.2.11. Théorème. — *Supposons q de dimension 8 et de discriminant 1. Soit $q' \notin GP_2(F)$.*

a) ***Laghribi*** [**129**]***, Hoffmann*** [**69**] **:** *Si* $\operatorname{ind} c = 2$*, $q' \preccurlyeq q$ si et seulement si q' est contenue dans une forme q'' de dimension 8 telle que $q'' \preccurlyeq q$. Si* $\dim q' = 8$*, on a $q' \preccurlyeq q$ si et seulement si*
   (i) *soit q' est semblable à q ;*
   (ii) *soit q' est semblable à une 3-forme de Pfister dont q contient une voisine.*
b) ***Laghribi*** [**129**] **:** *Si* $\operatorname{ind} c = 4$*, la conclusion de b) est vraie en remplaçant dans (i) « semblable » par « conjuguée », à condition que* $\dim q' \geq 5$.
c) ***Laghribi*** [**130**] **:** *Si* $\operatorname{ind} c = 8$ *et* $\dim q' \geq 5$*, $q' \preccurlyeq q$ si et seulement si q' est contenue dans une conjuguée de q.*
d) ***Izhboldin-Karpenko*** [**89**] **:** *La conclusion de c) reste vraie si* $\dim q' = 4$ *et $q' \notin GP_2(F)$.*
e) ***Izhboldin-Karpenko*** [**88**] **:** *La conclusion de b) reste vraie si* $\dim q' = 4$*, sauf peut-être si q contient une sous-forme $\varphi \in GP_2(F)$ et* $\operatorname{ind}((c(q) + c(q'))_{E'}) = 4$*, où $E' = F(\sqrt{d_{\pm} q'})$.*
f) **Ibid. :** *Il existe des exemples $q' \preccurlyeq q$ dans le cas exceptionnel de e) où la conclusion de b) n'est pas vraie.*

La partie a) de ce théorème sera démontrée plus tard (voir p. 123).

8.2.12. Corollaire. — *Soit q de dimension 8 et de discriminant 1. Supposons que* $\operatorname{ind}(c(q)) = 2$*. Alors toute forme q' conjuguée à q lui est semblable.*

Notons que les formes de a) sont les formes de hauteur 2, de degré 2 et de type II au sens de la section 5.7. Si $\dim q' = 3$ dans b) ou c), Laghribi [**129**], [**130**] donne également une condition nécessaire et suffisante pour que $q' \preccurlyeq q$, mais celle-ci est plus technique et fait intervenir une 3-forme de Pfister auxiliaire. Izhboldin et Karpenko donnent une autre condition nécessaire et suffisante, un peu plus agréable, sans même supposer $d = 1$:

8.2.13. Théorème **(Izhboldin-Karpenko** [**88**]**)**. — *Supposons* $\dim q = 8$*, et soit q' de dimension 3. Notons τ une forme de $GP_2(F)$ contenant q'. Alors $q' \preccurlyeq q$ si et seulement si :*

(i) *soit q' est semblable à une sous-forme d'une 3-forme de Pfister dont q contient une voisine ;*
(ii) *soit il existe une forme q^* de dimension 10 telle que $\tau \leq q^*$ et $sq \equiv q^* \pmod{I^4 F}$ pour $s \in F^*$ convenable.*

On remarquera que, dans (ii), la forme $sq \perp -q'$ est isotrope (cf. commentaire après la conjecture 5.7.6). Montrons seulement que, dans ce cas (ii), on a bien $q' \preccurlyeq q$. On a $\tau_{F(q')} \sim 0$, donc $\dim_{\mathrm{an}} q^*_{F(q')} \leq 6$ et $\dim_{\mathrm{an}}(sq \perp -q^*)_{F(q')} \leq 14$. Le Hauptsatz implique alors que $(sq \perp -q^*)_{F(q')} \sim 0$, d'où $\dim_{\mathrm{an}} sq_{F(q')} \leq 6$.

8.2.14. Remarque. — Soit q une forme anisotrope de dimension 7 telle que $\mathrm{ind}(c(q)) = 2$, et soit $d = d_{\pm}q$. Alors $\tilde{q} = q \perp \langle -d\rangle$ est anisotrope et $q \approx \tilde{q}$: cela résulte du lemme 5.1.4 c), car si $\tilde{q}$ est isotrope, son indice est ≥ 2. Il en résulte que l'isotropie de q sur le corps des fonctions d'une quadrique est la même que celle de $\tilde{q}$.

Mentionnons enfin un théorème d'Izhboldin [**85**] :

8.2.15. Théorème. — *Soient q, q' deux formes quadratiques anisotropes sur F. Supposons que q ne contienne pas de sous-forme de dimension 4 et de discriminant trivial, et que $\dim q \leq 8$. Alors, si $q' \preccurlyeq q$, il existe un homomorphisme d'algèbres $C_0(q') \to C_0(q)$.*

8.2.16. Corollaire. — *Soit q une forme quadratique anisotrope de dimension ≤ 8. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une 3-forme de Pfister q' telle que $q' \preccurlyeq q$.*
(ii) $\dim q > 4$ *et q contient une sous-forme de dimension 4 et de discriminant trivial.*
(iii) *q contient une voisine d'une 3-forme de Pfister.*

Quelles sont les formes quadratiques q de dimension ≤ 8, non voisines de Pfister, qui contiennent une voisine d'une 3-forme de Pfister ? Il n'en existe pas en dimension 5 ; en dimension 6, il faut et il suffit que q soit du type 6-II de la section 8.1.C. Si $\dim q = 8$, $d = 1$, c ne peut pas être d'indice 8 : cela résulte d'un calcul simple d'invariant de Clifford. Si $\mathrm{ind}\, c = 2$, q est de hauteur 2, de degré 2 et de type II, donc est divisible par une forme binaire (corollaire 5.7.10). Il en résulte qu'elle contient une telle voisine (et même un grand nombre d'entre elles). Si $\mathrm{ind}\, c = 4$, q contient une telle voisine si et seulement si on peut écrire $q \simeq \sigma \perp \tau$ où $\sigma, \tau \in GP_2(F)$. Izhboldin et Karpenko ont récemment démontré que ce n'est pas toujours possible [**90**] ; toutefois, une telle forme peut toujours s'écrire $s_*\sigma$, où s_* est le transfert de Scharlau correspondant à une F-algèbre étale E de rang 2 et $\tau \in GP_2(E)$ (*ibid.*).

En dimension 7, q ne peut pas être de type 7-I : en effet, $q \perp \langle -d\rangle$ est alors de discriminant 1 et d'invariant de Clifford d'indice 8. Si q est de type 7-III, q est « équivalente »à $q \perp \langle -d\rangle$ (cf. remarque 8.2.14), donc contient des voisines d'après ce qui précède. Si q est de type 7-II, pour qu'elle contienne une voisine il faut que $q \perp \langle -d\rangle$ soit somme de deux formes de $GP_2(F)$; j'ignore si cette condition est également suffisante. Enfin, si q est de type 7-V, les deux cas peuvent se produire. En fait :

8.2.17. Proposition. — *Soient γ une forme d'Albert et $d \in F^*$ tels que $q = \gamma \perp \langle d \rangle$ soit anisotrope. Alors q contient une voisine de Pfister de dimension 5 si et seulement si $-d$ est produit de trois valeurs de γ.*

Démonstration

Suffisance : écrivons $-d = aa'a''$ avec $a, a', a'' \in D(\gamma)$, et soit $\tilde{q} = \gamma \perp ad\gamma$. Alors :

- $q \leq \tilde{q}$;
- $\tilde{q}$ est isotrope.

La première assertion provient du fait que $d \in D(ad\gamma)$; la deuxième provient de l'hypothèse sur d. Par le théorème 8.1.1 b) et c), $\tilde{q} \sim \tau$ pour un $\tau \in GP_3(F)$. Écrivons $\tilde{q} \simeq q \perp -q'$. Il existe donc φ, ψ, ρ, avec $\dim \psi = 2$, tels que

$$q \simeq \varphi \perp \psi, \qquad q' \simeq \rho \perp \psi, \qquad \tau \simeq \varphi \perp -\rho$$

et φ est une voisine de Pfister de dimension 5 contenue dans q.

Nécessité : soit φ une voisine de Pfister de dimension 5 contenue dans q, et soit $\tau \in GP_3(F)$ tel que $\varphi \leq \tau$. Écrivons $q \simeq \varphi \perp \psi$, $\tau \simeq \varphi \perp -\rho$, et soit $q' = \rho \perp \psi$. Alors $\tilde{q} = q \perp -q'$ est équivalente à τ ; en écrivant

$$\tilde{q} \simeq \gamma \perp \langle d \rangle \perp -q'$$

on a $d_{\pm}(\langle d \rangle \perp -q') = 1$, $c(\langle d \rangle \perp -q') = c(\gamma)$, donc $\langle d \rangle \perp -q' \simeq e\gamma$ pour $e \in F^*$ convenable (théorème de Jacobson). De plus, l'isotropie de $\gamma \perp e\gamma$ implique que $-e$ est produit de deux valeurs de γ. Comme $de \in D(\gamma)$, $-d$ est produit de trois valeurs de γ.

□

8.3. Exercices

8.3.1. — Montrer qu'une forme d'Albert anisotrope ne contient pas de sous-forme de dimension 4 et de discriminant trivial.

8.3.2. — On suppose que $I^3F = 0$. Montrer que deux sous-formes de dimension 5 d'une même forme d'Albert sont semblables.

8.3.3* (d'après [98]). — Soit q une forme d'Albert anisotrope ; notons $K = F(q)$ son corps dominant et τ sa forme dominante.

a) Montrer que $\tau \perp -q_1$ est une 3-forme de Pfister anisotrope. (*Si elle est isotrope, q_1 représente 1 ; considérer $q' = q \perp \langle -1 \rangle$. Si q' est isotrope, tirer une contradiction du théorème 8.2.4. Si q' est anisotrope, de corps des fonctions E, alors q_E est nécessairement isotrope ; tirer une contradiction cette fois-ci du théorème 8.2.2.*)

b) Montrer que $\tau \perp -q_1 \notin \operatorname{Im}\left(I^3F/I^4F \to I^3K/I^4K\right)$. (*Soit si possible $\bar{\psi} \in I^3F/I^4F$ telle que $\bar{\psi}_K \equiv \tau \perp -q_1 \pmod{I^4K}$. Écrire $\bar{\psi} = \bar{\sigma}_1 + \cdots + \bar{\sigma}_n$, où $\sigma_i \in P_3(F)$. Raisonner par récurrence sur n : en passant au corps des fonctions de σ_n, tirer une contradiction à l'aide du théorème 7.1.1 et du corollaire 3.3.2.*)

c) En déduire que $\tau \notin \mathrm{Im}(W(F)/I^4F \to W(K)/I^4K)$. (*De manière équivalente,* $\tau \perp q_1 \notin \mathrm{Im}(W(F)/I^4F \to W(K)/I^4K)$ *; se ramener à b) en utilisant la proposition 6.4.13.*)

CHAPITRE 9

INVARIANTS SUPÉRIEURS

9.1. Invariants élémentaires et cohomologie galoisienne

Pour tout $n \geq 0$, on note $H^n F$ le groupe de cohomologie galoisienne $H^n(F, \mathbb{Z}/2)$. Vu le théorème B.6.1 (voir la remarque le suivant), les invariants $\overline{\dim}$, $d_\pm$ et c du chapitre précédent peuvent se réinterpréter comme des invariants

$$e^n : W(F) \longrightarrow H^n F$$

pour $n = 0, 1, 2$. Le but de ce chapitre est de discuter l'existence d'invariants e^n, généralisant les précédents, pour $n \geq 3$. Commençons par quelques propriétés de e^n pour $n \leq 2$:

9.1.1. Théorème. — *Pour $n \leq 2$, l'invariant e^n induit un isomorphisme*

$$\bar{e}^n : I^n F / I^{n+1} F \xrightarrow{\sim} H^n F$$

tel que

$$\bar{e}^{p+q}(xy) = \bar{e}^p(x) \cdot \bar{e}^q(y)$$

pour $p + q \leq 2$ et $(x, y) \in I^p F / I^{p+1} F \times I^q F / I^{q+1} F$.

Démonstration. — La première assertion n'est autre qu'une reformulation des théorèmes 6.1.3 et 6.4.11. Il suffit de vérifier la deuxième pour $p = q = 1$; dans ce cas, elle résulte des propositions 6.4.8 a) et B.6.2. □

9.2. K-théorie de Milnor

La *K-théorie de Milnor* de F est l'anneau gradué $K_*^M(F)$ défini par générateurs et relations de la manière suivante :

- Générateurs : $\{a\}$, $a \in F^*$.
- Relations : $\{ab\} = \{a\} + \{b\}$ $(a, b \in F^*)$, $\{a\} \cdot \{1 - a\} = 0$ $(a \in F^* - \{1\})$.

En d'autres termes, $K_*^M(F)$ est le quotient de l'algèbre tensorielle du $\mathbb{Z}$-module F^* par l'idéal bilatère engendré par les $a \otimes (1-a)$ pour $a \neq 1$. On a $K_0(F) = \mathbb{Z}$, $K_1(F) = F^*$. Pour $a_1, \dots, a_n \in F^*$, le produit $\{a_1\} \cdot \dots \cdot \{a_n\} \in K_n^M(F)$ est noté $\{a_1, \dots, a_n\}$. Pour $a \neq 1$, les relations

$$\{a, 1-a\} = 0$$
$$\{a^{-1}, 1-a^{-1}\} = 0$$

et la bilinéarité entraînent

$$\{a, -a\} = 0$$

d'où, encore par bilinéarité

$$\{a, b\} = -\{b, a\} \quad \text{pour } a, b \in F^*.$$

L'anneau gradué $K_*^M(F)$ est donc *commutatif.*

Les groupes $K_n^M(F)$ ont été introduits dans [**162**] par Milnor, qui était motivé par le fait que $K_2^M(F) = K_2(F)$ (théorème de Matsumoto). Il est clair que, si K/F est une extension, on a un homomorphisme naturel d'anneaux gradués

$$\mathrm{Res}_{K/F} : K_*^M(F) \longrightarrow K_*^M(K).$$

Nous aurons besoin également du fait suivant, analogue à la situation en cohomologie (cf. section C.2) :

***9.2.1. Proposition* (Bass-Tate [29, §5], Kato [117, §1.7])**

Soit E/F une extension finie. Il existe un homomorphisme de groupes abéliens gradués

$$N_{E/F} : K_*^M(E) \longrightarrow K_*^M(F)$$

qui s'identifie à la norme sur K_1 et vérifiant, pour tout $(x, y) \in K_*^M(E) \times K_*^M(F)$, la formule de projection

$$N(x \cdot \mathrm{Res}\, y) = N(x) \cdot y.$$

En particulier, $N \circ \mathrm{Res} = [E : F]$. Si $E/K/F$ est une chaîne d'extensions, on a

$$N_{E/F} = N_{K/F} \circ N_{K/E}.$$

9.3. Le triangle incomplet de Milnor

9.3.1. Proposition. — *Il existe, pour tout $n \geq 0$, un triangle incomplet d'homomorphismes*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & I^nF/I^{n+1}F \\ K_n^M(F)/2 \arrow[ur, "a^n"] \arrow[dr, "b^n"'] & \\ & H^nF \end{tikzcd}$$

où

$$a^n(\{a_1,\dots,a_n\}) = \langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$$
$$b^n(\{a_1,\dots,a_n\}) = (a_1)\cdot\dots\cdot(a_n) =: (a_1,\dots,a_n).$$

L'homomorphisme a^n est surjectif.

Démonstration. — Pour voir que a^n et b^n sont bien définis, il suffit de vérifier que

1. Les applications $(a_1,\dots,a_n)\mapsto\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$ et $(a_1,\dots,a_n)\mapsto(a_1)\cdot\dots\cdot(a_n)$ sont multilinéaires.
2. $2I^nF/I^{n+1}F = 0$ et $2H^nF = 0$.
3. On a $\langle\langle a, 1-a\rangle\rangle \sim 0$ et $(a)\cdot(1-a) = 0$.

L'assertion (1) résulte de la remarque 2.1.3 pour les formes quadratiques et est triviale pour la cohomologie. L'assertion (2) résulte du fait que $2 = \langle 1,1\rangle \in IF$ pour les formes quadratiques, et est triviale pour la cohomologie. Enfin, l'assertion (3) résulte du fait que la forme $\langle 1,-a,a-1\rangle$ représente zéro dans le cas des formes quadratiques ; pour la cohomologie elle résulte du lemme A.3.5 et de la proposition B.6.2. Enfin, la surjectivité de b^n résulte du fait que $I^nF/I^{n+1}F$ est engendré par les classes de n-formes de Pfister. □

***9.3.2. Proposition* (Milnor [162]).** — *Il existe une application*

$$w : \hat{W}(F) \to K_*^M(F)/2$$

(définition 1.3.4) ayant les propriétés suivantes :

(i) *Pour $q, q' \in \hat{W}(F)$, $w(q \perp q') = w(q)w(q')$.*
(ii) $w(\langle a\rangle) = 1 + \{a\}$.

De plus,

$$w((\langle 1\rangle - \langle a_1\rangle)\otimes\dots\otimes(\langle 1\rangle - \langle a_n\rangle)) = 1 + \{-1\}^{2^{n-1}-n}\{a_1,\dots,a_n\}.$$

Pour $q \in \hat{W}(F)$, on a $w(q) = \sum_{n\geq 0} w_n(q)$, avec $w_n(q) \in K_n^M(F)/2$; les classes $w_n(q)$ sont appelées *classes de Stiefel-Whitney-Delzant-Milnor* de q.

Démonstration. — Pour démontrer l'existence de w, il suffit d'après la proposition 1.3.5 de vérifier que

$$w(\langle a,b\rangle) = w(\langle a+b, ab(a+b)\rangle)$$

pour $a,b\in F^*$ avec $a+b\neq 0$. On a

$$w(\langle a,b\rangle) = (1+\{a\})(1+\{b\}) = 1+\{ab\}+\{a,b\};$$
$$w(\langle a+b, ab(a+b)\rangle) = (1+\{a+b\})(1+\{ab(a+b)\}) = 1+\{ab\}+\{a+b, ab(a+b)\}.$$

Mais

$$\{a+b, ab(a+b)\} = \{a+b,-ab\} = \{a,-ab\}+\{1+b/a,-ab\}$$
$$= \{a,b\}+\{1+b/a,-b/a\} = \{a,b\}.$$

Posons $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle\tilde{} = (\langle 1\rangle - \langle a_1\rangle) \otimes \cdots \otimes (\langle 1\rangle - \langle a_n\rangle)$. Pour démontrer la formule donnant $w(\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle\tilde{})$, on raisonne par récurrence sur n. On a

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle\tilde{} = \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle\tilde{} - a_n\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle\tilde{}$$

d'où

$$w(\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle\tilde{}) = w(\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle\tilde{})w(a_n\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle\tilde{})^{-1}.$$

On vérifie facilement que, pour tout $q \in \hat{W}(F)$ de dimension n et tout $a \in F^*$, on a

$$w(aq) = \sum_{i\geq 0}(1 + \{a\})^{n-i}w_i(q).$$

Posons $X_n = \{-1\}^{2^{n-1}-n}\{a_1, \dots, a_n\}$. On en déduit :

$$w(a_n\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle\tilde{}) = 1 + (1 + \{a_n\})^{-2^{n-2}}X_{n-1}$$

d'où

$$\begin{aligned} w(\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle\tilde{}) &= (1 + X_{n-1})(1 + (1 + \{a_n\})^{-2^{n-2}}X_{n-1})^{-1} \\ &= (1 + X_{n-1})(1 + \{a_n\})^{2^{n-2}}((1 + \{a_n\})^{2^{n-2}} + X_{n-1})^{-1} \\ &= (1 + X_{n-1} + \{a_n\}^{2^{n-2}} + X_{n-1}\{a_n\}^{2^{n-2}})(1 + \{a_n\}^{2^{n-2}} + X_{n-1})^{-1}. \end{aligned}$$

En remarquant que $\{a_n\}^{2^{n-2}} = \{-1\}^{2^{n-2}-1}\{a_n\}$, on obtient

$$X_{n-1}\{a_n\}^{2^{n-2}} = X_n$$

d'où

$$w(\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle\tilde{}) = 1 + X_n(1 + \{a_n\}^{2^{n-2}} + X_{n-1})^{-1}.$$

Mais, en posant $\{a_n\}^{2^{n-2}} = A$, $X_{n-1} = B$, on a

$$X_n(\{a_n\}^{2^{n-2}} + X_{n-1}) = A^2B + AB^2 = \{-1\}^{2^{n-2}}AB + \{-1\}^{2^{n-2}}AB = 0$$

d'où le lemme 9.3.2. □

***9.3.3. Corollaire* (cf. proposition 2.1.4).** — *Pour tout $n \geq 1$, il existe un homomorphisme*

$$\varepsilon^n : I^nF/I^{n+1}F \longrightarrow K^M_{2^{n-1}}F/2$$

tel que

$$\varepsilon(\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle) = \{-1\}^{2^{n-1}-n}\{a_1, \dots, a_n\}$$

pour toute n-forme de Pfister $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$. Pour $n \leq 2$, on a $b^n \circ \varepsilon^n = \bar{e}^n$.

9.3.4. Théorème. — *Supposons $n \leq 2$. Alors le triangle*

$$\begin{tikzcd} & I^nF/I^{n+1}F \arrow[d, "\bar{e}^n"] \\ K_n^M(F)/2 \arrow[ur, "a^n"] \arrow[r, "b^n"'] & H^nF \end{tikzcd}$$

est commutatif, et ses trois côtés sont des isomorphismes.

Démonstration. — La commutativité résulte immédiatement de la définition de $\bar{e}^n$ et du théorème 9.1.1. Comme e^n est bijectif et a^n surjectif, b^n est surjectif et $\operatorname{Ker} a^n = \operatorname{Ker} b^n$. Il suffit donc de démontrer que a^n est injectif. Mais le corollaire 9.3.3 montre que a^n a un inverse. □

9.4. Invariants cohomologiques supérieurs

Dans [**162**], Milnor conjecture que les homomorphismes a^n et b^n de la proposition 9.3.1 sont bijectifs[(1)] . Il en résulterait l'existence, pour tout $n \geq 3$, d'homomorphismes

$$\bar{e}^n : I^nF/I^{n+1}F \longrightarrow H^nF \tag{9.4.1}$$

faisant commuter le triangle du théorème 9.3.4 ; de plus, $\bar{e}^n$ serait alors bijectif.

Le corollaire 9.3.3 implique que $\bar{e}^n$ existe « stablement ». En général, si $\bar{e}^n$ existe, il doit vérifier

$$\bar{e}^n(\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle) = (a_1, \dots, a_n)$$

pour toute n-forme de Pfister $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$. En particulier, le symbole cohomologique $(a_1, \dots, a_n)$ ne doit dépendre que de la forme $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$. On a un peu mieux :

9.4.1. Proposition **(Elman-Lam** [**49**, prop. 2.1]**, Arason** [**9**, Satz 1.6 et rem. p. 455]**)**

Le symbole modulo 2 $\{a_1, \dots, a_n\}$ ne dépend que de la n-forme de Pfister $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$.

Démonstration. — On a besoin du

9.4.2. Lemme. — *Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in F^*$. Supposons que l'on ait*

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \simeq \langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle.$$

Alors il existe $c \in F^*$ tel que

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \simeq \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, c\rangle\rangle \simeq \langle\langle b_1, \dots, b_{n-1}, c\rangle\rangle \simeq \langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle.$$

(1) Milnor fait preuve de prudence et ne formule pas ces conjectures explicitement. Cf. [**162**, Question 4.3 et commentaire après remarque p. 340].

Démonstration (Arason). — Soient $\sigma = \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle$, $\tau \simeq \langle\langle b_1, \dots, b_{n-1}\rangle\rangle$ et σ', τ' les formes pures de σ et τ. On a $\sigma' \perp a_n\sigma \simeq \tau' \perp b_n\tau$, d'où

$$\sigma' \perp -\tau' \sim b_n\tau \perp -a_n\sigma.$$

En comptant les dimensions, on voit que $b_n\tau \perp -a_n\sigma$ est isotrope. Soit $c \in D(b_n\tau) \cap D(a_n\sigma)$. Alors $\sigma \otimes \langle 1, -a_n\rangle \simeq \sigma \otimes \langle 1, -c\rangle$ et $\tau \otimes \langle 1, -b_n\rangle \simeq \tau \otimes \langle 1, -c\rangle$. □

Montrons maintenant la proposition 9.4.1. Il faut voir que

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \simeq \langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle \Rightarrow \{a_1, \dots, a_n\} = \{b_1, \dots, b_n\}.$$

On raisonne par récurrence sur n. Le lemme 9.4.2 montre qu'on peut « passer »de $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ à $\langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$ en changeant un terme à la fois. On peut donc supposer que $a_i = b_i$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$. On a alors

$$\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_nb_n\rangle\rangle \sim 0$$

d'où $a_nb_n \in D(\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle)$.

Posons $\varphi = \langle\langle a_1, \dots, a_{n-2}\rangle\rangle$: alors $a_nb_n = x - a_{n-1}y$, avec $x, y \in D(\varphi) \cup \{0\}$. Si $y = 0$, on a $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-2}, a_nb_n\rangle\rangle \sim 0$, d'où $\{a_1, \dots, a_{n-2}, a_nb_n\} = 0$ par récurrence et donc $\{a_1, \dots, a_{n-1}, a_nb_n\} = 0$. Si $x = 0$, on a

$$\langle\langle a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}a_nb_n\rangle\rangle \sim 0,$$

d'où $\{a_1, \dots, a_{n-2}, -a_{n-1}a_nb_n\} = 0$, soit

$$\{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}\} = \{a_1, \dots, a_{n-2}, -a_nb_n\}$$

d'où

$$\{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_nb_n\} = \{a_1, \dots, a_{n-2}, a_nb_n, -a_nb_n\} = 0.$$

Supposons enfin $x, y \neq 0$. Alors on peut écrire

$$a_nb_n = x(1 - a_{n-1}z)$$

avec $z \in D(\varphi)$. Il en résulte

$$\begin{aligned}\{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_nb_n\} &= \{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, x(1 - a_{n-1}z)\}\\ &= \{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, x\} + \{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, 1 - a_{n-1}z\}\\ &= \{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, x\} + \{a_1, \dots, a_{n-2}, z, 1 - a_{n-1}z\}\end{aligned}$$

en utilisant la relation de Steinberg. Comme on l'a vu ci-dessus,

$$\{a_1, \dots, a_{n-2}, x\} = \{a_1, \dots, a_{n-2}, z\} = 0$$

et donc de nouveau $\{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_nb_n\} = 0$. Il en résulte que

$$\{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\} = \{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, b_n\},$$

ce qu'on voulait. □

9.4.3. Définition. — Pour $\varphi \simeq a\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle \in GP_n(F)$, on note

$$\tilde{e}^n(\varphi) = \{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(F)/2$$

cet élément ne dépend que de φ d'après la proposition 9.4.1 et le corollaire 2.1.9. On note $e^n(\varphi) = b^n(\tilde{e}^n(\varphi)) \in H^nF$.

Si e^n se prolonge en un homomorphisme $e^n : I^nF \to H^nF$, on dit que e^n *existe.*

9.4.4. Lemme. — *Si e^n existe, il induit un homomorphisme*

$$\bar{e}^n : I^nF/I^{n+1}F \longrightarrow H^nF.$$

Démonstration. — En effet, si $a_1, \ldots, a_{n+1} \in F^*$, on a

$$\langle\langle a_1, \ldots, a_{n+1}\rangle\rangle \simeq \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle \perp -a_{n+1}\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$$

d'où $e^n(\langle\langle a_1, \ldots, a_{n+1}\rangle\rangle) = 0$. □

***9.4.5. Proposition* (Arason [9, Satz 1.8])**. — *Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in GP_n(F)$ tels que $\varphi_1 \perp \varphi_2 \equiv \varphi_3 \pmod{I^{n+1}F}$. Alors $\tilde{e}^n(\varphi_1) + \tilde{e}^n(\varphi_2) = \tilde{e}^n(\varphi_3)$.*

Démonstration. — Cela résulte facilement du corollaire 3.3.3. □

Comme $\tilde{e}^n : P_n(F) \to K_n^M(F)/2$ est une section partielle de a^n, cette application est injective. En ce qui concerne l'injectivité de e^n, on a :

9.4.6. Proposition. — *Soit $n \geq 0$. Supposons que $e^n : P_n(F) \to H^nF$ soit injectif et que, pour toute extension K/F et toute n-forme de Pfister φ sur K, on ait*

$$\operatorname{Ker}(H^nK \longrightarrow H^nK(\varphi)) = \langle e^n(\varphi)\rangle.$$

Alors l'invariant $\bar{e}^n$ de (9.4.1) existe.

Démonstration. — Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in P_n(F)$ des formes de Pfister distinctes telles que $\varphi_1 \perp \cdots \perp \varphi_k \equiv 0 \pmod{I^{n+1}F}$. Il faut montrer que $e^n(\varphi_1) + \cdots + e^n(\varphi_k) = 0$. On procède par récurrence sur k, le cas $k = 0$ étant trivial. Supposons l'énoncé démontré pour $k-1$ facteurs. Soit $L = K(\varphi_k)$. Comme $(\varphi_k)_L \sim 0$, on a par récurrence

$$(e^n(\varphi_1) + \cdots + e^n(\varphi_{k-1}))_L = (e^n(\varphi_1) + \cdots + e^n(\varphi_k))_L = 0.$$

Par hypothèse, $e^n(\varphi_1)+\cdots+e^n(\varphi_k) = ae^n(\varphi_k)$ pour $a \in \{0, 1\}$. En faisant le même raisonnement avec φ_{k-1}, on obtient de même $e^n(\varphi_1)+\cdots+e^n(\varphi_k) = be^n(\varphi_{k-1})$ pour $b \in \{0, 1\}$. Si $a = 0$ ou $b = 0$, la démonstration est terminée. Sinon, on a

$$e^n(\varphi_k) = e^n(\varphi_{k-1})$$

ce qui, par hypothèse, implique que $\varphi_{k-1} \simeq \varphi_k$, contradiction. □

On a aussi la variante suivante de la proposition 9.4.6 :

9.4.7. Proposition. — *Soit $n \geq 0$. Supposons que, pour toute extension K/F et toute forme φ sur K de dimension $> 2^n$, l'homomorphisme $H^nK \to H^nK(\varphi)$ soit injectif. Alors l'invariant $\bar{e}^n$ de (9.4.1) existe.*

Démonstration. — On raisonne comme dans celle de la proposition précédente, mais cette fois-ci en montant dans la tour de déploiement générique de $\varphi_{k-1} \perp \varphi_k$. □

9.4.8. Proposition. — *Supposons b^{n-1} bijectif pour toute extension de F. Alors $e^n : P_n(F) \to H^n F$ est injectif.*

Démonstration. — Il suffit de voir que b^n est injectif sur les symboles.

1) Montrons d'abord que $(b^n)^{-1}(0) = 0$. Soient $a_1, \dots, a_n \in F^*$ tels que $(a_1, \dots, a_n) = 0 \in H^n F$. Soit $E = F(\sqrt{a_n})$. Par le théorème B.7.1, il existe $x \in H^n E$ tel que $(a_1, \dots, a_{n-1}) = \mathrm{Cor}_{E/F}\, x$. Par hypothèse, il existe $\tilde{x} \in K^M_{n-1}(E)/2$ tel que $b^{n-1}(\tilde{x}) = x$. Alors $\{a_1, \dots, a_{n-1}\} - \mathrm{Cor}_{E/F}\, x \in \mathrm{Ker}\, b^{n-1} = 0$, donc

$$\{a_1, \dots, a_n\} = \mathrm{Cor}\, x \cdot \{a_n\} = \mathrm{Cor}(x \cdot \mathrm{Res}\{a_n\}) = 0$$

par la proposition 9.2.1.

2) En général, soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in F^*$ tels que $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$. On peut supposer ces deux symboles $\neq 0$. Soit K le corps de fonctions $F(\langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle)$. D'après l'existence de e^n sur les formes de Pfister, on a $(a_1, \dots, a_n)_K = 0$, donc, d'après 1), $\{a_1, \dots, a_n\}_K = 0$ et donc $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle_K \sim 0$; par le Hauptsatz, on a $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \simeq e\langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$ pour un $e \in \{0, 1\}$. En appliquant $\tilde{e}^n$, on obtient $\{a_1, \dots, a_n\} = e\{b_1, \dots, b_n\}$. En appliquant b^n, on voit que $e = 1$. □

9.4.9. Proposition. — *Supposons que b^n soit bijectif et que e^n existe. Alors a^n, b^n et e^n sont bijectifs.*

Démonstration. — Cela résulte d'une chasse aux diagrammes évidente, puisque a^n est surjectif. □

9.5. Le noyau de $H^n F \to H^n F(q)$

9.5.1. Lemme. — *Soient q, q' deux formes quadratiques telles que $q \preccurlyeq q'$. Alors, pour tout $n \geq 0$, $\mathrm{Ker}(H^n F \to H^n F(q')) \subset \mathrm{Ker}(H^n F \to H^n F(q))$.*

Démonstration. — Soit $K = F(q, q')$: alors $K/F(q)$ est transcendante pure. En utilisant le lemme C.2.3, on a donc

$$\mathrm{Ker}(H^n F \longrightarrow H^n F(q')) \subset \mathrm{Ker}(H^n F \longrightarrow H^n K) = \mathrm{Ker}(H^n F \longrightarrow H^n F(q)).$$

□

On appelle *symbole* un élément de $K^M_n(F)$ de la forme $\{a_1, \dots, a_n\}$, et aussi un élément de $H^n F$ de la forme $b^n(x)$, où x est un symbole. On dit qu'un sous-groupe A de $K^M_n(F)$ (ou de $H^n F$) est *engendré par ses symboles* si le plus petit sous-groupe de A contenant tous les symboles contenus dans A est égal à A. La question principale concernant $\mathrm{Ker}(H^n F \to H^n F(q))$ est la suivante :

9.5.2. Question. — Est-il vrai que, pour tout $n \geq 0$ et toute forme quadratique q, $\operatorname{Ker}(H^nF \to H^nF(q))$ est engendré par ses symboles ?

La réponse est positive pour $n = 1$: si $\dim q = 2$, c'est évident et si $\dim q > 2$ cela résulte du lemme 6.1.7 et du théorème B.6.1. Pour $n = 2$, cela résulte de même de la proposition 6.4.13 et du théorème B.6.1. Pour $n = 3$, la réponse est également positive : si $\dim q > 2$, c'est dû à Arason [**9**] (voir ci-dessous), et si $\dim q = 2$ c'est une conséquence immédiate des théorèmes 9.1.1 et B.7.1. Pour $n = 4$, la réponse est encore positive : si $\dim q > 4$ c'est dû à Jacob-Rost [**92**], Szyjewski [**205**] et Kahn-Rost-Sujatha [**104**] ; si $\dim q = 3, 4$ c'est dû à Merkurjev [**160**], Kahn-Sujatha [**106**] et Vishik [**211**] ; enfin, si $\dim q = 2$, cela résulte du théorème B.7.1 et de la surjectivité de b^3 (voir plus loin). On ne connaît aucun contre-exemple à la question 9.5.2 à l'heure actuelle.

9.5.3. Remarque. — Cette question est tout à fait analogue à celle étudiée aux §§3.2 et 4.4, qui concerne $\operatorname{Ker}(W(F) \to W(K))$. Ici aussi, il est conjecturé que si K est le corps des fonctions d'une quadrique, ce noyau est engendré par des formes de Pfister. Les deux questions sont évidemment reliées par la conjecture de Milnor (maintenant démontrée par Orlov-Vishik-Voevodsky).

9.5.4. Lemme. — *Soient $n \geq 2$, q une forme quadratique de dimension $\geq 2^{n-2}+1$ et $\varphi, \psi \in \operatorname{Ker}(W(F) \to W(F(q)))$ deux n-formes de Pfister. Alors φ et ψ sont liées, donc $\varphi \perp -\psi$ est équivalente à une troisième n-forme de Pfister (à similitude près).*

Démonstration (cf. [**55**, dém. du th. 2.1]*).* — Par le corollaire 2.1.8 et le théorème 3.2.4, il existe des scalaires a, b tels que $q \leq a\varphi$ et $q \leq b\psi$. Par suite, $i(a\varphi \perp -b\psi) \geq \dim q > 2^{n-2}$. La conclusion résulte maintenant du théorème 2.3.2. □

9.5.5. Lemme. — *Supposons que $e^n : P_n(K) \to H^nK$ soit injectif pour toute extension K/F. Alors, pour $a_1, \dots, a_n \in F^*$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(a_1, \dots, a_n) \in \operatorname{Ker}(H^nF \to H^nF(q))$.
(ii) $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \in \operatorname{Ker}(W(F) \to W(F(q)))$.
(iii) *q est semblable à une sous-forme de $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$.*

Démonstration. — Cela résulte du corollaire 2.1.8 et du théorème 3.2.4. □

9.5.6. Proposition. — *Supposons que $e^n : P_n(K) \to H^nK$ soit injectif pour toute extension K/F. Alors, pour $\dim q \geq 2^{n-2}+1$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\operatorname{Ker}(H^nF \to H^nF(q))$ *est engendré par ses symboles.*
(ii) $\operatorname{Ker}(H^nF \to H^nF(q))$ *est formé de symboles.*

Démonstration. — Cela résulte des lemmes 9.5.4 et 9.5.5. □

9.5.7. Proposition. — *Supposons que $e^n : P_n(K) \to H^n K$ soit injectif pour toute extension K/F. Soit q une forme quadratique de dimension $2^{n-2}+1$. Supposons que* $\operatorname{Ker}(H^nF \to H^nF(q))$ *soit formé de symboles. Soit $q' \geq q$. Alors :*
- $\operatorname{Ker}(H^nF \to H^nF(q'))$ *est formé de symboles.*
- $|\operatorname{Ker}(H^nF \to H^nF(q'))| = 2$ *si* $\dim q' > 2^{n-1}$ *et q' est voisine d'une n-forme de Pfister.*
- $\operatorname{Ker}(H^nF \to H^nF(q')) = 0$ *si* $\dim q' > 2^{n-1}$ *et q' n'est pas voisine d'une n-forme de Pfister (par exemple si* $\dim q' > 2^n$*).*

Démonstration. — Cela résulte des lemmes 9.5.1 et 9.5.5. □

9.6. Le théorème d'Arason

***9.6.1. Théorème* (Arason [9, Satz 5.4])**. — *Soit q une forme quadratique de dimension* 3. *Alors* $\operatorname{Ker}(H^3F \to H^3F(q))$ *est formé de symboles.*

Notons tout de suite les corollaires suivants au théorème 9.6.1 :

9.6.2. Corollaire. — *La question 9.5.2 a une réponse positive pour $n = 3$. Pour toute forme quadratique q de dimension ≥ 3,* $\operatorname{Ker}(H^3F \to H^3F(q))$ *est formé de symboles. On a* $|\operatorname{Ker}(H^3F \to H^3F(q'))| = 2$ *si* $\dim q' > 4$ *et q' est voisine d'une* 3*-forme de Pfister, et* $\operatorname{Ker}(H^3F \to H^3F(q')) = 0$ *si* $\dim q' > 4$ *et q' n'est pas voisine d'une* 3*-forme de Pfister (par exemple si* $\dim q' > 8$*).*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 9.5.7 pour $n \geq 3$ et des théorèmes 6.4.11, B.6.1 et B.7.1 pour $n = 2$. □

***9.6.3. Corollaire* (Arason [9, Satz 5.7])**. — e^3 *existe.*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 9.4.7. □

9.6.4. Remarque. — On va démontrer le théorème 9.6.1 à l'aide du théorème 9.3.4. En fait, sa démonstration (ainsi que celle des corollaires 9.6.2 et 9.6.3) est antérieure au théorème 9.3.4. Dans [9], Arason n'utilise pas la surjectivité de b^2 pour montrer le théorème 9.6.1, ni l'injectivité de e^3 sur $P_3(F)$ pour déduire le corollaire 9.6.2 du théorème 9.6.1. L'utilisation de ces résultats simplifie l'exposition.

Démonstration du théorème 9.6.1. — On peut supposer $q = \langle 1, -a, -b\rangle$. Posons $K = F(q)$. Considérons le complexe

$$F^* \xrightarrow{\varphi} H^3F \longrightarrow H^3K.$$

où φ est b^1 suivi du cup-produit par (a, b). On doit montrer que cette suite est exacte. La stratégie est de construire une rétraction (mal définie) de φ. Cela se fait en trois étapes :

1) À tout élément $\alpha \in \operatorname{Ker}(H^3F \to H^3K)$, on associe un élément $c \in F^*$. Cela se fait au moyen d'une chasse aux diagrammes.
2) On montre que, si $\alpha = (a, b, c)$, l'élément obtenu est c. Cela se fait en détaillant la chasse aux diagrammes appliquée à cet élément particulier.
3) Il reste à montrer que, si $\alpha_K = 0$, alors $\alpha \in \operatorname{Im} \varphi$.

Notons X la conique (quadrique de dimension 1) définie par q. Posons $E = F(\sqrt{a})$, et soit $L = EK$: l'extension L/E est transcendante pure. Soit $\alpha \in \operatorname{Ker}(H^3F \to H^3F(q))$. Par le lemme C.2.3, on a $\alpha \in \operatorname{Ker}(H^3F \to H^3E)$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & K_2^M(L) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "1-\sigma"'] & \bigoplus_{x \in X_E} E(x)^* \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "1-\sigma"'] & E^* \arrow[d, "1-\sigma"'] \\
K_2^M(E) \arrow[r] \arrow[d, "N"'] & K_2^M(L) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "N"'] & \bigoplus_{x \in X_E} E(x)^* \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "N"'] & E^* \\
K_2^M(F) \arrow[r] \arrow[d, "(\cdot(a))\circ b^2"'] & K_2^M(K) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "(\cdot(a))\circ b^2"'] & \bigoplus_{x \in X} F(x)^* & \\
H^3F \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Res}"'] & H^3K & & \\
H^3E & & &
\end{tikzcd}$$

où σ est le générateur de $Gal(E/F)$. Ce diagramme est commutatif grâce aux théorèmes C.3.1, C.3.2 et C.3.3. Les lignes sont des complexes par les propositions C.6.1 et C.6.3, les deux premières étant exactes, puisque X_E est isotrope, donc isomorphe à $\mathbf{P}^1_E$ (suite (C.2.1)). Les colonnes sont également des complexes ; la colonne de gauche est exacte grâce au théorème B.7.1 et à la surjectivité de b^2 ; il en est de même pour la deuxième colonne à partir de la gauche, sauf peut-être en $K_2^M(L)$[(2)].

Par une chasse aux diagrammes, on associe à α un élément $c \in F^*$. Détaillons cette chasse aux diagrammes. Soit $\beta \in K_2^M(F)$ tel que $\alpha = (a) \cdot b^2(\beta)$. Comme $\alpha_K = 0$, on a $\beta_K = N(\gamma)$ pour $\gamma \in K_2^M(L)$ convenable. On a $N(\partial\gamma) = \partial N(\gamma) = \partial\beta_K = 0$, donc $\partial\gamma = (1-\sigma)\delta$ pour $\delta \in \bigoplus_{x \in X_E} E(x)^*$ convenable. On a ${}^{(1-\sigma)}\nu(\delta) = \nu(\partial\gamma) = 0$, donc $c = \nu(\delta) \in F^*$: c'est l'élément cherché.

[(2)] En fait, on a également exactitude en $K_2^M(L)$ (théorème 90 de Hilbert pour K_2), mais nous n'en aurons pas besoin.

Écrivons le même diagramme en diminuant tous les degrés de 1. Il vient :

$$\begin{tikzcd}
 & L^* \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "1-\sigma"'] & \mathrm{Div}(X_E) \arrow[r, "\deg"] \arrow[d, "1-\sigma"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "1-\sigma"'] \\
E^* \arrow[r] \arrow[d, "N"'] & L^* \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "N"'] & \mathrm{Div}(X_E) \arrow[r, "\deg"] \arrow[d, "N"'] & \mathbb{Z} \\
F^* \arrow[r] \arrow[d, "(\cdot(a))\circ b^1"'] & K^* \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "(\cdot(a))\circ b^1"'] & \mathrm{Div}(X) & \\
H^2F \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Res}"'] & H^2K & & \\
H^2E & & &
\end{tikzcd}$$

Faisons une chasse aux diagrammes analogue à celle ci-dessus en partant de $(a, b) \in \mathrm{Ker}(H^2F \to H^2K)$. Comme $(a, b)_K = 0$, il existe $\lambda \in L^*$ tel que $N_{L/K}\lambda = b$. Il existe alors comme ci-dessus $\mu \in \mathrm{Div}(X_E)$ tel que $\mathrm{div}(\lambda) = (1 - \sigma)\mu$.

Si $\deg(\mu)$ était pair, on aurait $\mu = 2\mu' \in \mathrm{Div}(X_E)$ et donc $\mathrm{div}(\lambda) = \mathrm{div}(\lambda'^2)$ pour un $\lambda' \in L^*$; alors $\lambda\lambda'^{-2} \in E^*$ et $b \in N_{E/F}(E^*)$; mais alors q serait isotrope. Par conséquent $\deg(\nu)$ est impair. Écrivons $\nu = \nu_0 + 2\nu_1 + \mathrm{div}(g)$, avec $\deg(\nu_0) = 1$ et $g \in L^*$. Alors $(1 - \sigma)\nu = (1 - \sigma)\nu_0 + 2(1 - \sigma)\nu_1 + (1 - \sigma)\,\mathrm{div}(g)$. D'après la proposition C.4.11, on a $(1 - \sigma)\nu_1 = \mathrm{div}(h)$, pour $h \in L^*$ convenable. Quitte à remplacer λ par $\lambda^{(1-\sigma)}g^{-1}h^{-2}$ (ce qui ne change pas b à un carré près), on peut donc supposer que $\deg(\mu) = 1$.

Ceci permet de refaire explicitement le premier calcul pour $\alpha = (a, b, c)$, $c \in F^*$. On peut choisir successivement :

- $\beta = \{b, c\}$.
- $\gamma = \{\lambda, c\}$.
- $\delta = \mu \cdot c$.

On a alors $N(\delta) = c^{\deg \nu} = c$.

Quitte à remplacer α par $\alpha - (a, b, c)$, on peut donc supposer que $c = 1$. En appliquant l'exactitude de (C.2.1), on trouve un $\varepsilon \in K_2^M(L)$ tel que $\partial\varepsilon = \delta$. Alors $\partial(1-\sigma)\varepsilon = \partial\gamma$, donc $\gamma-(1-\sigma)\varepsilon = \zeta_L$, où $\zeta \in K_2^M(E)$. Donc $\beta_K = N(\gamma) = N(\zeta_L) = N(\zeta)_K$. Mais alors $b^2(\beta - N(\zeta)) \in \mathrm{Ker}(H^2F \to H^2K)$; donc $\beta - N\zeta = e(a, b)$ pour $e \in \{0, 1\}$ convenable (proposition 6.4.13), et $\alpha = e(a, a, b)$, ce qu'on voulait. $\square$

En réalité, l'homomorphisme $K_2^M(F) \to K_2^M(K)$ est injectif (Suslin [**202**, th. 3.6]), ce qui rend la démonstration encore plus « propre ».

***9.6.5. Théorème* (Arason).** — *Il n'existe pas d'application $b : I^2F \to H^3F$, commutant à l'extension des scalaires et dont la restriction à I^3F est e^3.*

Démonstration. — Supposons qu'un tel b existe. Considérons, pour tout n, le corps des séries formelles itérées

$$L_n = \mathbb{C}((t_1))\dots((t_n)).$$

On voit facilement (en utilisant le théorème de Springer C.1.15) que $W(L_n) = \mathbb{F}_2[\langle t_1\rangle,\dots,\langle t_n\rangle]/(\langle t_i\rangle^2 = 1)$ et que $H^*L_n = \mathbb{F}_2[(t_1),\dots,(t_n)]/(t_i)^2 = 0$ (en utilisant cette fois-ci le théorème C.1.16). En particulier, on a $H^3L_2 = 0$, donc $b(\langle\langle t_1, t_2\rangle\rangle) = 0$.

Considérons maintenant

$$\varphi = \langle\langle t_1, t_2\rangle\rangle \perp \langle\langle t_3, t_4\rangle\rangle \in W(L_4).$$

Sur $L_4(\langle\langle t_3, t_4\rangle\rangle)$ on a $\varphi \sim \langle\langle t_1, t_2\rangle\rangle$, donc $b(\varphi) \in \operatorname{Ker}(H^3L_4 \to H^3L_4(\langle\langle t_3, t_4\rangle\rangle))$. Par conséquent, $b(\varphi) = (t_3, t_4, u)$ pour $u \in L_4^*$ convenable d'après le théorème 9.6.1. De même, on a $b(\varphi) = (t_1, t_2, v)$ pour un $v \in L_4^*$. Mais il en résulte que $b(\varphi) = 0$.

Considérons enfin

$$\psi = \langle\langle t_1, t_2\rangle\rangle \perp \langle\langle t_3, t_4\rangle\rangle \perp \langle\langle t_5, t_6\rangle\rangle \in W(L_6).$$

Par le même raisonnement, on a $b(\psi) = 0$. Mais soit

$$K = L_6(\sqrt{t_1t_2t_3t_4}, \sqrt{t_1t_3t_5}, \sqrt{t_2t_3t_6}).$$

En écrivant

$$L_6 = \mathbb{C}((t_1))((t_2))((t_3))((t_1t_2t_3t_4))((t_1t_3t_5))((t_2t_3t_6))$$

on voit que $K = \mathbb{C}((t_1))((t_2))((t_3))((w_4))((w_5))((w_6))$ avec $w_4 = \sqrt{t_1t_2t_3t_4}$, $w_5 = \sqrt{t_1t_3t_5}$ et $w_6 = \sqrt{t_2t_3t_6}$; en particulier, $(t_1, t_2, t_3) \neq 0 \in H^3K$. Mais

$$\psi_K \simeq \langle\langle t_1, t_2\rangle\rangle \perp \langle\langle t_3, t_1t_2t_3\rangle\rangle \perp \langle\langle t_1t_3, t_2t_3\rangle\rangle \sim \langle\langle t_1, t_2, t_3\rangle\rangle$$

d'où $b(\psi_L) = (t_1, t_2, t_3)$, contradiction. □

9.7. Bijectivité de a^n, b^n et e^n

V. Voevodsky a démontré le remarquable théorème suivant :

9.7.1. Théorème **([217])**. — *Pour tout corps F de caractéristique $\neq 2$ et tout $n \geq 0$, b^n est bijectif.*

Le cas $n = 3$ est dû indépendamment à M. Rost [**184**] et à Merkurjev-Suslin [**161**] ; le cas $n = 4$ avait été annoncé par Rost.

Voevodsky en déduit, avec D. Orlov et A. Vishik :

9.7.2. Théorème **([172])**. — *Soit $\varphi \in P_n(F)$. Alors, pour tout $i \geq 0$, on a*

$$\operatorname{Ker}(H^iF \longrightarrow H^iF(\varphi)) = e^n(\varphi)H^{i-n}F.$$

En particulier, $H^iF \to H^iF(\varphi)$ est injectif pour $i < n$ et est engendré par ses symboles pour tout i. Pour $i = 4$, $n = 3$, ce résultat est dû indépendamment à Jacob-Rost [**92**] et à Szyjewski [**205**].

La démonstration des théorèmes 9.7.1 et 9.7.2 utilise les catégories homologique et homotopique des motifs, et en particulier l'existence d'opérations de Steenrod en cohomologie motivique modulo 2. Elle sort largement du cadre de ce cours. On pourra consulter [**100**] et les travaux originaux de Voevodsky et Orlov-Vishik-Voevodsky [**217, 172**].

Par les propositions 9.4.6, 9.4.8, 9.4.9, on en déduit :

9.7.3. Corollaire. — *e^n existe pour tout $n \geq 0$; a^n, b^n et e^n sont bijectifs.*

Il existe d'autres démonstrations du corollaire 9.7.3. Morel en a donné plusieurs, dont deux publiées [**165, 167**]. Kahn et Sujatha en ont esquissé une qui n'utilise que les techniques de l'article [**217**] de Voevodsky [**105**, rem. 3.3]. Toutes ces démonstrations reposent de manière essentielle sur le théorème 9.7.1, et on ne connaît aucune autre démonstration de ce théorème que celle de [**217**] à l'heure actuelle.

9.7.4. Corollaire. — *On a $J_n(F) = I^nF$ pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. — Récurrence sur n. On sait que $I^nF \subset J_n(F)$. Soit q de degré $\geq n$. Par récurrence, on a $q \in I^{n-1}F$; en particulier, $e^n(q)$ est défini. Écrivons $q = \pm\varphi_1 \pm \cdots \pm \varphi_r$, où $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in P_{n-1}(F)$. On va montrer que $q \in I^nF$ par récurrence sur r. Si $r = 1$, on a $\varphi_1 \in J_n(F)$, d'où $q = \varphi_1 = 0$. Supposons $r \geq 2$. Soit $K = F(\varphi_r)$. Alors $\deg(q_K) \geq \deg(q) \geq n$, donc $q_K \in I^nK$. En particulier, $e^{n-1}(q)_K = 0$, donc $e^{n-1}(q) = ee^{n-1}(\varphi_r)$, $e \in \{0,1\}$ (théorème 9.7.2). Alors $e^{n-1}(q - e\varphi_r) = 0$, donc $q - e\varphi_r \in I^nF$. Mais alors $e\varphi_r \in J_n(F)$, donc $e\varphi_r = 0$. □

Le corollaire suivant est très utile :

9.7.5. Corollaire. — *Soit $\varphi \in P_n(F)$. Alors, pour tout $q \geq 0$, on a*

$$\operatorname{Ker}(I^qF/I^{q+1}F \longrightarrow I^qF(\varphi)/I^{q+1}F(\varphi)) = \varphi I^{q-n}F/I^{q-n+1}F.$$

9.8. Application à l'isotropie des formes quadratiques

À titre d'exemple d'application des résultats précédents, donnons une démonstration partielle du théorème 8.2.11 a) et b), dont nous prenons les notations. Nous avons besoin du théorème suivant, dû à Emmanuel Peyre :

***9.8.1. Théorème* (Peyre, [175]).** — *Soit γ une forme d'Albert sur F, et soit K le corps de déploiement générique de γ. Alors*

$$\operatorname{Ker}(H^3F \longrightarrow H^3K) = c(\gamma) \cdot H^1F.$$

D'après le corollaire 8.1.6, l'extension K/F est équivalente au corps des fonctions de la *variété de Severi-Brauer* X de l'algèbre de Clifford de γ : Peyre démontre le théorème ci-dessus pour ce corps de fonctions. La démonstration utilise le fait que le deuxième groupe de Chow $CH^2(X)$ est sans torsion (Karpenko).

9.8.2. Corollaire. — *Sous les hypothèses du théorème 9.8.1, on a*

$$\mathrm{Ker}(I^3F/I^4F \longrightarrow I^3K/I^4K) = \gamma IF/I^4F.$$

Démonstration. — Cela résulte du théorème 9.8.1 et du corollaire 9.7.3 (pour $n = 3$). □

9.8.3. Lemme. — *Soit q une forme anisotrope de dimension* 8, *de discriminant trivial et telle que* $\operatorname{ind} c(q) \leq 4$. *Soit γ une forme d'Albert telle que $c(\gamma) = c(q)$ et soit K le corps de déploiement générique de γ. Alors q_K est anisotrope.*

Démonstration. — On a $q_K \in I^3K$, donc $q_K \in GP_3(K)$. Si q_K est isotrope, elle est donc hyperbolique, ainsi que $(q \perp -\gamma)_K$. Par le corollaire 9.8.2, on a alors $q \perp -\gamma \equiv \langle a, -1\rangle \otimes \gamma \pmod{I^4F}$ pour a convenable, d'où $q \perp -a\gamma \in I^4F$. Mais le Hauptsatz implique alors que $q \perp -a\gamma \sim 0$, ce qui contredit l'anisotropie de q. □

9.8.4. Lemme. — *Avec les notations du lemme 9.8.3, soit* $\varphi \in \mathrm{Ker}(I^3F/I^4F \to I^3K/I^4K)$. *Alors il existe $a \in F^*$ tel que* $\varphi \equiv q \perp -aq \pmod{I^4F}$.

Démonstration. — Par le corollaire 9.8.2, on a $\varphi \equiv \rho \otimes \gamma \pmod{I^4F}$ pour ρ convenable. Comme $\varphi \in I^3F$, $\dim \rho$ est paire. Soit $a = d_\pm\rho$. Alors $\rho \equiv \langle 1, -a\rangle \pmod{I^2F}$ et $\gamma \equiv q \pmod{I^3F}$. On en déduit :

$$\rho \otimes \tau \equiv \langle 1, -a\rangle \otimes q \pmod{I^4F}.$$

□

Démonstration du théorème 8.2.11 a). — Soient τ, K comme dans le lemme 9.8.3 et q' telle que $q' \preccurlyeq q$. Quitte à multiplier q' par un scalaire, on peut supposer que $q \perp -q'$ est isotrope. Par le lemme 9.8.3 et le théorème 5.3.4, on a alors $q'_K \leq q_K$. En particulier, $\dim q' \leq 8$ (ce qui résulte aussi du théorème 5.2.2). Si γ est isotrope, l'extension K/F est excellente (théorème 5.6.4), donc il existe q'' sur F telle que $q''_K \simeq (q \perp -q')_K$. Soit $\tilde{q}' = q' \perp q''$: on a $\dim \tilde{q} = 8$. Alors q_K devient hyperbolique sur le corps des fonctions de $\tilde{q}'_K \simeq q_K$; par le lemme 9.8.3, $q_{F(\tilde{q}')}$ est donc isotrope, c'est-à-dire $\tilde{q}' \preccurlyeq q$ avec $q' \leq \tilde{q}'$. Si γ est anisotrope, K/F n'est plus excellente et Laghribi s'en tire par des arguments délicats.

Supposons maintenant $\dim q' = 8$. Alors $d_\pm q' = 1$ et $c(q') \in \{0, c(q)\}$.

1) Si $c(q') = 0$, alors $q' \in GP_3(F)$. La forme $\varphi = q \perp \gamma$ vérifie $d_\pm\varphi = 1$, $c(\varphi) = 0$, donc $\varphi \in I^3F$. De plus en utilisant le lemme 9.8.4, on obtient

$$\varphi \perp -q' \equiv q \perp -aq \pmod{I^4F}$$

pour $a \in F^*$ convenable, donc

$$q' \perp -aq \perp -\gamma \in I^4F.$$

En passant à $F(q')$ et en utilisant le Hauptsatz, cela implique

$$(aq \perp \gamma)_{F(q')} \sim 0$$

d'où $(aq \perp \gamma)_{\mathrm{an}} \sim \theta \otimes q'$. En comptant les dimensions, on voit que $\dim \theta = 1$. Il existe donc $b \in F^*$ tel que $aq \perp -bq' \sim -\gamma$. Alors $i(aq \perp -bq') \geq 5$ et q contient une voisine de q'.

2) Si $c(q') = c(\tau)$, on a $q \perp -q' \in I^3F \cap \mathrm{Ker}(W(F) \to W(K))$. En appliquant le lemme 9.8.4, on a donc

$$q \perp -q' \equiv q \perp -aq \pmod{I^4F}$$

pour un $a \in F^*$ convenable, d'où

$$q' \equiv -aq \pmod{I^4F}$$

donc q et q' sont conjuguées (proposition 8.2.9).

Supposons maintenant γ isotrope, soit $\gamma \sim u\tau$ avec $u \in F^*$ et $\tau \in P_2(F)$. Si $q' \perp aq$ est isotrope, elle est hyperbolique et $q' \simeq -aq$. Supposons $q' \perp aq$ anisotrope. On peut écrire, à un scalaire près, $q' = \tau_1 \perp b\tau_2$ avec $\tau_1, \tau_2 \in P_2(F)$ liées (cf. discussion après le corollaire 8.2.16). Soit $\pi = \tau_1 \otimes \langle 1, b\rangle$. Alors $\pi \in P_3F$ et $q' \perp -\pi \sim b(\tau_2 \perp -\tau_1) \sim c\tau$ pour $c \in F^*$. En particulier, $q'_{F(\pi)}$ est isotrope. On a $i(\pi \perp c\tau) > 0$, donc il existe $x \in F^*$ tel que $x \in D_F(\pi) \cap D_F(-c\tau)$. Alors en utilisant la multiplicativité de π et de τ, on obtient

$$q' \sim \pi \perp c\tau \simeq x\pi \perp c\tau \simeq x\pi \perp -x\tau \simeq x(\pi \perp -\tau).$$

Comme $q'_{F(\pi)}$ est isotrope, la forme de Pfister $(q' \perp aq)_{F(\pi)}$ est hyperbolique et on a $q' \perp aq \simeq \pi \otimes \langle 1, e\rangle \sim q' \perp -c\tau \perp e\pi$ pour un $e \in F^*$ convenable, ce qui donne $aq \sim -c\tau \perp e\pi$. En particulier $-c\tau \perp e\pi$ est isotrope. Par le même raisonnement que ci-dessus, on montre que $-c\tau \perp e\pi$ est semblable à $\pi \perp -\tau$, et donc $q \sim y(\pi \perp -\tau)$ pour $y \in F^*$. Ainsi q' est semblable à q. $\square$

9.9. Exercices

***9.9.1* (d'après Bass-Tate)**. — Soit E/F une extension quadratique. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $K_n^M(E)$ est engendré par les symboles $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n\}$ avec $x_i \in F^*$ et $y_n \in E^*$. (*Se ramener au cas* $n = 2$.)

9.9.2. — Soit E/F une extension finie. Choisissons une forme F-linéaire non nulle $s : E \to F$, d'où un “transfert de Scharlau”

$$s_* : W(E) \to W(F)$$

induit par $(s_*q)(x) = s(q(x))$ (remarque 1.5.3). On se propose de démontrer que $s_*(I^nE) \subset I^nF$ (théorème d'Arason, [**9**]).

a) À l'aide de l'exercice 9.9.1, traiter le cas où E/F est quadratique. (*Utiliser la proposition 9.3.1.*)

b) Traiter le cas où E/F est radicielle (*Utiliser le fait que $I^nF \to I^nE$ est surjectif.*)

c) Supposons E/F séparable. Soit L/F une extension de degré impair. Posons $E \otimes_F L = \prod E_i$, les E_i étant des extensions séparables de L. Si le théorème est vrai pour les extensions E_i/L, il est vrai pour E/F. (*Soit $x \in I^nE$. Par récurrence, $s_*x \in I^{n-1}F$. Utiliser le fait que l'homomorphisme $I^{n-1}F/I^nF \to I^{n-1}L/I^nL$ est injectif, cf. remarque 1.5.3.*)

d) Conclure. (*Grâce à b), on peut se ramener au cas où E/F est séparable. Soit E'/F une clôture galoisienne de E/F, de groupe de Galois G ; soit L le corps des invariants d'un 2-sous-groupe de Sylow S de G. Avec les notations de c), observer que les extensions E_i/L sont composées d'extensions quadratiques successives.*)

e) Montrer que l'application $I^nE/I^{n+1}E \to I^nF/I^{n+1}F$ induite par s_* ne dépend pas du choix de s.

CHAPITRE 10

DESCENTE

Dans tout ce chapitre, F est un corps de caractéristique $\neq 2$. On étudie le pendant des questions étudiées aux §§3.2, 4.4 et 9.5, à savoir l'image de l'extension des scalaires (sur l'anneau de Witt et sur la cohomologie).

10.1. L'anneau de Witt non ramifié et la cohomologie non ramifiée

(L'un des rapporteurs m'a signalé une référence intéressante et peu connue sur ce sujet : il s'agit d'une monographie de M. Ojanguren, [**170**].)

Soit K/F une extension de type fini. Un sous-anneau de valuation discrète A de K contenant F et de corps des fractions K sera appelé un *bon sous-anneau de valuation discrète de* K/F. Pour un tel A, il existe (théorème C.1.15) un homomorphisme résidu

$$\partial_\pi^2 : W(K) \longrightarrow W(k)$$

où π est une uniformisante de A et k est le corps résiduel de A. L'homomorphisme ∂_π^2 dépend du choix de π mais son noyau n'en dépend pas : c'est un sous-anneau de $W(K)$ qu'on note $W_{\mathrm{nr}}(K, A)$. Un élément de $W_{\mathrm{nr}}(K, A)$ est dit *non ramifié en* A.

10.1.1. Définition. — On appelle *anneau de Witt non ramifié de* K/F le sous-anneau de $W(K)$

$$W_{\mathrm{nr}}(K/F) = \bigcap W_{\mathrm{nr}}(K, A) = \mathrm{Ker}(W(F) \xrightarrow{\partial^2_{A,\pi_A}} \bigoplus_A W(k(A))$$

où A décrit les bons sous-anneaux de valuation discrète de K/F, π_A est une uniformisante de A et $k(A)$ est son corps résiduel. Pour $n \geq 1$, on note

$$I^n_{\mathrm{nr}}(K/F) = I^n K \cap W_{\mathrm{nr}}(K/F).$$

De même :

10.1.2. Définition. — On appelle *cohomologie non ramifiée de K/F* le sous-anneau de H^*K

$$H^*_{\mathrm{nr}}(K/F) = \bigcap H^*_{\mathrm{nr}}(K,A)$$

où A décrit les bons sous-anneaux de valuation discrète de K/F et où $H^*_{\mathrm{nr}}(K,A)$ est le noyau de l'homomorphisme résidu du théorème C.1.16 a).

On a la même notion avec des *coefficients divisibles*, et c'est celle qui est la plus pertinente en pratique, cf. théorème 10.2.5.

10.1.3. Proposition. — *Soit L une extension de type fini de K. Alors*

a) *L'application naturelle $W(K) \to W(L)$ envoie $W_{\mathrm{nr}}(K/F)$ dans $W_{\mathrm{nr}}(L/F)$.*
b) *Si L/K est transcendante pure, l'application $W_{\mathrm{nr}}(K/F) \to W_{\mathrm{nr}}(L/F)$ est un isomorphisme.*

Les mêmes énoncés sont vrais en remplaçant anneau de Witt non ramifié par cohomologie non ramifiée.

Démonstration

a) Il suffit de remarquer que toute valuation discrète sur K s'étend en une valuation discrète sur L (proposition C.1.9 et [**34**, ch. VI, §10, prop. 2]).
b) Il suffit de traiter le cas $L = K(T)$. L'injectivité résulte du lemme 2.4.1. Soit maintenant $q \in W_{\mathrm{nr}}(L/F)$. Par le théorème C.2.4, on a $q = \varphi_L$, avec $\varphi \in W(K)$. Il reste à voir que φ est non ramifiée. Mais soit A un bon sous-anneau de valuation discrète de K/F. Par [**34**, ch. VI, §10, prop. 2], il existe un bon sous-anneau de valuation discrète B de L/F contenant A, tel que l'extension résiduelle soit transcendante pure. Le résultat provient alors d'une nouvelle application du lemme 2.4.1 (au résidu de φ).

Le cas de la cohomologie se traite de même. □

Considérons maintenant le cas ou K est le *corps des fonctions d'une quadrique.*

10.1.4. Théorème. — *Soient q, q' deux formes quadratiques de dimension ≥ 3. Supposons $q \preccurlyeq q'$. Alors il existe un homomorphisme canonique*

$$W_{\mathrm{nr}}(F(q')/F) \longrightarrow W_{\mathrm{nr}}(F(q)/F).$$

Cette loi définit un foncteur contravariant de l'ensemble préordonné $(W(F), \preccurlyeq)$ vers la catégorie des $W(F)$-algèbres commutatives unitaires[(1)]*. Si $q \approx q'$, l'homomorphisme $W_{\mathrm{nr}}(F(q)/F) \to W_{\mathrm{nr}}(F(q')/F)$ est bijectif.*

Les mêmes énoncés valent en remplaçant anneau de Witt non ramifié par cohomologie non ramifiée.

[(1)] Cet énoncé n'est pas tout à fait correct, car le corps des fonctions de la quadrique définie par une forme anisotrope représentant une classe donnée de $W(F)$ n'est déterminé qu'à isomorphisme près.

Démonstration. — Nous ne la faisons que pour l'anneau de Witt non ramifié. L'hypothèse implique que l'extension $F(q,q')/F(q)$ est transcendante pure (proposition 3.1.1 b)). Par la proposition 10.1.3, l'application $W_{\mathrm{nr}}(F(q)/F) \to W_{\mathrm{nr}}(F(q,q')/F)$ est bijective. L'homomorphisme cherché est alors défini comme la composition de l'inverse de cet isomorphisme avec l'homomorphisme naturel $W_{\mathrm{nr}}(F(q')/F) \to W_{\mathrm{nr}}(F(q,q')/F)$.

On vérifie facilement la transitivité. Enfin, si $q \approx q'$, $F(q,q')/F(q')$ est aussi transcendante pure, d'où la bijectivité. □

10.2. Théorèmes de surjectivité

***10.2.1. Théorème* (Parimala [173, Th. 5.1]).** — *Soient q une forme quadratique de dimension 3 et φ une forme non ramifiée sur $F(q)$. Alors φ est définie sur F. En particulier, l'application $W(F) \to W_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)$ est surjective. (D'après le corollaire 3.2.5, son noyau est $\pi W(F)$, où π est la 2-forme de Pfister associée à q.)*

Démonstration (cf. [**44**, dém. du lemme 3.1]*).* — On raisonne par récurrence sur $\dim \varphi$. Cela permet de supposer φ *anisotrope*. Soient X la conique projective d'équation $q = 0$, $x \in X$ un point fermé et π une uniformisante de $\mathcal{O}_{X,x}$. Par la caractérisation du résidu ∂_π^2, il existe un espace quadratique unimodulaire E_x sur $\mathcal{O}_{X,x}$ tel que $E_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} F(q) \simeq \varphi$. On peut alors recoller les E_x en un fibré quadratique unimodulaire E sur X.

Comme $E \simeq E^*$, on a $\deg E = 0$. Appliquons le théorème de Riemann-Roch à E : on trouve

$$\dim \Gamma(X,E) \geq \deg E + \operatorname{rg} E(1-g)$$

où g est le genre de X. On a $g = 0$ (lemme C.4.8), donc $\dim \Gamma(X,E) \geq \operatorname{rg} E$. La structure quadratique de E définit une forme quadratique sur le F-espace vectoriel $\Gamma(X,E)$ qui est évidemment *anisotrope*. Le morphisme naturel de fibrés

$$\Gamma(X,E) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow E$$

respecte les structures quadratiques ; comme sa source est unimodulaire, il est injectif, donc surjectif. □

10.2.2. Remarque. — On retrouve en particulier le théorème 5.6.4 a).

En utilisant le théorème 10.2.1, Pfister a donné d'autres descriptions très explicites du noyau et du conoyau de l'homomorphisme apparaissant dans la définition 10.1.1 : en particulier, si q est anisotrope, X est la conique projective associée et U est un ouvert affine de X obtenu en retirant un point fermé quadratique, la suite

$$0 \to W(U) \to W(F(q) \to \bigoplus_{x \in U} W(k(x))$$

est exacte [**180**, th. 5]. Nous renvoyons à son article pour les détails de l'énoncé (voir aussi ses théorèmes 6a et 6b) et pour les démonstrations, qui utilisent la théorie des réseaux quadratiques.

Le théorème 10.2.1 est vrai en remplaçant anneau de Witt par cohomologie (à coefficients divisibles), mais je ne connais pas de preuve élémentaire, c'est-à-dire n'utilisant pas la conjecture de Milnor. La situation est tout à fait analogue à celle des noyaux, où le calcul de noyaux de Witt est souvent élémentaire alors que celui de noyaux cohomologiques utilise la conjecture de Milnor (ou est utilisé pour prouver celle-ci...). On a les résultats suivants :

10.2.3. Théorème **(Kahn-Rost-Sujatha [104**, th. 9]**)**. — *Soit q anisotrope de dimension ≥ 3. Alors, pour tout $n \geq 0$, le conoyau de l'homomorphisme*

$$I^nF/I^{n+1}F \longrightarrow I^n_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)/I^{n+1}_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)$$

s'injecte dans le conoyau de l'homomorphisme

$$H^n(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1)) \longrightarrow H^n_{\mathrm{nr}}(F(q)/F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1)).$$

(Ce théorème est prouvé pour $n \leq 4$ dans [**104**], mais la démonstration n'utilise que l'énoncé de la conjecture de Milnor.)

10.2.4. Théorème. — *Soit q anisotrope de dimension ≥ 3. Les homomorphismes*

$$H^n(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1)) \longrightarrow H^n_{\mathrm{nr}}(F(q)/F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))$$

et

$$W(F)/I^{n+1}F \longrightarrow W_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)/I^{n+1}_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)$$

sont surjectifs lorsque

a) ***Kahn-Rost-Sujatha*** [**104**, th. 4 et cor. 10 (1)] **:** $n \leq 2$.
b) **op. cit.*, th. 5 et cor. 10 (2)*:** *$n = 3$, sauf si q est une forme d'Albert.*
c) $n = 4$ *pour* $\dim q \notin [6, 12]$, *et plus précisément dans les cas suivants :*
   (i) ***Kahn-Rost-Sujatha*** [**104**, th. 6 (3) et cor. 10 (3)] **:** *q est une voisine de Pfister,* $\dim q = 8$ *et* $d_\pm q = 1$ *ou* $\dim q > 12$.
   (ii) ***Kahn-Sujatha*** [**106**, th. 3, th. 4] **:** $\dim q \leq 5$ *;* $\dim q = 6$ *et q n'est pas une forme d'Albert ou une « forme d'Albert virtuelle »(cela signifie que* $q_{F(\sqrt{d_\pm q})}$ *reste anisotrope).*
   (iii) ***Kahn-Sujatha*** [**105**, th. 2]***, Izhboldin*** [**86**] **:** *de nombreux cas disparates où* $7 \leq \dim q \leq 12$.

10.2.5. Théorème **(Kahn-Sujatha, [105**, th. 3 et 4]**)**. — *Soit q une voisine de Pfister. Alors, pour tout $n \geq 0$, les homomorphismes*

$$H^n(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1)) \to H^n_{\mathrm{nr}}(F(q)/F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))$$

et

$$I^n F \to I^n_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)$$

sont surjectifs.

(Ce théorème est donné en caractéristique zéro dans [**105**], mais la démonstration publiée de la conjecture de Milnor par Voevodsky et les résultats de Huber-Kahn [**79**, prop. 4.11 et §6] étendant ceux de [**101**] à toute caractéristique valident la preuve de [**105**] en toute caractéristique différente de 2.)

Dans le théorème 10.2.4, la démonstration du second résultat utilise le premier même pour $n = 0$ (dans le cas de 2-dimension cohomologique finie, c'est une récurrence descendante sur n), ce qui est assez insatisfaisant étant donnée la démonstration élémentaire du théorème 10.2.1. On aimerait en avoir une démonstration élémentaire (au moins pour $n = 0$).

Au vu du théorème 10.2.4, on peut conjecturer :

***10.2.6. Conjecture* (cf. [104**, conj. p. 845]**)**

a) *Le théorème 10.2.5 est vrai pour toute forme quadratique q de dimension* ≤ 5.

b) *L'homomorphisme* $W(F)/I^{n+1}F \to W_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)/I^{n+1}_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)$ *est surjectif si* $\dim q > 6 \cdot 2^{n-3}$.

En fait, a) est maintenant connu. Les cas non couverts ci-dessus sont : $\dim q = 4$, $d_{\pm}q \neq 1$ et $\dim q = 5$, q non voisine. Le premier cas peut se démontrer par la même méthode que le théorème 10.2.5 grâce aux résultats de Vishik [**211**, §2.6]. Mais on peut démontrer a) de manière uniforme par des méthodes entièrement différentes : d'une part, Paul Balmer et Charles Walter ont montré que si X est une F-variété projective lisse de dimension ≤ 3 de corps des fonctions K, l'homomorphisme $W(X) \to W_{\mathrm{nr}}(K/F)$ est bijectif [**28**, cor. 10.3]. D'autre part, Charles Walter a démontré (2003, non publié) que pour toute quadrique projective lisse X de dimension non divisible par 4, $W(F) \to W(X)$ est surjectif.

Le premier cas où l'homomorphisme $W(F) \to W_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)$ n'est pas surjectif est celui où q est une forme d'Albert :

***10.2.7. Théorème* (Kahn-Rost-Sujatha [104**, Cor. 10 (2)]**)**

Si q est une forme d'Albert, le groupe

$$\mathrm{Coker}(W(F)/I^4F \longrightarrow W_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)/I^4_{\mathrm{nr}}(F(q)/F))$$

est d'ordre 2*, engendré par la classe de τ où τ est la forme dominante de q.*

La démonstration repose sur le calcul-clé de [**98**, th. 2 d)] concernant la cohomologie non ramifiée modulo 2 (cf. exercice 8.3.3).

***10.2.8. Question*.** — Dans le théorème 10.2.7, on a $\tau^2 \sim q_1^2 \sim 4\tau$. Est-il vrai que le $W(F)$-module $W_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)$ est engendré par $1, \tau$?

10.3. Deux problèmes de descente

Soit K/F une extension de type fini, et soit φ une forme quadratique sur K.

10.3.1. Question. — À quelle(s) condition(s) φ est-elle définie sur F ?

Ici, « définie sur F »signifie qu'il existe une F-forme ψ telle que $\psi_K \simeq \varphi$ (et pas seulement $\psi_K \sim \varphi$). La question 10.3.1 peut être vue comme un analogue supérieur du problème d'hyperbolicité d'une forme quadratique sur une extension du corps de base.

Voici une question complémentaire :

10.3.2. Question. — Supposons que $\varphi \in \mathrm{Im}(W(F) \to W(K))$. Que peut-on dire de la dimension minimale d'une F-forme ψ telle que $\psi_K \sim \varphi$?

(Une reformulation de cette question est la suivante. Soit $I = \mathrm{Ker}(W(F) \to W(K))$: si $\psi \in W(F)$, quelle relation y a-t-il entre $\dim_I \psi$ et $\dim_{\mathrm{an}}(\psi_K)$, où $\dim_I$ est défini dans le §7.4 ?)

Comme d'habitude, nous abordons ces problèmes lorsque K est le corps des fonctions d'une quadrique.

Dans la question 10.3.1, la condition $\varphi \in W_{\mathrm{nr}}(K/F)$ est évidemment nécessaire. Si K est le corps des fonctions d'une conique, le théorème 10.1.4 énonce qu'elle est suffisante et que la réponse à la question 10.3.2 est « $\dim_{\mathrm{an}} \varphi$ ». En général les deux questions sont largement ouvertes ; pour la première, il n'existe probablement pas de critère général assurant qu'une forme $\varphi \in W_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)$ est définie sur F. Il est facile, toutefois, de donner une condition d'unicité :

10.3.3. Proposition. — *Soient q une forme quadratique sur F et φ une forme quadratique sur $F(q)$. Si $\dim \varphi < \dim q - i_1(q)$, il existe au plus une forme ψ sur F telle que $\psi_{F(q)} \simeq \varphi$.*

Démonstration. — C'est une variante de celle du lemme 5.4.2. Soient si possible $\psi \neq \psi'$ telles que $\psi_{F(q)} \simeq \psi'_{F(q)} \simeq \varphi$. Alors $(\psi \perp -\psi')_{F(q)} \sim 0$, d'où $(\psi \perp -\psi')_{\mathrm{an}} \simeq aq \perp q'$ pour a, q' convenables. On a $aq_1 \perp -q'_{F(q)} \sim 0$, donc $\dim q' \geq \dim q_1$ et $2 \dim \varphi = \dim(\psi \perp -\psi') \geq \dim q + \dim q_1 = 2(\dim q - i_1(q))$, contradiction. $\square$

10.4. Une première conjecture de descente

La conjecture suivante, qui essaye de répondre à la question 10.3.1, devrait résulter d'un analogue supérieur du théorème 3.2.4.

10.4.1. Conjecture **([97, conj. 2]).** — *Soit q une forme quadratique sur F, et soit $K = F(q)$. Soit φ une forme quadratique sur K. Supposons que φ soit non ramifiée.*

Alors, pour que φ soit définie sur F, il suffit *que*

$$\dim\varphi < \frac{1}{2}\dim q.$$

Dans [**97**], on montre :

10.4.2. Théorème. — *La conjecture 10.4.1 est vraie dans les cas suivants :*

– $\dim\varphi \leq 5$.
– *φ est une forme d'Albert. Alors φ est définie sur F par une forme d'Albert.*
– *$\varphi \in GP_3(K)$. Alors φ est définie sur F par une forme de $GP_3(F)$.*

Les résultats de [**97**] sont en fait plus précis que le théorème 10.4.2 :

10.4.3. Théorème ([**97**, th. 2]). — *Dans la conjecture 10.4.1, pour que φ soit définie sur F il suffit que*

1. $\dim\varphi = 1$: $\dim q > 2$.
2. $\dim\varphi = 2$: $\dim q > 4$ *ou* $\dim q = 4$, $d_\pm q \notin \{1, d_\pm\varphi\}$.
3. $\dim\varphi = 3$: $\dim q > 6$ *ou* $\dim q = 6$, $d_\pm q \neq 1$.
4. $\dim\varphi = 4$:
   – $d_\pm\varphi \neq 1$: $\dim q > 6$ *ou* $\dim q = 6$, $d_\pm q \notin \{1, d_\pm\varphi\}$.
   – $d_\pm\varphi = 1$: $\dim q \geq 6$ *sauf peut-être* (*).
5. $\dim\varphi = 5$:
   – *φ non voisine :* $\dim q > 8$.
   – *φ voisine :* $\dim q \geq 6$ *sauf peut-être* (*).
6. $\dim\varphi = 6$, *φ d'Albert :* $\dim q > 8$ *or* $\dim q = 8$, *sauf peut-être* (**).

Cas exceptionnels pour 4 et 5 :

$$(*) \qquad \dim q = 6, d_\pm q = 1; \dim q = 7 \ \textit{ou}\ 8, c(q)_K = c(\varphi).$$

Cas exceptionnels pour 6 :

$$(**) \qquad \dim q = 8, d_\pm q = 1, c(q)_K = c(\varphi).$$

On arrive parfois aussi à obtenir la conclusion de la conjecture 10.4.1 sous une hypothèse différente de $\dim\varphi < \frac{1}{2}\dim q$. Ainsi :

10.4.4. Théorème

Supposons que $\dim q > 16$, *et soit* $\varphi \in W_{\mathrm{nr}}(F(q)/F)$.

a) [**97**, th. 2] **:** *Si φ est une voisine de Pfister de dimension* 6, 7 *ou* 8, *alors elle est définie sur F par une voisine de Pfister.*
   φ est aussi définie sur F dans les cas suivants :
b) ***Laghribi*** [**132**] **:**
   – $\dim\varphi \leq 6$.
   – $\dim\varphi = 7$ *et* $\operatorname{ind} C_0(\varphi) \neq 8$.
   – $\dim\varphi = 8$ *et* $\operatorname{ind} C(\varphi)_{K(\sqrt{d_\pm\varphi})} \leq 2$.
   – $\dim\varphi = 9$ *et* $\operatorname{ind} C_0(\varphi) \leq 2$.

– $\dim\varphi = 10$, $\varphi \in I^2K$ *et* $\operatorname{ind} C(\varphi) \leq 2$.

c) ***Izhboldin-Vishik*** [**91**, th. 3.9]**:** $\dim\varphi = 7$ *et* $\operatorname{ind} C_0(\varphi) = 8$ *(donc, en définitive, dès que* $\dim\varphi \leq 7$*).*

Tout ceci indique que l'énoncé de la conjecture 10.4.1 n'est pas optimal. D'après le théorème 10.1.4, la question 10.3.1 ne dépend en fait que de la classe d'équivalence stable de q (à savoir, si $q' \approx q$, on peut transporter φ sur $\varphi' \in W_{\mathrm{nr}}(F(q')/F)$ et alors φ est définie sur F si et seulement si φ' l'est). Il serait par exemple agréable de remplacer dans la conjecture 10.4.1 la borne $\frac{1}{2}\dim q$ par une borne meilleure et stablement invariante. Un candidat naturel est $\dim q - i_1(q) = \dim_{\mathrm{es}}(q) - 1$. Malheureusement la conjecture correspondante est fausse : prendre pour q une forme d'Albert et $\varphi = q_1$. Cf. les "cas limites" de [**97**, th. 6].

Les méthodes de démonstration utilisent pratiquement tous les résultats sur les invariants des formes quadratiques expliqués aux chapitres précédents. Il serait intéressant de parvenir à s'en dispenser.

10.5. Application à la hauteur et au degré

Les résultats de descente ci-dessus permettent de retrouver tous les résultats déjà connus sur les formes de hauteur et de degré ≤ 2 (voir §5.7), et impliquent de plus :

10.5.1. Théorème

a) *Une forme de hauteur* 2 *et de degré* 3 *non excellente est de dimension* ≤ 16.

b) *Soit* q *une forme de hauteur* 3 *et de degré* 1 *qui n'est pas voisine d'une forme de Pfister. Si* $\dim q > 6$*, alors* q_1 *est excellente. Si de plus* $\dim q_1 = 6$*, on a* $\dim q \leq 16$.

c) *Soit* q *une forme de hauteur* 3 *et de degré* 2*, qui n'est pas bonne. Supposons que* q *ne soit pas voisine d'une forme de Pfister. Alors* $\dim q = 8$.

Voir [**97**]. Laghribi a aussi précisé le théorème 10.5.1. Mais ses résultats sont trop techniques pour être reproduits ici et je préfère renvoyer à son article l'original [**133**].

10.6. Une deuxième conjecture de descente

La conjecture qui suit essaye de répondre à la question 10.3.2 :

10.6.1. Conjecture ([**103**, conj. 1.4]). — *Soient* q *une forme quadratique anisotrope sur* F*,* $K = F(q)$ *et* φ *une forme quadratique anisotrope sur* K*. Supposons que* $\varphi \in \operatorname{Im}(W(F) \to W(K))$*. Alors il existe une forme quadratique* ψ *sur* F *telle que* $\psi_K \sim \varphi$ *et* $\dim\psi \leq 2\dim\varphi$.

Soit $I = \operatorname{Ker}(W(F) \to W(K))$. En termes de la « dimension modulo I »$\dim_I$ du §7.4, la conjecture 10.6.1 dit ceci : pour toute $\psi \in W(F)$, $\dim_I \psi \leq 2\dim_{\mathrm{an}}\psi_K$.

Dans [**103**], on étudie cette conjecture qu'on démontre dans certains cas particuliers. Pour énoncer ces résultats, introduisons quelques notations : pour (q,φ) comme dans la conjecture 10.6.1, soit

$$C_F(q,\varphi)=\inf\{\dim\psi \mid \psi\in W(F) \text{ et } \varphi\sim\psi_{F(q)}\}$$

(de sorte que $C_F(q,\varphi)$ a la même parité que $\dim\varphi$). De plus, soient

$$\begin{aligned} C_F(q,n)&=\sup\{C_F(q,\varphi)\mid \dim\varphi\leq n\}\leq+\infty\\ C(m,n)&=\sup\{C_F(q,n)\mid F \text{ corps et } \dim q=m\}\leq+\infty\\ C(n)&=\sup\{C(mn,)\mid m\geq 2\}\leq+\infty. \end{aligned}$$

Une reformulation de la conjecture 10.6.1 est alors : $C(n)\leq 2n$ pour tout $n\geq 1$ (noter que cela implique $C(n)\leq 2n-1$ si n est impair).

Les résultats principaux de [**103**] sont maintenant :

10.6.2. Théorème. — *Pour tout $n\geq 1$, on a*

$$C(n)\geq C(4,n)\geq\begin{cases}2n & \textit{si } n \textit{ est pair}\\ 2n-1 & \textit{si } n \textit{ est impair.}\end{cases}$$

Ce théorème dit que la conjecture 10.6.1 est optimale.

10.6.3. Théorème

a) *La conjecture 10.6.1 est vraie si*
   (i) $\dim\varphi\leq 3$.
   (ii) *φ est semblable à une 2-forme de Pfister.*
   (iii) *φ est une voisine de Pfister de dimension 5.*

b) *Pour tout $m\neq 4$, $C(m,4)\leq 8$ et $C(m,5)\leq 9$.*

c) $C(4,4)\leq 10$. *En particulier, $C(4)\leq 10$.*

10.6.4. Théorème. — *Soient q,K,φ comme dans la conjecture 10.6.1 ; soit D une F-algèbre centrale simple telle que $[D_K]=c(\varphi)$. Alors*

a) *Si $\dim q=5$ et que φ n'est pas une voisine de Pfister, la conjecture 10.6.1 est vraie, sauf peut-être si $\dim q=4$, $d_\pm q\neq 1$ et $\mathrm{ind}(D)=\mathrm{ind}(D\otimes C_0(q))=4$.*

b) *Si $\dim\varphi=6$ et que φ est une forme d'Albert, la conjecture 10.6.1 est vraie et on a même $C_F(q,\varphi)\leq 8$, sauf peut-être dans le même cas exceptionnel que a).*

10.6.5. Remarque. — Le cas le plus difficile, le seul où nous n'arrivons pas entièrement à conclure, est celui où $\dim q=4$ et $d_\pm q\neq 1$.

10.7. Exercices

***10.7.1* (d'après [97, lemme 3]).** — Pour (q, φ) comme dans le théorème 10.4.3, soit n le plus petit entier tel que $2^n > \dim \varphi$. Supposons qu'il existe ψ définie sur F telle que $\dim \varphi = \dim \psi$ et $\varphi \equiv \psi_K \pmod{I^{n+1}K}$. Montrer que $\varphi \simeq \psi_K$. (*Utiliser le Hauptsatz.*)

***10.7.2*.** — Démontrer le théorème 10.4.3 pour $\dim \varphi = 1$.

***10.7.3*.** — Démontrer le théorème 10.4.3 pour $\dim \varphi = 2$. (*Utiliser le théorème 10.2.4 pour voir que $d = d_\pm \varphi$ et $c(\varphi)$ sont "définis sur F" par des classes d et c'. Déduire de la proposition 6.4.13. que $c'_{F(\sqrt{d})} = 0$, donc que c' est de la forme (a, d). Conclure que $\varphi \simeq \langle a, -ad \rangle$ en utilisant l'exercice 10.7.1.*)

***10.7.4*.** — Démontrer le théorème 10.4.3 pour $\dim \varphi = 3$. (*Même méthode que dans l'exercice précédent, en utilisant l'exercice 7.4.1.*)

***10.7.5* (d'après [97, cor. 2]).** — a) Soit r un entier tel que la conjecture 10.4.1 soit vraie pour toute forme φ de dimension r. Soient n tel que $2^n > r$, et soient γ, q deux formes telles que $\dim \gamma = 2^{n+1} - r$ et que $\dim q > \sup\{2^n, 2r\}$. Alors γ est une voisine de Pfister si et seulement si $\gamma_{F(q)}$ est une voisine de Pfister. (*Pour montrer la suffisance, observer que la forme complémentaire de $\gamma_{F(q)}$ est définie sur F et conclure en utilisant l'exercice 4.5.5.*)

***10.7.6* (d'après [68], [97] et [91]).** — Soit γ une forme quadratique à déploiement maximal (exercice 5.8.4). Supposons que $\dim \gamma = 2^{n+1} - r$ avec $r < 2^n$. Montrer que γ est une forme de Pfister dans les cas suivants :
- $n \leq 2$, sauf peut-être $\dim q = 5$ (que se passe-t-il dans ce cas ?) ;
- $n = 3$ et $r \leq 5$;
- $n \geq 4$ et $r \leq 7$.

(*Utiliser l'exercice 10.7.5 et le théorème 10.4.4.*)

(Pour des exemples de formes à déploiement maximal de dimension $2^n + 2^{n-2}$ qui ne sont pas des formes de Pfister, voir [**68**, p. 475, ex. 2]. Pour plus de détails sur cet exercice, voir [**91**].)

***10.7.7* (d'après [97, cor. 2]).** — a) Soient $m \geq 1$ et $t \in [0, (2^m + 2)/3[$. Supposons que la conjecture 10.4.1 soit vraie pour toute forme φ de dimension $2^m + t$. Soit q une forme anisotrope et $(F_i, q_i)_{0 \leq i \leq h}$ sa suite de déploiement générique. Soit $i > 0$ tel que $\dim q_i = 2^m + t$. Montrer que, si q_i est définie sur F_{i-1}, alors elle est définie sur F. (*En utilisant le théorème 5.4.3, montrer que* $\dim q_{i-2} > 2 \dim q_i$.)
b) En particulier, la conclusion de a) est toujours vraie si $\dim q_i \leq 5$. Supposons $\dim q_i = 6$. Si q_i est une forme d'Albert, a) est encore vrai en utilisant le théorème 10.4.3 6). ****Que se passe-t-il dans les autres cas ?

APPENDICE A

RAPPELS SUR LE GROUPE DE BRAUER

Dans ce chapitre, nous rappelons les bases de la théorie du groupe de Brauer d'un corps. Pour plus de détails, on se reportera à [**32**, ch. 8] ou à [**30**].

A.1. Algèbres simples et semi-simples

A.1.1. Définition. — Soit A un anneau. Un A-module M est dit *simple* si ses seuls sous-modules sont lui-même et 0. M est dit *semi-simple* s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) M est somme de ses sous-modules simples.
(ii) M est somme directe de modules simples.
(iii) Tout sous-module de M est facteur direct.

A.1.2. Définition. — Un anneau A est dit *semi-simple* s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) Tout A-module à gauche est simple.
(ii) Le A-module à gauche A est simple.
(iii) Tout idéal de A est facteur direct.

Un anneau semi-simple A est *simple* s'il n'a pas d'autres idéaux bilatères que lui-même et 0.

A.1.3. Théorème

a) *Tout anneau semi-simple est produit direct d'un nombre fini d'anneaux simples. Il est simple si et seulement si tous ses modules simples sont isomorphes entre eux.*
b) *Tout anneau simple est isomorphe à une algèbre de matrices sur un corps (non nécessairement commutatif).*

Dans la suite, on fixe un corps commutatif F. Le terme *F-algèbre simple* désigne les F-algèbres, simples en tant qu'anneau et *de dimension finie sur F*. Une F-algèbre

A est *centrale* si son centre est réduit à F. On emploiera indifféremment les termes *corps non nécessairement commutatif*, *corps gauche* et *algèbre à division*.

A.1.4. Définition. — Soit A une F-algèbre, et soit B une sous-algèbre de A. Le *commutant* de B est $B' = \{a \in A \mid ab = ba\ \forall a \in A\}$. C'est une sous-algèbre de A.

A.1.5. Théorème

1) *Soit K/F une extension. Une F-algèbre A est centrale simple si et seulement si la K-algèbre $A_K := K \otimes_F A$ est centrale simple.*
2) *Soit A une F-algèbre centrale simple.*
   a) *La dimension de A sur F est un carré.*
   b) *Soit B une sous-F-algèbre simple de A, et soit B' son commutant. Alors :*
      (i) *B' est simple.*
      (ii) $[B : F][B' : F] = [A : F]$.
      (iii) *Le commutant de B' est égal à B.*
      (iv) *Si B est centrale, B' est centrale et l'homomorphisme $B \otimes_F B' \to A$ est un isomorphisme.*
   c) *Soit B une autre F-algèbre centrale simple. Alors $A \otimes_F B$ est centrale simple.*
   d) *Soit A^0 l'algèbre opposée à A. Alors on a un isomorphisme canonique*
   $$A \otimes_F A^0 \simeq End_F(A).$$

A.2. Le groupe de Brauer

A.2.1. Définition. — Soit F un corps (commutatif). Deux F-algèbres simples A, B de centre F et de dimension finie sur F sont *semblables* si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Il existe un corps gauche D de centre F et des entiers a, b tels que $A \simeq M_a(D)$, $B \simeq M_b(D)$.
(ii) Il existe des entiers a, b tels que $M_b(A) \simeq M_a(B)$.
(iii) Les catégories des A-modules à gauche et des B-modules à gauche sont équivalentes.

On dit que A est *neutre* si A est semblable à F.

La condition (iii) montre que la relation de similitude est une relation d'équivalence.

A.2.2. Théorème

a) *La collection des classes de similitude de F-algèbres centrales simples est un ensemble $B(F)$.*
b) *Le produit tensoriel munit $B(F)$ d'une structure de groupe ; l'inverse de la classe d'une algèbre A est la classe de l'algèbre opposée A^0 ; ce groupe est commutatif.*

c) *Si K/F est une extension, l'extension des scalaires induit un homomorphisme $B(F) \to B(K)$.*

A.2.3. Exemples

1) Si F est algébriquement clos, $B(F) = 0$.

2) $B(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2$, engendré par les quaternions d'Hamilton $\left(\frac{-1, -1}{\mathbb{R}}\right)$ (cf. section A.3 ci-dessous).

3) Si F est un corps C_1 (cf. sous-section 7.3.B), alors $B(F) = 0$. Exemples : corps finis, corps de degré de transcendance 1 sur un corps algébriquement clos.

4) Si F est complet pour une valuation discrète, à corps résiduel fini, alors $B(F) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

5) Si F est un corps de nombres, il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow B(F) \to \bigoplus_v B(F_v) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où v décrit les places de F.

A.2.4. Définition. — Soit A une F-algèbre centrale simple. Une extension K de F est un *corps neutralisant* pour A si A_K est neutre.

A.2.5. Théorème. — *Soient A une F-algèbre centrale simple et E/F une extension finie. Alors E est un corps neutralisant pour A si et seulement s'il existe une F-algèbre centrale simple B, semblable à A, telle que E soit une sous-algèbre commutative maximale de B. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est une sous-algèbre commutative maximale de B.*

(ii) *E est égal à son commutant.*

(iii) $[B : F] = [E : F]^2$.

***A.2.6. Théorème* (Skolem-Noether)**. — *Soient A une F-algèbre centrale simple, B, C deux sous-algèbres simples de A et $f : B \to C$ un isomorphisme de F-algèbres. Alors il existe $a \in A$, inversible, tel que $f(x) = axa^{-1}$ pour tout $x \in B$. En particulier, tout automorphisme de A est intérieur.*

A.2.7. Théorème. — *Soit D un corps gauche de centre F. Il existe un sous-corps commutatif maximal de D,* séparable *sur F.*

A.2.8. Définition. — Soit A une F-algèbre centrale simple. Écrivons $A = M_n(D)$, où D est un corps gauche.

a) Le *degré* de A est l'entier $\sqrt{[A:F]}$.

b) L'*indice* de A est l'entier $\sqrt{[D:F]}$.

c) L'*exposant* de A est l'ordre de la classe de A dans $B(F)$.

A.2.9. Proposition. — *Pour toute F-algèbre centrale simple A,*

a) *L'exposant de A divise son indice, qui divise son degré.*

b) *L'indice et l'exposant de A ont les mêmes facteurs premiers.*

A.2.10. Proposition. — *Soient A une F-algèbre centrale simple et K/F une extension.*

a) $\operatorname{ind}(A_K)$ *divise* $\operatorname{ind}(A)$.

b) *Si* $[K:F]=n<+\infty$, $\operatorname{ind}(A)/\operatorname{ind}(A_K)$ *divise* n.

c) *Si K/F est transcendante pure,* $\operatorname{ind}(A_K)=\operatorname{ind}(A)$.

Démonstration. — a) est évident. Pour démontrer b), on peut supposer que A est un corps. Écrivons

$$A_K \simeq M_h(D) = End_D(D^h)$$

où D est un corps gauche. On a d'abord :

$$\dim_F A = \dim_K A_K = h^2 \dim_K D$$

d'où

$$h = \operatorname{ind}(A)/\operatorname{ind}(A_K).$$

D'autre part, D^h est un A_K-module simple, et $A_K \simeq_{A_K} (D^h)^h$. Il en résulte

$$[K:F] = \dim_A A_K = h \dim_A(D^h)$$

donc h divise n.

Pour démontrer c), on peut supposer que A est un corps et que $K=F(T)$. Comme $\dim_K(A_K)<+\infty$, si A_K n'est pas un corps, il existe $a,b\in A_K\setminus\{0\}$ tels que $ab=0$. Quitte à les multiplier par un polynôme de $F[T]$, on peut supposer que $a,b\in A[T]$. On obtient alors une contradiction en regardant les coefficients dominants. $\square$

On a besoin dans la section 7.1 du lemme suivant :

***A.2.11. Lemme* (Albert).** — *Soient F un corps de caractéristique $\neq 2$, D un corps gauche de centre F et de dimension finie sur F et $a\in F^*\setminus F^{*2}$. Soit $E=F(\sqrt{a})$. Alors D_E n'est pas un corps si et seulement si D contient un sous-corps isomorphe à E.*

Démonstration. — Il est équivalent que D contienne un sous corps isomorphe à E ou un élément x de carré a. Si c'est le cas, alors $(1\otimes x-\sqrt{a}\otimes 1)(1\otimes x+\sqrt{a}\otimes 1)=0$, donc D_E n'est pas à division. Réciproquement, si D_E n'est pas à division, il existe $s,t,u,v\in D$, non tous nuls, tels que $(1\otimes s+\sqrt{a}\otimes t)(1\otimes u+\sqrt{a}\otimes v)=0$. On a nécessairement $s,u\neq 0$; quitte à multiplier à gauche par s^{-1} et à droite par u^{-1}, on peut donc supposer $s=u=1$. On a alors (en simplifiant l'écriture)

$$0=(1+t\sqrt{a})(1+v\sqrt{a}) = 1+tvd+(t+v)\sqrt{a}.$$

On en déduit $v=-t$ et $1-dt^2=0$; il suffit donc de choisir $x=t^{-1}$. $\square$

A.2.12. Proposition. — *Soient A une F-algèbre centrale simple, E un sous-corps commutatif de A et B le commutant de E dans A (une E-algèbre centrale simple d'après le théorème A.1.5 b)). Alors A_E est semblable à B.*

Démonstration (Tignol). — On fait de A un module à gauche sur $A_E = A \otimes_F E$ en posant

$$(a \otimes x)b = abx$$

pour $a, b \in A$ et $x \in E$. Les endomorphismes du $A \otimes E$-module A sont les multiplications a droite par les éléments de B. Comme, pour toute algèbre simple centrale C et pour tout C-module M, l'algèbre C est semblable à $End_C(M)$, il en découle que B est semblable à A_E. □

A.3. Exemples

Dans cette section, on suppose $\operatorname{car} F \neq 2$.

A.3.A. Quaternions

A.3.1. Définition. — Soient $a, b \in F^*$. L'*algèbre de quaternions* définie par (a, b) est la F-algèbre $\binom{a\ b}{F}$ de base $(1, i, j, k)$, avec

$$i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji = k.$$

A.3.2. Remarque. — L'algèbre $\binom{a\ b}{F}$ n'est autre que (l'algèbre sous-jacente à la superalgèbre) $C(\langle a, b\rangle)$ de la section 6.2.

A.3.3. Théorème. — *Pour $a, b \in F^*$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La forme quadratique $\langle 1, -a, -b\rangle$ est isotrope.*
(ii) *La forme quadratique $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ est isotrope.*
(iii) *L'algèbre $Q = \binom{a\ b}{F}$ n'est pas un corps.*
(iv) *L'algèbre Q est isomorphe à $M_2(F)$.*

En particulier, l'algèbre Q est centrale simple sur F, de degré 2.

Démonstration. — L'équivalence entre (i) et (ii) est un cas particulier du théorème 5.3.4. Pour voir que (ii)⇔(iii), on remarque que, pour $x, y, z, t \in F$, on a l'identité

$$(x + yi + zj + tk)(x - yi - zj - tk) = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2 = q(x, y, z, t)$$

où $q = \langle\langle a, b\rangle\rangle$. Il en résulte que Q admet des diviseurs de zéro si q est isotrope, et que, si q est anisotrope, tout élément $x + yi + zj + tk \in Q \setminus \{0\}$ est inversible, d'inverse $(x - yi - zj - tk)/q(x, y, z, t)$.

Il est évident que (iv)⇒(iii). Montrons enfin que (iii)⇒(iv). Supposons d'abord $a = 1, b = -1$, et construisons un isomorphisme $\binom{a\ b}{F} \simeq M_2(F)$. Soit $(E_{ij})_{i,j\in\{0,1\}}$ la base canonique de $End_F(F\hat{\oplus}F)$, où E_{ij} est la matrice dont le seul terme non nul est égal à 1 et est d'indice $(i + 1, j + 1)$. On vérifie que l'isomorphisme cherché est donné par

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto E_{00} + E_{11} \\ i &\longmapsto E_{01} + E_{10} \\ j &\longmapsto E_{01} - E_{10} \\ k &\longmapsto E_{11} - E_{00}. \end{aligned}$$

On remarque que $\left(\frac{a\ b}{F}\right) \simeq \left(\frac{as^2\ bt^2}{F}\right)$ pour tout $s,t \in F^*$. Il en résulte que, pour a,b quelconques, il existe une extension E/F telle que $Q_E \simeq \left(\frac{1\ -1}{E}\right)$. Le théorème A.1.5 1) implique alors que $\left(\frac{a\ b}{F}\right)$ est une algèbre centrale simple en général, qui est évidemment de degré 2. Si Q n'est pas un corps, elle est donc isomorphe à $M_2(F)$ d'après le théorème A.1.3 b). □

Réciproquement :

***A.3.4. Proposition* (Wedderburn).** — *Toute F-algèbre centrale simple A de degré 2 est une algèbre de quaternions.*

Démonstration. — On peut supposer que A est un corps. Soit $E \subset A$ un sous-corps commutatif maximal de A. On a $E = F(\sqrt{a})$ pour $a \in F^*$ convenable. Soit $i \in E$ tel que $i^2 = a$. Considérons l'automorphisme intérieur σ de A défini par i : on a $\sigma^2 = 1$. Comme i n'est pas central, $\sigma \neq 1$; il existe donc $j \in A$ tel que $\sigma(j) = -j$, c'est-à-dire $ij = -ji$. Ceci implique que j n'est pas central, donc engendre un sous-corps commutatif maximal K de A. Mais σ laisse K invariant et sa restriction à F est triviale : par conséquent, les points fixes de $\sigma_{|K}$ sont réduits à F. En particulier, $j^2 = b \in F$. Finalement, soit $k = ij$ et soit $x + yi + zj + tk = 0$ une relation de dépendance. En la conjuguant respectivement par i, j et k, on obtient les nouvelles relations

$$\begin{aligned} x + yi - zj - tk &= 0 \\ x - yi + zj - tk &= 0 \\ x - yi - zj + tk &= 0. \end{aligned}$$

qui montrent que $x = y = z = t = 0$. □

A.3.5. Lemme. — *Pour $a, b \in F^*$, soit (a,b) la classe de l'algèbre $\left(\frac{a\ b}{F}\right)$ dans $B(F)$. On a les relations :*

$$\begin{aligned} (a,b) &= (b,a) \\ (a^2,b) &= 0 \\ (a,1-a) &= 0 \quad (a \neq 1) \\ (a,-a) &= 0 \\ (a,bb') &= (a,b) + (a,b'). \end{aligned}$$

Démonstration. — La première relation est évidente. Les trois suivantes résultent facilement de l'équivalence entre (i) et (iv) dans le théorème A.3.3.

Pour montrer la dernière identité, on exhibe un isomorphisme

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ & F \end{pmatrix} \otimes_F \begin{pmatrix} a & b' \\ & F \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} M_2(\begin{pmatrix} a & bb' \\ & F \end{pmatrix})$$

en suivant la méthode de [**30**, Ch. II, §3, ex. 1]. Soient $(1, i, j, k)$, $(1, i', j', k')$ et $(1, i'', j'', k'')$ les bases canoniques respectives de $\left(\frac{a\ b}{F}\right)$, $\left(\frac{a\ b'}{F}\right)$ et $\left(\frac{a\ bb'}{F}\right)$. L'isomorphisme cherché est alors donné par exemple par

$$\begin{aligned} \varphi(i \otimes 1) &= \begin{pmatrix} i'' & 0 \\ 0 & i'' \end{pmatrix} & \varphi(1 \otimes i') &= \begin{pmatrix} -i'' & 0 \\ 0 & i'' \end{pmatrix} \\ \varphi(j \otimes 1) &= \begin{pmatrix} 0 & -j'' \\ -b'^{-1}j'' & 0 \end{pmatrix} & \varphi(1 \otimes j') &= \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(k \otimes 1) &= \begin{pmatrix} 0 & -k'' \\ -b'^{-1}k'' & 0 \end{pmatrix} & \varphi(1 \otimes k') &= \begin{pmatrix} 0 & -b'i'' \\ i'' & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour montrer que φ définit bien un isomorphisme, on commence par vérifier que c'est un homomorphisme d'algèbres : ceci est laissé au lecteur en exercice. Mais tout homomorphisme d'une algèbre simple vers une autre est injectif ; donc φ est injectif, et il est surjectif pour une raison de dimension. □

***A.3.6. Lemme* (Albert).** — *Soient $a, b, c, d \in F^*$ tels que $(a, b) = (c, d)$. Alors il existe $e \in F^*$ tel que*

$$(a, b) = (a, e) = (c, e) = (c, d).$$

Démonstration (Tate). — Soit $D = \left(\frac{a\ b}{F}\right)$, et soit D_0 le sous-F-espace vectoriel de D formé des éléments de trace nulle : on a $\dim D_0 = 3$. Rappelons que la norme réduite définit sur D une forme quadratique q (d'ailleurs isométrique à $\langle\langle a, b\rangle\rangle$). Sa restriction à D_0 coïncide avec l'application $x \mapsto -x^2$. Par hypothèse, il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in D_0$ tels que

$$\alpha^2 = a, \beta^2 = b, \alpha\beta + \beta\alpha = 0$$
$$\gamma^2 = c, \delta^2 = d, \gamma\delta + \delta\gamma = 0.$$

Autrement dit, (α, β) et (γ, δ) sont des vecteurs orthogonaux pour q. Comme $\dim D_0 = 3$, il existe $\varepsilon \in D_0$, orthogonal à α et à γ. Alors $e = \varepsilon^2$ convient. □

A.3.B. Biquaternions

A.3.7. Définition. — On appelle *algèbre de biquaternions* une F-algèbre A qui est isomorphe à $Q_1 \otimes_F Q_2$, où Q_1, Q_2 sont deux algèbres de quaternions.

***A.3.8. Théorème* (Albert).** — *Toute F-algèbre centrale simple A de degré* 4 *et d'exposant* 2 *est isomorphe à une algèbre de biquaternions.*

Pour une démonstration (utilisant la théorie des algèbres à involution), voir Racine [**183**].

A.3.C. Algèbres d'exposant 2 **et de degré** ≥ 3. — Soit A une F-algèbre centrale simple d'exposant 2 et de degré 2^n. Est-il vrai que A est isomorphe à un produit tensoriel de n algèbres de quaternions ? D'après ce qui précède, la réponse est oui pour $n \leq 2$. Pour $n = 3$, la réponse est oui stablement :

***A.3.9. Théorème* (Tignol [206]).** — *Toute algèbre d'exposant* 2 *et de degré* 8 *est semblable à un produit tensoriel de quatre algèbres de quaternions.*

mais non instablement :

***A.3.10. Théorème* (Amitsur-Rowen-Tignol [4], Rowen [187], Karpenko [108])**

Soit $\mathcal{P}$ *l'ensemble des nombres premiers. Pour tout* $p \in \mathcal{P} \cup \{0\}$, *il existe un corps* F *de caractéristique* p *et un corps gauche de centre* F, *d'exposant* 2 *et de degré* 8, *qui n'est pas produit tensoriel de trois algèbres de quaternions.*

Pour n quelconque, la réponse est oui stablement, d'après le théorème de Merkurjev 6.4.11 : toute algèbre d'exposant 2 est semblable à un produit tensoriel d'algèbres de quaternions. Par des arguments génériques, on en déduit que, pour tout $n \geq 1$, il existe un entier $\lambda(n)$ tel que toute algèbre d'exposant 2 et de degré 2^n soit semblable à un produit tensoriel de $\lambda(n)$ algèbres de quaternions, avec $\lambda(1) = 1$ (proposition A.3.4), $\lambda(2) = 2$ (théorème A.3.8), $\lambda(3) = 4$ (théorèmes A.3.9 et A.3.10). Par contre, pour $n > 3$, on ne connaît pas la valeur optimale de $\lambda(n)$. (L'auteur conjecture que cette valeur est 2^{n-1} pour $n > 0$.)

A.4. Exercice

A.4.1** **(d'après Merkurjev, [95, Th. 3])**

Soit F un corps de 2-dimension cohomologique 2 (cf. §B.8).

a) On suppose que le groupe de Galois absolu de F est un 2-groupe. Soit $q \in I^2F$ anisotrope. Montrer que l'algèbre $E(q)$ de l'exercice 6.5.2 a) est à division. (*Raisonner par récurrence sur l'indice* e *de* $E(q)$. *Le cas* $e = 1$ *est impossible, le cas* $e = 2$ *est facile. Pour* $e \geq 4$, *considérer un sous-corps commutatif maximal* M *d'un corps gauche* D *de centre* F *semblable à* $E(q)$ *: l'hypothèse sur* F *implique que* M *contient une sous-extension quadratique de* F. *Conclure en utilisant l'exercice 3.4.3.*)

b) Étendre a) au cas général (*considérer une extension algébrique parfaite de* F *déterminée par un* 2*-sous-groupe de Sylow du groupe de Galois absolu de* F.)

c) En utilisant l'exercice 6.5.2 et le théorème 6.4.11, montrer que toute algèbre à division de centre F et d'exposant 2 est *isomorphe* à un produit tensoriel d'algèbres de quaternions. (L'énoncé analogue pour un nombre premier impair est une question ouverte.)

APPENDICE B

RAPPELS DE COHOMOLOGIE GALOISIENNE

B.1. Cohomologie des groupes finis

B.1.A. Généralités

B.1.1. Définition. — Soit G un groupe fini. Un G-*module* (à gauche) est un groupe abélien A, muni d'une action à gauche de G, c'est-à-dire d'un homomorphisme φ de G dans $Aut(A)$. Si A est noté additivement, on note, pour $(g, a) \in G \times A$, $ga = \varphi(g)(a)$, de sorte que

$$\begin{aligned} g(a+b) &= ga + gb \\ (gh)a &= g(ha). \end{aligned}$$

B.1.2. Remarques

1) Une action *à droite* de G sur A est un anti-homomorphisme de G vers $Aut(A)$. Si A est noté additivement, elle est notée $(g, a) \mapsto ag$. Il est équivalent de se donner une action à gauche ou une action à droite de G sur A. En effet, si φ est une action à gauche, $g \mapsto \varphi(g)^{-1}$ est une action à droite, et réciproquement.

2) Si A est noté multiplicativement, une action à gauche (resp. à droite) est en général notée $(g, a) \mapsto {}^g a$ (resp. $(g, a) \mapsto a^g$) pour éviter un conflit de notation entre l'action de G et la multiplication de A.

3) Soit $f : H \to G$ un homomorphisme de groupes. Un G-module A définit un H-module (encore noté A) par la loi $ha = f(h)a$.

B.1.3. Définition. — Soient G un groupe fini et A un G-module à gauche (noté additivement). On définit le *complexe des cochaînes inhomogènes* de G à valeurs dans A comme le complexe

$$0 \longrightarrow C^0(G, A) \xrightarrow{\ d^0\ } C^1(G, A) \xrightarrow{\ d^1\ } \dots \xrightarrow{\ d^{n-1}\ } C^n(G, A) \xrightarrow{\ d^n\ } \dots$$

avec $C^n(G,A) = Appl(G^n,A)$ et

$$d^n f(g_1,\dots,g_{n+1}) = g_1 f(g_2,\dots,g_{n+1}) \\ + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j f(g_1,\dots,g_j g_{j+1},\dots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1,\dots,g_n).$$

Un élément $f \in C^n(G,A)$ s'appelle une *n-cochaîne de G à valeurs dans A*. Si $d^n f = 0$, f est un *n-cocycle* ; le sous-groupe des n-cocycles est noté $Z^n(G,A)$. Si $f \in \operatorname{Im} d^{n-1}$, f est un *n-cobord* ; le sous-groupe des n-cobords est noté $B^n(G,A)$.

B.1.4. Exemples

1) Un 0-cocycle est un élément de $A^G := \{a \in A \mid ga = a \,\forall g \in G\}$.

2) Un 1-cocycle est une application $f : G \to A$ telle que $f(gh) = f(g) + gf(h)$. On dit aussi que f est un *homomorphisme croisé*.

3) Un 2-cocycle est une application $f : G \times G \to A$ telle que

$$f(g,h) + f(gh,k) = gf(h,k) + f(g,hk).$$

On dit aussi que f est un *système de facteurs*.

B.1.5. Lemme. — *Pour tout $n \geq 0$, on a $d^{n+1}d^n = 0$; en d'autres termes, $B^n(G,A) \subset Z^n(G,A)$.*

Démonstration. — Cela se vérifie par un simple calcul. □

B.1.6. Définition. — Le *n-ième groupe de cohomologie de G à valeurs dans A* est

$$H^n(G,A) = Z^n(G,A)/B^n(G,A).$$

B.1.7. Remarque. — On trouvera dans [**37**], [**63**], [**195**], [**197**] des définitions plus conceptuelles de ces groupes de cohomologie. En particulier, $A \mapsto H^n(G,A)$ s'interprète comme le *n-ième foncteur dérivé droit* du foncteur « points fixes » $A \mapsto A^G$.

B.1.8. Proposition

a) *Le foncteur $(G,A) \mapsto H^n(G,A)$ est covariant en A et contravariant en G. Si $f : H \to G$ est un homomorphisme de groupes, on note f^* l'homomorphisme induit en cohomologie.*

b) *Soit $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ une suite exacte courte de G-modules. Alors on a une longue suite exacte*

$$0 \longrightarrow H^0(G,A') \longrightarrow H^0(G,A) \longrightarrow H^0(G,A'') \longrightarrow H^1(G,A') \longrightarrow \dots \\ \longrightarrow H^n(G,A') \longrightarrow H^n(G,A) \longrightarrow H^n(G,A'') \longrightarrow H^{n+1}(G,A) \longrightarrow \dots$$

c) *Si l'action de G sur A est triviale, on a un isomorphisme canonique*

$$H^1(G,A) = Hom(G,A).$$

Démonstration. — a) est évident. Pour voir b), on remarque que la suite de complexes

$$0 \longrightarrow C^*(G, A') \longrightarrow C^*(G, A) \longrightarrow C^*(G, A'') \longrightarrow 0$$

est exacte, et on prend sa cohomologie. Enfin, l'isomorphisme de c) provient du fait que, dans le cas considéré, $B^1(G, A) = 0$ et que tout homomorphisme croisé de G dans A est un homomorphisme au sens ordinaire. □

B.1.B. Restriction, inflation et corestriction

B.1.9. Définition

a) Soit $H \subset G$. Le morphisme $H^*(G, A) \to H^*(H, A)$ décrit dans la proposition B.1.8 s'appelle *morphisme de restriction* ; il est parfois noté Res_G^H.

b) Soit $H \to G$ un morphisme surjectif. Le morphisme $H^*(G, A) \to H^*(H, A)$ décrit dans la proposition B.1.8 s'appelle *morphisme d'inflation* ; il est parfois noté Inf_G^H.

En plus de la restriction et de l'inflation, on dispose d'un outil supplémentaire en cohomologie des groupes finis : la *corestriction.*

B.1.10. Théorème

Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G.

a) *Il existe une unique famille d'homomorphismes*

$$\mathrm{Cor}_H^G : H^n(H, A) \longrightarrow H^n(G, A)$$

définie pour tout G-module A et tout $n \geq 0$, naturels en A, commutant aux suites exactes longues associées aux suites exactes courtes de G-modules (cf. prop. B.1.8 b)), et tels qu'en degré 0, on ait

$$\mathrm{Cor}_H^G(a) = \sum_{g \in G/H} ga$$

pour $a \in H^0(H, A) = A^H$.

b) *On a*

$$\mathrm{Cor}_H^G \circ \mathrm{Res}_G^H = m$$

où $m = (G : H)$.

B.1.C. Cup-produit

B.1.11. Définition. — Soient A, B deux G-modules. Le *produit tensoriel* de A et B est le groupe abélien $A \otimes B$ muni de l'action

$$g(a \otimes b) = ga \otimes gb.$$

B.1.12. Théorème. — *Soient A, B deux G-modules. Il existe des homomorphismes bilinéaires*

$$H^p(G, A) \times H^q(G, B) \longrightarrow H^{p+q}(G, A \otimes B), \quad p, q \geq 0$$
$$(x, y) \longmapsto x \cdot y$$

naturels en A et B. Ils ont les propriétés suivantes :

(i) Associativité : *si C est un troisième G-module, on a pour $(x, y, z) \in H^p(G, A) \times H^q(G, B) \times H^r(G, C)$*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

pour l'isomorphisme $(A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C)$ donné par $(a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes (b \otimes c)$.

(ii) Commutativité : *pour $(x, y) \in H^p(G, A) \times H^q(G, B)$, on a*

$$x \cdot y = (-1)^{pq} y \cdot x$$

pour l'isomorphisme $A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A$ donné par $a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

(iii) Contravariance en G : *si $f : H \to G$ est un homomorphisme de groupes, alors*

$$f^*(x \cdot y) = f^* x \cdot f^* y$$

pour $(x, y) \in H^p(G, A) \times H^q(G, B)$.

(iv) Formule de projection : *soit H un sous-groupe de G. Alors*

$$\mathrm{Cor}_H^G(x \cdot \mathrm{Res}_G^H y) = (\mathrm{Cor}_H^G x) \cdot y$$

pour $(x, y) \in H^p(H, A) \times H^q(G, B)$.

Le cup-produit est défini à partir des applications bilinéaires suivantes sur les cochaînes : si $(f, f') \in C^m(G, A) \times C^n(G, B)$,

$$(f \cdot f')(g_1, \ldots, g_{m+n}) = f(g_1, \ldots, g_m) \otimes g_1 \ldots g_m f'(g_{m+1}, \ldots, g_{m+n}). \tag{B.1.1}$$

B.2. Cohomologie des groupes profinis

B.2.1. Proposition. — *Pour un groupe topologique G, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *G est compact, totalement discontinu.*
(ii) *G est limite projective de groupes finis.*
(iii) *G est séparé ; tout sous-groupe ouvert de G est d'indice fini.*

Démonstration. — Voir [**33**]. □

B.2.2. Définition. — On appelle *groupe profini* tout groupe topologique vérifiant les conditions équivalentes de la proposition B.2.1.

B.2.3. Définition. — Soit G un groupe profini. Un *G-module topologique (discret)* est un groupe abélien A muni d'une action à gauche de G et vérifiant la condition

$$A = \bigcup_H A^H$$

où H parcourt les sous-groupes ouverts (c'est-à-dire fermés d'indice fini) de G.

B.2.4. Définition. — Soient G un groupe profini et A un G-module topologique. On définit les *groupes de cohomologie de G à valeurs dans A* par la formule

$$H^n(G, A) = \varinjlim H^n(G/H, A^H)$$

où H parcourt les sous-groupes ouverts *distingués* de G, et où les morphismes de transition sont les morphismes d'inflation.

On vérifie facilement que la cohomologie d'un groupe profini a les mêmes propriétés formelles que celle d'un groupe fini, cf. [**195**], [**197**]. (La corestriction est définie dans le cas d'un sous-groupe fermé d'indice fini.)

B.3. Cohomologie galoisienne

Soit F un corps commutatif. Notons $\bar{F}$ une clôture algébrique de F et $F_s \subset \bar{F}$ l'ensemble des éléments de $\bar{F}$ séparables sur F : F_s est un sous-corps de $\bar{F}$, appelé *clôture séparable* de F. On montre (cf. par exemple [**32**]) que le groupe G_F des F-automorphismes de F_s a une structure de groupe profini : en fait

$$G_F = \varprojlim Gal(E/F)$$

où E/F décrit les sous-extensions galoisiennes finies de F_s/F. Le groupe G_F est appelé *groupe de Galois absolu* de F ; sa cohomologie est appelée *cohomologie galoisienne* (de F).

Si A est un G_F-module topologique, on note habituellement $H^*(F, A)$ les groupes de cohomologie $H^*(G_F, A)$.

B.4. Le théorème 90 de Hilbert

Le lemme suivant est bien connu :

B.4.1. Lemme. — *Les automorphismes d'un corps commutatif E sont des applications linéairement indépendantes sur E.*

Démonstration. — Soit si possible $\sum a_\varphi \varphi = 0$ une relation de dépendance, où φ décrit l'ensemble des automorphismes de E et les a_φ sont des éléments de E, presque tous nuls mais non tous nuls. On peut supposer l'ensemble des φ tels que $a_\varphi \neq 0$ de cardinal minimum. Il a au moins 2 éléments : soient $\varphi_1 \neq \varphi_2$ tels que $a_{\varphi_1}, a_{\varphi_2} \neq 0$, et soit $x \in E$ tel que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. On a, pour tout $y \in E$

$$\sum a_\varphi \varphi(y) = 0$$

d'où

$$0 = \sum a_\varphi \varphi(xy) - \varphi_1(x) \sum a_\varphi \varphi(y) = \sum a_\varphi (\varphi(x) - \varphi_1(x))\varphi(y)$$

soit

$$\sum a_\varphi (\varphi(x) - \varphi_1(x))\varphi = 0.$$

Mais cette relation de dépendance est non triviale et a strictement moins de termes que la précédente, contradiction. □

B.4.2. Théorème. — *Soit E/F une extension galoisienne de groupe G. Alors*

$$H^1(G, E^*) = 0.$$

Démonstration. — Soit $(a_g)_{g\in G}$ un 1-cocycle de G à valeurs dans E^*. D'après le lemme B.4.1, il existe $x \in E$ tel que $a = \sum_{g\in G} a_g\, {}^g x \neq 0$. On a, pour tout $h \in G$

$${}^h a = \sum_{g\in G} {}^h a_g\, {}^{hg} x = \sum_{g\in G} a_h^{-1} a_{hg}\, {}^{hg} x = a_h^{-1} \sum_{g\in G} a_g\, {}^g x = a_h^{-1} a$$

ce qui montre que (a_g) est un 1-cobord. □

B.4.3. Corollaire. — *On a $H^1(F, F_s^*) = 0$.*

B.4.4. Corollaire. — *Soit E/F une extension quadratique, et soit σ le générateur de $Gal(E/F)$. Soit $x \in E^*$ tel que $N_{E/F}(x) = 1$. Alors il existe $y \in E^*$ tel que $x = {}^\sigma y/y$.*

Démonstration. — L'hypothèse sur x implique que la 1-cochaîne $1 \mapsto 1$, $\sigma \mapsto x$ est un 1-cocycle. La conclusion résulte alors du théorème B.4.2. □

B.5. Groupe de Brauer et cohomologie galoisienne

B.5.A. Produits croisés

B.5.1. Définition. — Soit E/F une extension galoisienne de groupe G. Faisons opérer G à gauche sur E, et soit c un 2-cocycle de G à valeurs dans E^*. Le *produit croisé* associé à c est la F-algèbre $E \times_c G$ suivante :

– *Structure additive* : $E \times_c G$ est le E-espace vectoriel de base G.
– *Structure multiplicative* : la multiplication est F-bilinéaire ; pour $(x, y, g, h) \in E^2 \times G^2$, on a

$$(x \cdot g)(y \cdot h) = x\, {}^g y c_{g,h} \cdot gh.$$

B.5.2. Théorème

a) *L'algèbre $E \times_c G$ de la définition B.5.1 est associative et centrale simple sur F, de degré $n = [E : F]$; E est sous-algèbre commutative maximale de $E \times_c G$.*

b) *Toute F-algèbre centrale simple A contenant E comme sous-corps commutatif maximal est de la forme $E \times_c G$.*
c) *Soient c, c' deux 2-cocycles de G à valeurs dans E^*. Alors $E \times_c G \simeq E \times_{c'} G$ si et seulement si c et c' sont cohomologues (c'est-à-dire $c/c' \in B^2(G, E^*)$).*

Démonstration. — Voir [**30**, ch. IV][(1)] ou [**20**]. Nous ne donnerons qu'une esquisse de la démonstration de b). D'après le théorème A.2.6, pour tout $g \in G$ il existe $a_g \in A^*$

tel que ${}^g x = a_g x a_g^{-1}$ pour tout $x \in E$. On a

$$ {}^g({}^h x) = {}^{gh} x $$

soit

$$ a_g a_h x a_h^{-1} a_g^{-1} = a_{gh}^{-1} x a_{gh}. $$

Pour $g, h \in G$, l'élément $d_{g,h} = a_{gh}^{-1} a_g a_h$ de A commute donc à tout élément de E : comme E est maximal, on a $d_{g,h} \in E^*$. Il en est donc de même de

$$ c_{g,h} = a_g a_h a_{gh}^{-1} $$

puisque

$$ c_{g,h} = a_{gh} d_{g,h} a_{gh}^{-1} = {}^{gh} d_{g,h}. $$

En écrivant $(a_g a_h) a_k = a_g (a_h a_k)$, on vérifie la relation de cocycle pour c.

Il reste a exhiber un isomorphisme $E \times_c G \xrightarrow{\sim} A$. On envoie g sur a_g et on prolonge par L-linéarité. L'application linéaire f ainsi définie est un homomorphisme de F-algèbres. Pour voir que f est bijective, il suffit de voir que les a_g sont linéairement indépendants sur E. Mais soit si possible $\sum_{g \in G} x_g a_g = 0$ une relation de dépendance, avec les $x_g \in L$ non tous nuls ; choisissons leur nombre minimal. L'ensemble des $x_g \neq 0$ a alors au moins deux éléments x_h, x_k. Soit $y \in L$ tel que ${}^h y \neq {}^k y$. On a

$$ 0 = {}^h y \sum_{g \in G} x_g a_g - \sum_{g \in G} x_g a_g y = \sum_{g \in G} x_g ({}^h y - {}^g y) a_g. $$

Mais la relation $\sum_{g \in G} x_g ({}^h y - {}^g y) a_g = 0$ est non triviale et a strictement moins de termes $\neq 0$ que la précédente, contradiction (on remarquera la ressemblance entre ce raisonnement et celui de la démonstration du lemme B.4.1). □

On remarquera que la proposition A.3.4 se déduit facilement du théorème B.5.2.

---

(1) On prendra garde au fait que nos notations ne sont pas les mêmes que celles de Blanchard. Celui-ci convient de faire opérer G *à droite* sur E^* ; la famille $c_{g,h}$ qu'il utilise est alors différente de celle que nous utilisons, et ne vérifie pas les relations d'un 2-cocycle. Il est toutefois facile de passer d'une langage à l'autre, cf. remarque B.1.2 (1). Nous faisons opérer G à gauche pour ne pas entrer en conflit avec les notations cohomologiques standard.

B.5.3. Corollaire. — *Il existe un isomorphisme canonique*

$$u_{E/F} : H^2(G, E^*) \xrightarrow{\sim} B(E/F)$$

où $B(E/F) := \operatorname{Ker}(B(F) \to B(E))$.

Démonstration. — Le théorème B.5.2 fournit l'application u et montre qu'elle est injective. Soit $x \in B(E/F)$. D'après le théorème A.2.5, il existe une algèbre A dans la classe x telle que E soit sous-corps commutatif maximal de A ; cette algèbre est un produit croisé de G par E, toujours par le théorème B.5.2.

Il reste à montrer que $u_{E/F}$ est un homomorphisme : pour cela nous renvoyons par exemple à [**30**, dém. du th. IV.3]. □

B.5.4. Exemple. — $E = F(\sqrt{a})$ avec $a \notin F^*/F^{*2}$. On a $G = \{1, g\}$. Notons $x \mapsto \bar{x}$ l'action de g. Un 2-cocycle de G à valeurs dans E^* est la donnée de quatre éléments $c_{1,1}$, $c_{1,g}$, $c_{g,1}$ et $c_{g,g}$ vérifiant (en appliquant la relation de cocycle respectivement à $(1,1,g)$, $(g,1,1)$ et (g,g,g)) :

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= c_{1,g} \\ c_{g,1} &= \overline{c_{1,1}} \\ c_{g,g}c_{1,g} &= \overline{c_{g,g}}c_{g,1}. \end{aligned}$$

Quitte à diviser par un cobord, on peut supposer $c_{1,1} = 1$ (on dit que le 2-cocycle c est *normalisé*). On a alors $c_{1,g} = c_{g,1} = 1$ et $c_{g,g} = b \in F^*$. Soit $\alpha \in E^*$ tel que $\alpha^2 = a$, et soit $\beta = \alpha \cdot g \in A$. On a alors

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= -dg = -\beta\alpha \\ \beta^2 &= -ab \end{aligned}$$

et on retrouve l'algèbre de quaternions $(a, -ab) = (a, b)$.

B.5.5. Théorème. — *Les isomorphismes $u_{E/F}$ du corollaire B.5.3 fournissent un isomorphisme*

$$u_F : H^2(F, F_s^*) \xrightarrow{\sim} B(F).$$

Démonstration. — Voir Blanchard [**30**, ch. IV]. □

B.6. Théorie de Kummer

Soit n un entier premier à la caractéristique de F. Comme F_s est séparablement clos, l'élévation à la puissance n est surjective dans F_s^*. On a donc une suite exacte de G_F-modules

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow F_s^* \xrightarrow{\ n\ } F_s^* \longrightarrow 1 \qquad \text{(B.6.1)}$$

où μ_n est le *groupe des racines n-ièmes de l'unité* de F_s. Cette suite est appelée *suite exacte de Kummer*.

En prenant la cohomologie galoisienne de (B.6.1), on obtient une suite exacte (cf. proposition B.1.8 b))

$$\begin{aligned}1 \longrightarrow H^0(F,\mu_n) \longrightarrow H^0(F,F_s^*) \xrightarrow{n} H^0(F,F_s^*)&\\ \xrightarrow{\delta} H^1(F,\mu_n) \longrightarrow H^1(F,F_s^*) \xrightarrow{n} H^1(F,F_s^*)&\\ \longrightarrow H^2(F,\mu_n) \longrightarrow H^2(F,F_s^*) \xrightarrow{n} H^2(F,F_s^*).&\end{aligned}$$

Par la théorie de Galois, on a $H^0(F,F_s^*) = F^*$; par le corollaire B.4.3, $H^1(F,F_s^*) = 0$, et par le théorème B.5.5, $H^2(F,F_s^*) = B(F)$. On en déduit :

***B.6.1. Théorème* (théorie de Kummer).** — *La suite exacte ci-dessus fournit des isomorphismes*

$$F^*/F^{*n} \xrightarrow{\sim} H^1(F,\mu_n)$$
$$H^2(F,\mu_n) \xrightarrow{\sim} {}_nB(F).$$

On note classiquement

$$a \longmapsto (a)$$

l'homomorphisme $F^*/F^{*n} \to H^1(F,\mu_n)$ décrit ci-dessus.

Pour $n = 2$, le G_F-module μ_2 est trivial et s'identifie canoniquement à $\mathbb{Z}/2$. On a donc des isomorphismes

$$F^*/F^{*2} \xrightarrow{\sim} H^1(F,\mathbb{Z}/2)$$
$$H^2(F,\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\sim} {}_2B(F).$$

En particulier, si $a, b \in F^*$, la classe (a,b) de l'algèbre de quaternions déterminée par a et b est un élément de $H^2(F,\mathbb{Z}/2)$. En fait :

B.6.2. Proposition. — *On a* $(a,b) = (a)\cdot(b)$.

Démonstration. — D'après la formule (B.1.1), le cup-produit $(a)\cdot(b)$ est représenté par le 2-cocycle

$$(g,h) \longmapsto (a)(g)\cdot(b)(h)$$

donc son image dans $H^2(F,F_s^*)$ est représentée par le 2-cocycle

$$b_{g,h} = (-1)^{(a)(g)\cdot(b)(h)}.$$

Par ailleurs, l'exemple B.5.4 montre que la classe de (a,b) dans $H^2(F,F_s^*)$ est représentée par le 2-cocycle

$$c_{g,h} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a)(g) = 0 \text{ ou } (a)(h) = 0\\ -ab & \text{si } (a)(g) = (a)(h) = 1.\end{cases}$$

Il suffit donc de montrer que $b_{g,h}$ et $c_{g,h}$ sont cohomologues. Soient $\alpha, \beta \in F_s^*$ tels que $\alpha^2 = a, \beta^2 = b$. On vérifie que $b_{g,h}^{-1} c_{g,h} = f(gh)^{-1} f(g)\, {}^g f(h)$ avec

$$f(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } (a)(g) = 0 \\ \alpha\beta & \text{si } (a)(g) = 1, (b)(g) = 0 \\ -\alpha\beta & \text{si } (a)(g) = (b)(g) = 1. \end{cases}$$

□

B.6.3. Lemme. — *Soit E/F une extension quadratique, et soit $a \in E^*$ tel que $\mathrm{Cor}_{E/F}(a) = 0$. Alors il existe $(b, c) \in F^* \times E^*$ tel que $a = bc/\bar{c}$, où $\bar{c}$ est le conjugué de c sous l'action de Gal(E/F).*

Démonstration. — Par le théorème B.6.1, on a $N_{E/F} a = b^{-2}$, où $b \in F^*$, d'où $N_{E/F}(ab) = 1$. Il suffit d'appliquer le corollaire B.4.4. □

B.7. La longue suite exacte d'une extension quadratique

B.7.1. Théorème. — *Soit G un groupe (pro)fini et soit H un sous-groupe (ouvert) de G, d'indice 2. Notons $\alpha \in H^1(G, \mathbb{Z}/2)$ l'homomorphisme de noyau H. Alors la suite*

$$\text{(B.7.1)} \quad 0 \longrightarrow H^0(G, \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^0(H, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} H^0(G, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\cdot\alpha} H^1(G, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow H^n(G, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^n(H, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} H^n(G, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\cdot\alpha} H^{n+1}(G, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \dots$$

est exacte.

Démonstration. — Ce théorème est classique ; nous suivrons la démonstration d'Arason [**9**]. Soit $A = Ind_H^G \mathbb{Z}/2$: c'est le G-module des applications (continues) $\beta : G \to \mathbb{Z}/2$ telles que $\beta(hg) = \beta(g)$ pour $h \in H$. L'action de G sur A est donnée par $(g\beta)(h) = g\beta(hg^{-1}) = \beta(hg^{-1})$. On a alors [**197**, ch. I, 2.5]

$$H^n(G, A) \simeq H^n(H, \mathbb{Z}/2).$$

D'autre part, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\quad i \quad} A \xrightarrow{\quad \pi \quad} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

avec $i(1) = 1$ et $\pi(\beta) = 1$ si β n'est pas constant, $\pi(\beta) = 0$ si β est constant. On obtient alors une suite exacte du type (B.7.1), avec $i_* = \mathrm{Res}$, $\pi_* = \mathrm{Cor}$ (*ibid.*), dont il reste à identifier le connectant ∂. Définissons une section (non équivariante !) $s : \mathbb{Z}/2 \to A$ de π par $s(0) = 0$, $s(1) = \alpha$. On vérifie immédiatement que

$$gs(\varepsilon) - s(\varepsilon) = i(\alpha(g)\varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2$.

Soit maintenant $f : G^n \to \mathbb{Z}/2$ un n-cocycle (continu). On a $d(s \circ f)(G^{n+1}) \subset i(\mathbb{Z}/2)$, et $\partial \bar{f}$ est représenté par $d(s \circ f) : G^{n+1} \to \mathbb{Z}/2$, où $\bar{f}$ est la classe de f dans $H^n(G, \mathbb{Z}/2)$. Comme s est additif et que $df = 0$, on a

$$\begin{aligned} d(s \circ f)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1 s(f(g_2, \dots, g_{n+1})) - s(f(g_2, \dots, g_{n+1})) \\ &= i(\alpha(g_1) f(g_2, \dots, g_{n+1})). \end{aligned}$$

Mais, d'après la formule (B.1.1), $(g_1, \dots, g_{n+1}) \mapsto \alpha(g_1) f(g_2, \dots, g_{n+1})$ représente le cup-produit $\alpha \cdot f$. □

B.8. Dimension cohomologique

Soit p un nombre premier. On appelle *p-dimension cohomologique de F* le nombre

$$cd_p(F) = \sup\{n \geq 0 \mid \exists A, H^n(F, A) \neq 0\} \leq +\infty$$

où A désigne un G_F-module topologique de torsion p-primaire. Il revient au même de demander que A soit d'exposant p.

On pose également

$$cd(F) = \sup\{cd_p(F) \mid p \text{ premier}\}.$$

APPENDICE C

COURBES ALGÉBRIQUES

C.1. Valuations discrètes

C.1.A. Généralités

C.1.1. Définition. — Un anneau commutatif unitaire A est un *anneau de valuation discrète* s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) A est local et principal.

(ii) A est local et noethérien et son idéal maximal est engendré par un élément non nilpotent.

(iii) A est intégralement clos et possède un idéal premier non nul et un seul.

Pour l'équivalence de ces propriétés, voir par exemple [**195**, ch. I, §§1, 2].

C.1.2. Définition. — Soit A un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Un générateur de $\mathfrak{m}$ s'appelle une *uniformisante* de A. Le corps $A/\mathfrak{m}$ s'appelle le *corps résiduel* de A.

C.1.3. Lemme. — *Soit A un anneau principal, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de A. Alors le localisé $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation discrète.*

Démonstration. — C'est évident. □

C.1.4. Lemme. — *Soit A un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps des fractions K. Pour $a \in A$, notons $v(a) = sup\{n \mid a \in \mathfrak{m}^n\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour $a, b \in A$, on a alors*

a) $v(a+b) \geq inf(v(a), v(b))$.

b) $v(ab) = v(a) + v(b)$.

De plus,

c) $v^{-1}(+\infty) = \{0\}$.

La fonction v est la valuation *de A. Elle s'étend de manière unique en une fonction $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ vérifiant a), b) et c).*

Soit θ un nombre réel > 1 ; posons $|a| = \theta^{-v(a)}$. Alors $|\ |$ définit une valeur absolue sur A et K.

Démonstration. — Exercice. □

C.1.5. Lemme. — *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K ; soit π une uniformisante de A. Alors tout élément $x \in K^*$ s'écrit de manière unique $x = \pi^n u$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $u \in A^*$.*

Démonstration. — Exercice (on a $n = v(x)$). □

C.1.6. Lemme. — *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps résiduel k. Alors l'homomorphisme $A^* \to k^*$ est surjectif.*

Démonstration. — C'est plus généralement vrai pour tout anneau local : on a $A^* = A - \mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A. □

C.1.7. Proposition. — *Soient A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, L une extension finie de K et B la fermeture intégrale de A dans L. Supposons*

(i) *soit que l'extension L/K soit séparable ;*
(ii) *soit que A soit une algèbre de type fini sur un corps.*

Alors :

a) *B est un A-module libre de rang $n = [L : K]$.*
b) *L'anneau B est principal semi-local (*i.e. *n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux).*

Démonstration. — Voir par exemple [**195**, ch. I, §4, prop. 8 et 9] dans le cas (i) et [**34**, ch. V] dans le cas (ii). □

C.1.8. Définition. — Dans la situation de la proposition C.1.7, soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de B. L'*indice de ramification* de B en $\mathfrak{p}$ est $e_\mathfrak{p} = v_\mathfrak{p}(\pi)$, où π est une uniformisante de A. L'extension B/A (ou L/K) est *non ramifiée en* $\mathfrak{p}$ si $e_\mathfrak{p} = 1$. On dit que B/A est *non ramifiée* si B/A est non ramifiée en tous les idéaux maximaux de B.

C.1.9. Proposition. — *Dans la situation de la proposition C.1.7, supposons B/A non ramifiée. Soit k le corps résiduel de A. Alors on a*

$$k \otimes_A B \simeq \prod_\mathfrak{p} k_\mathfrak{p}$$

où $\mathfrak{p}$ décrit les idéaux maximaux de B et $k_\mathfrak{p}$ est le corps résiduel en $\mathfrak{p}$. En particulier,

(i) *le* degré résiduel $f_\mathfrak{p} = [k_\mathfrak{p} : k]$ *est fini ;*
(ii) *on a $\sum_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p} = n = [L : K]$.*

En général, on a

$$\sum_{\mathfrak{p}} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} = n.$$

Démonstration. — Voir [**195**, §4]. □

C.1.B. Anneaux de valuation discrète complets. — Soit A un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps des fractions K. Les puissances de $\mathfrak{m}$ forment une base de voisinages de 0 pour une topologie sur A compatible avec sa structure d'anneau. Si $|\ |$ est une valeur absolue associée à la valuation de A, on voit facilement que

$$(a, b) \longmapsto |a - b|$$

définit une distance sur A et K, et que cette distance définit la topologie décrite ci-dessus.

C.1.10. Définition. — Un anneau de valuation discrète est *complet* s'il est complet pour la distance décrite ci-dessus.

Si A est un anneau de valuation discrète quelconque, son complété $\hat{A}$ est encore un anneau de valuation discrète : on a

$$\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n$$

cf. [**195**, §1]. En particulier, A et $\hat{A}$ ont même corps résiduel.

C.1.11. Proposition. — *Dans la proposition C.1.7, soit $\hat{A}$ le complété de A. Alors $\hat{A} \otimes_A B \simeq \prod_{\mathfrak{p}} \hat{B}_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ décrit les idéaux maximaux de B. En particulier, si A est complet, B est un anneau de valuation discrète complet.*

Démonstration. — Voir [**195**, prop. 4]. □

C.1.12. Lemme. — *Supposons A complet et son corps résiduel k de caractéristique $\neq 2$. Alors l'homomorphisme $A^*/A^{*2} \to k^*/k^{*2}$ est un isomorphisme ; on a une suite exacte*

$$1 \longrightarrow k^*/k^{*2} \longrightarrow K^*/K^{*2} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Pour la première assertion, il suffit d'après le lemme C.1.6 de montrer l'injectivité. Celle-ci résulte du lemme de Hensel [**195**]. La suite exacte s'en déduit. □

C.1.C. Cohomologie, anneau de Witt et K-théorie de Milnor. — Commençons par la K-théorie de Milnor :

C.1.13. Lemme. — *Tout symbole de Steinberg sur K s'écrit soit $\{u_1, \dots, u_n\}$, soit $\{u_1, \dots, u_{n-1}, \pi u_n\}$, où les u_i sont des unités de A et π est une uniformisante fixée.*

Démonstration. — Le cas $n = 1$ est trivial. Le cas $n = 2$ résulte du calcul suivant (pour $u, v \in A^*$) :

$$\{\pi u, \pi v\} = \{-\pi v, \pi v\} + \{-u/v, \pi v\} = \{-u/v, \pi v\}.$$

□

C.1.14. Théorème **(Milnor [162, §2], Serre, Bass-Tate [29, §4])**

Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Posons

$$K_*^M(k, \Pi) = K_*^M(k)\langle t\rangle/(t^2 - \{-1\}t)$$

où t est un générateur polynomial de degré 1 ($tx = (-1)^{|x|}xt$ pour $x \in K_*^M(k)$ homogène) et notons Π l'image de t dans $K_*^M(k, \Pi)$. Soit π une uniformisante de A. Il existe un unique homomorphisme d'anneaux

$$S_\pi : K_*^M(K) \longrightarrow K_*^M(k, \Pi)$$

tel que $S_\pi(\{\pi^m u\}) = \{\bar u\} + m\Pi$. Cet homomorphisme est surjectif, de noyau $\{1 + \pi A\}K_*^M(K)$. Si l'on écrit

$$S_\pi(x) = s_\pi(x) + \Pi\partial(x)$$

avec $s_\pi(x), \partial(x) \in K_*^M(k)$, s_π est un homomorphisme d'anneaux gradués et ∂ est un homomorphisme de groupes gradués de degré -1, qui ne dépend pas du choix de π. On a

$$\partial(x) = s_\pi(\{\pi\} \cdot x)$$

pour tout $x \in K_*^M(K)$; l'image par ∂ d'un symbole de degré n est un symbole de degré $n - 1$.

Si A est complet et $\operatorname{car} k \neq 2$, *$S_\pi$ induit un isomorphisme*

$$\bar S_\pi : K_*^M(K)/2 \xrightarrow{\sim} K_*^M(k, \Pi)/2.$$

Démonstration. — Pour voir que S_π existe, il suffit de vérifier que $S_\pi(\{x\})S_\pi(\{1 - x\}) = 0$ dans $K_*^M(k, \Pi)$. Pour cela, on vérifie d'abord que $S_\pi(\{x\})S_\pi(\{-x\}) = 0$. En effet, si $x = \pi^m u$, avec $u \in A^*$, on a :

$$\begin{aligned} S_\pi(\{x\})S_\pi(\{-x\}) &= (\{\bar u\} + m\Pi)(\{-\bar u\} + m\Pi) \\ &= \{\bar u, -\bar u\} + m\{-1\}\Pi + m^2\Pi^2 = (m + m^2)\{-1\}\Pi = 0. \end{aligned}$$

Ceci permet de vérifier $S_\pi(\{x\})S_\pi(\{1 - x\}) = 0$ seulement pour $v(x) \geq 0$ (en remplaçant éventuellement x par x^{-1}). Si $v(x) = v(1 - x) = 0$, c'est immédiat. Si

$v(x) > 0$, on a $v(1-x) = 0$ et $\overline{1-x} = 0$, donc la relation est encore vraie. Enfin, si $v(1-x) > 0$, on se ramène au cas précédent en échangeant x et $1-x$.

Il est clair que S_π est surjectif. Pour voir que ∂ ne dépend pas du choix de π, il suffit de le calculer sur un symbole. En utilisant le lemme C.1.13, il suffit de calculer

$$S_\pi\{u_1, \ldots, u_n\} = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}, \text{ donc } \partial\{u_1, \ldots, u_n\} = 0.$$

$$S_\pi\{u_1, \ldots, u_{n-1}, \pi u_n\} = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}\}(\{u_n\} + \Pi), \text{ donc } \partial\{u_1, \ldots, u_n\} = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}\}.$$

Ce calcul montre également que l'image d'un symbole par ∂ est un symbole, et la formule $\partial(x) = s_\pi(\{\pi\} \cdot x)$ s'en déduit immédiatement.

Il est clair que $J := \{1 + \pi A\} K_*^M(K) \subset \operatorname{Ker} S_\pi$. Pour voir l'inclusion inverse, on va définir une section $s : K_*^M(k, \Pi) \to K_*^M(K)/J$ de l'homomorphisme induit par S_π. Posons (cf. lemme C.1.6)

$$s(\{\bar{u}\}) = \{u\}(u \in A^*), s(\Pi) = \{\pi\}.$$

Pour voir que s est bien défini, il suffit de vérifier que $s(\{\bar{u}\})$ ne dépend pas du choix de u et que $s(\{\bar{u}\})s(\{1-\bar{u}\}) = 0$ pour $\bar{u} \neq 1$, ce qui est immédiat.

Enfin, la dernière assertion résulte immédiatement du calcul de $\operatorname{Ker} S_\pi$. □

Passons maintenant à l'anneau de Witt :

***C.1.15. Théorème* (Springer [201]).** — *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Supposons* $\operatorname{car} k \neq 2$ *(donc* $\operatorname{car} K \neq 2$*).*

a) *Il existe un unique homomorphisme de groupes*

$$\partial^1 : W(K) \longrightarrow W(k)$$

tel que $\partial^1(\langle u \rangle) = \langle \bar{u} \rangle$ si $u \in A^*$ et $\partial^1(\langle a \rangle) = 0$ si $v(a)$ est impaire, où $\bar{u}$ est l'image résiduelle de u.

b) *Soit π une uniformisante de A. Posons*

$$\partial^2_\pi(q) = \partial^1(\pi q)$$

pour tout $q \in W(K)$. Alors

(i) $\operatorname{Ker} \partial^2_\pi$ *est un sous-anneau de $W(K)$, indépendant du choix de π.*

(ii) *Pour tout $n > 0$, on a $\partial^2_\pi(P_n(K)) = GP_{n-1}(k)$ et $\partial^2_\pi(I^n(K)) = I^{n-1}(k)$.*

c) *L'homomorphisme $\partial^1 + \partial^2_\pi : W(K) \to W(k)$ est un homomorphisme surjectif d'anneaux.*

d) *Posons*

$$W(k, \Pi) = W(k)[t]/(t^2 - \langle 1, 1 \rangle t).$$

et notons Π l'image de t dans $W(k, \Pi)$. Alors l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \partial_\pi : W(K) &\longrightarrow W(k, \Pi) \\ q &\longmapsto \partial^1 q + \partial^2_\pi q - \Pi \partial^2_\pi q \end{aligned}$$

est un homomorphisme surjectif d'anneaux.

e) *Si A est complet, ∂_π est un isomorphisme.*

Démonstration. — L'unicité est claire. Pour voir l'existence, il suffit de vérifier que la règle respecte les relations définissant $W(K)$ (proposition 1.3.5). Soient $a, b \in K^*$ tels que $a+b \neq 0$: il faut montrer que

$$\partial^1\langle a\rangle + \partial^1\langle b\rangle = \partial^1\langle a+b\rangle + \partial^1\langle ab(a+b)\rangle \in W(k). \tag{C.1.1}$$

On peut supposer $v(a) \leq v(b)$; de plus, quitte à multiplier a et b par un même carré, on peut supposer $v(a) = 0$ ou 1. Distinguons plusieurs cas :

1) $v(a) = v(b) = v(a+b) = 0$. (C.1.1) est clair.

2) $v(a) = v(b) = 0$, $v(a+b)$ impair. Alors $\langle\bar b\rangle = -\langle\bar a\rangle$ et $\partial^1\langle a+b\rangle = \partial^1\langle ab(a+b)\rangle = 0$, d'où (C.1.1).

3) $v(a) = v(b) = 0$, $v(a+b)$ pair > 0. Écrivons $a+b = \pi^{2n}u$ avec $u \in A^*$ (π est une uniformisante de A). On a $\langle\bar b\rangle = \langle-\bar a\rangle$; d'autre part, $\partial^1\langle a+b\rangle = \langle\bar u\rangle$ et $\partial^1\langle ab(a+b)\rangle = \langle\bar a\bar b\bar u\rangle = -\langle\bar u\rangle$, donc (C.1.1) est encore vrai.

4) $v(a) = 0$, $v(b)$ impair. Alors $v(a+b) = 0$. On a $\partial^1\langle a\rangle = \langle\bar a\rangle$, $\partial^1\langle b\rangle = 0$, $\partial^1\langle a+b\rangle = \langle\bar a\rangle$ et $\partial\langle ab(a+b)\rangle = 0$. (C.1.1) est vérifié.

5) $v(a) = 0$, $v(b)$ pair > 0. Écrivons $b = \pi^{2n}u$, $u \in A^*$. Alors $\partial^1\langle a\rangle = \langle\bar a\rangle$, $\partial^1\langle b\rangle = \langle\bar u\rangle$, $\partial^1\langle a+b\rangle = \langle\bar a\rangle$, $\partial^1\langle ab(a+b)\rangle = \langle\bar u\rangle$, d'où de nouveau (C.1.1).

6) $v(a) = v(b) = 1$, $v(a+b)$ impair. Tous les termes de (C.1.1) sont nuls.

7) $v(a) = v(b) = 1$, $v(a+b)$ pair. On peut écrire $a = \pi u$, $b = \pi v$ avec $u, v \in A^*$ et $u+v = \pi^m w$ avec m impair et $w \in A^*$. On a $\partial^1\langle a\rangle = \partial^1\langle b\rangle = 0$, $\partial^1\langle a+b\rangle = \langle\bar w\rangle$, $\partial^1\langle ab(a+b)\rangle = \langle\bar u\bar v\bar w\rangle = -\langle\bar w\rangle$, donc (C.1.1) est encore vérifié.

8) $v(a) = 1$, $v(b)$ impair > 1. Alors $v(a+b) = 1$; tous les termes de (C.1.1) sont nuls.

9) $v(a) = 1$, $v(b)$ pair. Écrivons $b = \pi^{2n}u$ avec $u \in A^*$. Alors $\partial^1\langle a\rangle = 0$, $\partial^1\langle b\rangle = \langle\bar u\rangle$, $\partial^1\langle a+b\rangle = 0$ et $\partial^1\langle ab(a+b)\rangle = \partial^1\langle b(1+b/a)\rangle = \langle\bar u\rangle$, d'où encore (C.1.1).

Soit q une forme quadratique sur K. On peut écrire

$$q = \langle a_1, \dots, a_r\rangle \perp \pi\langle b_1, \dots, b_s\rangle$$

où $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in A^*$. Il est clair que

$$\begin{aligned}
\partial^1 q &= \langle\bar a_1, \dots, \bar a_r\rangle\\
\partial^2_\pi q &= \langle\bar b_1, \dots, \bar b_s\rangle\\
\partial^1 q + \partial^2_\pi q &= \langle\bar a_1, \dots, \bar a_r, \bar b_1, \dots, \bar b_s\rangle\\
\partial_\pi q &= \langle\bar a_1, \dots, \bar a_r, \bar b_1, \dots, \bar b_s\rangle - \Pi\langle b_1, \dots, b_s\rangle.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}\partial^2_\pi$ est le sous-groupe de $W(K)$ engendré par les $\langle u\rangle$ pour $u \in A^*$; en particulier, c'est un sous-anneau de $W(K)$, indépendant du choix de π. On voit aussi tout de suite que $\partial^1 + \partial^2_\pi$ est un homomorphisme d'anneaux, qui est évidemment surjectif. Le fait que ∂_π soit un homomorphisme d'anneaux se vérifie sur les générateurs $\langle a\rangle$ de $W(F)$; il est également clair qu'il est surjectif. Pour montrer b) (ii), on déduit du lemme C.1.13 que toute n-forme de Pfister φ sur K s'écrit soit

$\langle\langle u_1, \ldots, u_n\rangle\rangle$, soit $\langle\langle u_1, \ldots, u_{n-1}, \pi u_n\rangle\rangle$, où les u_i sont des unités de A. Dans le premier cas, on obtient $\partial_\pi^2\varphi = 0$; dans le deuxième, on trouve

$$\partial_\pi^2\varphi = \partial_\pi^2(\langle\langle u_1, \ldots, u_{n-1}\rangle\rangle) - \partial_\pi^2(\pi u_n\langle\langle u_1, \ldots, u_{n-1}\rangle\rangle) = -\bar{u}_n\langle\langle \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}\rangle\rangle.$$

Le noyau de ∂_π contient visiblement l'idéal de $W(F)$ engendré par les $\langle 1+a\rangle - \langle 1\rangle$, $a \in \mathfrak{m}$. On voit qu'il y a égalité comme dans la démonstration du théorème C.1.14. La bijectivité de ∂_π quand A est complet en résulte. □

Passons enfin à la cohomologie :

C.1.16. Théorème. — *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Supposons* $\operatorname{car} k \neq 2$.

a) *Il existe pour tout $n > 0$ un homomorphisme*

$$\partial : H^n K \longrightarrow H^{n-1} k$$

tel que

(i) *Pour $n = 1$, $\partial(a) \equiv v(a) \pmod 2$, où $a \in K^*$.*

(ii) *Pour $n > 1$, $\partial(x \cdot (a)) = (\partial x)(\bar{a})$, où $x \in H^{n-1}K$ et $a \in A^*$.*

b) *Si A est complet, il existe pour tout $n > 0$ une suite exacte*

$$0 \longrightarrow H^n k \longrightarrow H^n K \xrightarrow{\partial} H^{n-1} k \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Voir [**9**, p. 475], [**197**, p. 121]. □

C.2. Extensions rationnelles

Soit F un corps commutatif. L'anneau de polynômes $F[t]$ est principal : pour tout polynôme irréductible unitaire P, l'anneau $F[t]_{(P)}$ est un anneau de valuation discrète de corps des fractions $F(t)$. Notons I l'ensemble de ces polynômes, et soit pour tout $P \in I$ $F(P) = F[t]/(P)$ le corps résiduel de $F[t]_{(P)}$. D'après les théorèmes C.1.14, C.1.15 et C.1.16, on dispose d'homomorphismes résidus

$$\begin{aligned}\partial_P : K_n^M(F(t)) &\longrightarrow K_{n-1}^M(F(P))\\ \partial_P^2 : W(F(t)) &\longrightarrow W(F(P))\\ \partial_P : H^n F(t) &\longrightarrow H^{n-1} F(P).\end{aligned}$$

C.2.1. Théorème **(Tate-Milnor** [**162**, th. 2.3]**).** — *Pour tout corps F et tout $n >$ 0, la suite*

$$0 \longrightarrow K_n^M(F) \longrightarrow K_n^M(F(t)) \xrightarrow{(\partial_P)} \bigoplus_{P\in I} K_{n-1}^M F(P) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. — Voir [**162**], [**29**, th. 5.1]. □

C'est le théorème C.2.1 qui permet de définir le transfert en K-théorie de Milnor (cf. proposition 9.2.1). Pour cela, on a besoin d'un anneau de valuation discrète supplémentaire : c'est l'ensemble A des fractions rationnelles $P/Q \in F(t)$ telles que $\deg P \leq \deg Q$. L'anneau A est le localisé de $F[1/t]$ par rapport à l'idéal maximal $(1/t)$. Son corps résiduel $F(\infty)$ n'est autre que F.

Notons ∞ la valuation discrète correspondant à A. D'après le théorème C.2.1, il existe un unique homomorphisme N de degré 0 faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_*^M(F(t)) & \xrightarrow{(\partial_P)} & \bigoplus_{P\in I} K_*^M(F(P)) \\ {\scriptstyle -\partial_\infty}\downarrow & & {\scriptstyle N}\downarrow \\ K_*^M(F) & \xleftarrow{Id} & K_*^M(F). \end{array}$$

(cf. [**29**, p. 378]).

Cet homomorphisme se décompose en des homomorphismes

$$N_P : K_n^M(F(P)) \longrightarrow K_n^M(F);$$

si l'on définit N_∞ comme étant l'identité, on obtient la suite exacte suivante, variante de celle du théorème C.2.1 :

$$\text{(C.2.1)}\quad 0 \longrightarrow K_n^M(F) \longrightarrow K_n^M(F(t)) \xrightarrow{\partial_P} \bigoplus_{P\in I\cup\{\infty\}} K_{n-1}^M F(P) \xrightarrow{N_P} K_{n-1}^M(F) \longrightarrow 0.$$

On vérifie que, pour $n = 0$, N_P est la multiplication par $[F(P) : F]$ et que, pour $n = 1$, N_P s'identifie à la norme $N_{F(P)/F}$. Étant donné une extension finie E/F, on peut la décomposer en une tour d'extensions monogènes E_{i+1}/E_i, avec $E_0 = F$, $E_r = E$ et, pour tout i, $E_{i+1} = E_i(P_i)$ où P_i est un polynôme irréductible unitaire sur E_i. On souhaite alors poser

$$N = N_{P_0} \circ \cdots \circ N_{P_{r-1}}.$$

Le problème est de montrer que cette définition ne dépend ni de la tour choisie, ni du choix des polynômes P_i. Ceci est démontré partiellement par Bass-Tate [**29**, (5.9)] et complété par Kato [**117**, §1.7].

C.2.2. Théorème. — *Pour tout corps F de caractéristique différente de 2 et tout $n > 0$, la suite*

$$0 \longrightarrow H^nF \longrightarrow H^nF(t) \xrightarrow{(\partial_P)} \bigoplus_{P\in I\cup\{\infty\}} H^{n-1}F(P) \xrightarrow{(\mathrm{Cor}_{F(P)/F})} H^{n-1}F \longrightarrow 0$$

est exacte. En particulier, $H^nF \longrightarrow H^nF(t)$ est injectif.

Démonstration. — Voir [**9**, Satz 4.17]. □

C.2.3. Corollaire. — *Soit K/F une extension transcendante pure. Alors, pour tout $n \geq 0$, l'application $H^nF \to H^nK$ est injective.*

Démonstration. — On peut supposer $K = F(t)$; alors cela résulte du théorème C.2.2. □

On a aussi :

***C.2.4. Théorème* (Milnor).** — *Pour tout corps F de caractéristique différente de 2 et tout $n > 0$, la suite*

$$0 \longrightarrow W(F) \longrightarrow W(F(t)) \xrightarrow{(\partial_P^2)} \bigoplus_{P \in I} W(F(P)) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. — Voir [**146**, ch. IX, th. 3.1]. □

C.3. Compatibilités

C.3.1. Théorème. — *Soit E/F une extension finie, où F est un corps de caractéristique différente de 2. Alors, pour tout $n > 0$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(E)/2 & \xrightarrow{b^n} & H^n E \\ {\scriptstyle N_{E/F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Cor}_{E/F}} \\ K_n^M(F)/2 & \xrightarrow{b^n} & H^n F \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Voir [**117**, lemme 3]. □

C.3.2. Théorème. — *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Supposons* $\operatorname{car} k \neq 2$. *Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(K)/2 & \xrightarrow{b^n} & H^n K \\ {\scriptstyle \partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ K_{n-1}^M(k)/2 & \xrightarrow{b^{n-1}} & H^{n-1} k \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Voir [**117**, lemme 1]. □

C.3.3. Théorème. — *Dans la situation du théorème C.3.2, soit L/K une extension non ramifiée et soit B la fermeture intégrale de A dans L. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de*

A, et soit S l'ensemble des idéaux maximaux de B. Alors les diagrammes suivants sont commutatifs ($\mathfrak{p} \in S$) *:*

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(L) & \xrightarrow{\partial_\mathfrak{p}} & K_{n-1}^M(k_\mathfrak{p}) \\ {\scriptstyle \mathrm{Res}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle e_\mathfrak{p}\,\mathrm{Res}} \\ K_n^M(K) & \xrightarrow{\partial_\mathfrak{m}} & K_{n-1}^M(k) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_n^M(L) & \xrightarrow{(\partial_\mathfrak{p})} & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} K_{n-1}^M(k_\mathfrak{p}) \\ {\scriptstyle N_{L/K}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (N_{k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{m})})} \\ K_n^M(K) & \xrightarrow{\partial_\mathfrak{m}} & K_{n-1}^M(k) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H^n(L) & \xrightarrow{\partial_\mathfrak{p}} & H^{n-1}k_\mathfrak{p} \\ {\scriptstyle \mathrm{Res}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle e_\mathfrak{p}\,\mathrm{Res}} \\ H^nK & \xrightarrow{\partial_\mathfrak{m}} & H^{n-1}k \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^nL & \xrightarrow{(\partial_\mathfrak{p})} & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} H^{n-1}k_\mathfrak{p} \\ {\scriptstyle \mathrm{Cor}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Cor}_{k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{m})})} \\ H^nK & \xrightarrow{\partial_\mathfrak{m}} & H^{n-1}k. \end{array}$$

Démonstration. — La commutativité du premier diagramme se vérifie sur les symboles. Pour le deuxième, voir [**117**, §1.7]. Pour les énoncés cohomologiques, voir [**9**, Sätze 4.13 et 4.14]. □

C.4. Courbes algébriques

Dans cette section, nous supposons le lecteur familier avec le langage de la géométrie algébrique et avec des rudiments de celle-ci. Il peut les acquérir par exemple dans Hartshorne [**65**].

C.4.1. Définition. — Soit F un corps commutatif. Une *courbe algébrique* sur F est une F-variété algébrique de dimension 1 (cf. [**65**, ch. I]).

Soit X une courbe algébrique sur F. On a $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, où (U_i) est une famille finie d'ouverts affines. On a donc $U_i = \operatorname{Spec} R_i$, où R_i est une F-algèbre de type fini, de dimension de Krull 1.

Si x est un point fermé de x, le corps résiduel de X en x est une extension finie de F : il est noté $F(x)$.

C.4.2. Proposition. — *Soit X une courbe algébrique sur F. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est normale.*
(ii) *Pour tout point fermé $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète.*
(iii) *X est non singulière (ou lisse si F est parfait).*

Démonstration. — Voir [**65**, ch. II, §6]. □

C.4.3. Définition. — Une courbe X sur un corps F est *absolument irréductible* (ou géométriquement irréductible) si $X \otimes_F F_s$ est irréductible, où F_s est une clôture séparable de F.

C.4.4. Théorème

a) *Une courbe projective régulière irréductible sur F est déterminée par son corps des fonctions. Plus précisément, soient $\mathcal{A}$ la catégorie des courbes projectives régulières irréductibles sur F où les morphismes sont les F-morphismes non constants, $\mathcal{B}$ la catégorie des corps de fonctions d'une variable sur F et $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ le foncteur (contravariant) qui envoie un courbe C sur son corps des fonctions $F(C)$. Alors T est une équivalence de catégories. De plus, C est absolument irréductible si et seulement si l'extension $F(C)/F$ est régulière.*

b) *Soit X une courbe affine régulière sur un corps F. Alors X se plonge dans une unique courbe projective régulière $\tilde{X}$, la* complétée projective *de X.*

Démonstration

a) Voir [**65**, ch. I, §6] (l'hypothèse F algébriquement clos n'est pas nécessaire). Rappelons le principe de la construction d'un quasi-inverse de T : si K est un corps de fonctions d'une variable sur F, c'est-à-dire une extension de F de type fini et de degré de transcendance 1, on montre que l'ensemble des sous-anneaux de valuations discrète de K contenant F est en bijection avec les points fermés d'une courbe projective régulière de corps des fonctions K. Ce résultat ne subsiste pas en dimension supérieure.

b) se déduit de a).

□

C.4.5. Exemple. — La droite affine $\mathbf{A}^1_F = \operatorname{Spec} F[t]$ est une courbe affine lisse de corps des fonctions $F(t)$. Sa complétée projective est la droite projective $\mathbf{P}^1_F$.

À partir de maintenant, le mot « courbe »désigne une courbe algébrique projective et lisse. Sauf mention expresse du contraire, « point de X »signifie « point fermé de X ».

C.4.6. Définition. — Soit X une courbe irréductible sur F.

a) Le *groupe des diviseurs* sur X est le groupe libre $\operatorname{Div}(X)$ sur l'ensemble des points de X.

b) L'application $x \mapsto [F(x) : F]$ s'étend par linéarité en une fonction

$$\deg : \operatorname{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

c) Soit K le corps des fonctions de X, et soit $f \in K^*$. Pour tout point $x \in X$, notons v_x la valuation discrète associée à l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Le *diviseur* de f est

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{x \in X} v_x(f) x \in \operatorname{Div}(X).$$

La fonction div est un homomorphisme de K^* vers $\mathrm{Div}(X)$: son image est appelée le *groupe des diviseurs principaux* de X et noté $Dp(X)$.

d) Le *groupe de Picard* de X est le groupe $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X)/Dp(X)$.

Si X n'est pas irréductible, on a $X = \coprod_{i\in I} X_i$ où les X_i sont les composantes irréductibles de X. On pose alors $\mathrm{Div}(X) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Div}(X_i)$, $\mathrm{Pic}(X) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Pic}(X_i)$.

Soit $f : Y \to X$ un morphisme non constant entre deux courbes. Alors f induit deux homomorphismes

$$f^* : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Div}(Y), \qquad f_* : \mathrm{Div}(Y) \longrightarrow \mathrm{Div}(X).$$

Pour définir f^* et f_*, il suffit de donner leur valeur sur les points de X et Y. Si $x \in X$, on définit

$$f^*x = \sum_{f(y)=x} e_y y$$

où e_y est l'indice de ramification de $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{X,x}$. Si $y \in Y$, on définit

$$f_*y = f_y f(y)$$

où f_y est le degré résiduel $[F(y) : F(x)]$. On a $f_*f^* = \deg(f) := [F(Y) : F(X)]$ et

$$\deg(f^*D) = \deg(f)\deg(D), \qquad \deg(f_*D') = \deg(D')$$

pour tout $(D, D') \in \mathrm{Div}(X) \times \mathrm{Div}(Y)$; cela résulte de la proposition C.1.9 pour la première formule, et c'est trivial pour la seconde. De plus, on a

$$f^*\operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(f^*g), \qquad f_*\operatorname{div}(g') = \operatorname{div}(N_f(g))$$

pour $(g, g') \in F(X)^* \times F(Y)^*$, f^*g est l'image de f dans $F(Y)$ et $N_f(g')$ est la norme de g'. Par conséquent, f^* et f_* induisent des homomorphismes

$$f^* : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y), \qquad f_* : \mathrm{Pic}(Y) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X).$$

En particulier, si $f \in F(X)^*$ n'est pas constant, f définit un morphisme $X \to \mathbf{P}^1_F$, associé à l'homomorphisme de corps $F(t) \to F(X)$ envoyant t sur f. On a donc un morphisme $f^* : \mathrm{Div}(\mathbf{P}^1_F) \to \mathrm{Div}(X)$. Comme le diviseur de t dans $\mathrm{Div}(\mathbf{P}^1_F)$ est $0-\infty$, on trouve

$$\operatorname{div}(f) = f^*(0-\infty).$$

C.4.7. Lemme

a) *Pour X comme dans la définition C.4.6, on a* $\operatorname{Ker}\operatorname{div} = F^*$ *si X est absolument irréductible.*

b) *Pour tout $f \in K^*$, on a* $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$. *Par conséquent, la fonction degré se factorise en*

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Son noyau est noté $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Démonstration. — Soit $f \in K^*$ non constante. Considérons f comme un morphisme $X \to \mathbf{P}^1_F$ comme ci-dessus. La proposition C.1.9 montre en particulier que l'application induite par f des points fermés de X vers les points fermés de $\mathbf{P}^1_F$ est *surjective*. En particulier, $\operatorname{div}(f) = f^*(0 - \infty) \neq 0$. De plus,

$$\deg(\operatorname{div}(f)) = \deg(f^*(0-\infty)) = \deg(f)\deg(0-\infty) = 0.$$

□

Soit X une courbe absolument irréductible sur F. Le *genre* de X est un entier $g \geq 0$. Il peut être défini de plusieurs manières différentes :

1. Notons $\bar{X} = X \otimes_F F_s$, où F_s est une clôture séparable de F. Le groupe $\operatorname{Pic}^0(\bar{X})$ a une structure canonique de variété abélienne sur F_s ; g est la dimension de cette variété abélienne.
2. Pour tout $l \neq \operatorname{car} F$, le sous-groupe de l-torsion de $\operatorname{Pic}(\bar{X})$ est de rang $2g$ sur $\mathbb{F}_l$.
3. $g = \dim_F H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Ces conditions montrent que le genre est invariant par extension des scalaires. Dans ce livre, nous n'aurons besoin que de considérer des courbes de genre zéro. Pour une telle courbe X, on a $\bar{X} \simeq \mathbf{P}^1_{F_s}$ [**65**, ch. IV, ex. I.3.5].

C.4.8. Lemme. — *Sur un corps F de caractéristique $\neq 2$, toute conique est de genre zéro.*

Démonstration. — Soit X une conique d'équation $X^2 - aY^2 - bZ^2 = 0$, où $a, b \in F^*$. Sur $F(\sqrt{a})$, X devient isotrope, donc son corps des fonctions est transcendant pur. Par conséquent, $X_{F(\sqrt{a})} \simeq \mathbf{P}^1_{F(\sqrt{a})}$ (théorème C.4.4 b)) et X est de genre zéro. □

C.4.9. Remarque. — On peut montrer que la réciproque est vraie : toute courbe projective, lisse et absolument irréductible de genre zéro sur un corps de caractéristique différente de 2 est une conique.

C.4.10. Lemme. — *Soit X une courbe absolument irréductible sur F, et soit $\bar{X} = X \otimes_F F_s$, où F_s est une clôture séparable de F. Alors l'application* $\operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(\bar{X})$ *est injective.*

Démonstration. — Soit $d \in \operatorname{Div}(X)$ tel que $d_{F_s} = \operatorname{div}(f)$, où $f \in F_s(X)^*$. Soit $G = Gal(F_s/F)$. Pour $g \in G$, on a $\operatorname{div}({}^g f) = g \operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(f)$, d'où $a_g := {}^g f/f \in F_s^*$ pour tout $g \in G$ (lemme C.4.7 a)). L'application $g \mapsto a_g$ est un 1-cocycle continu de G à valeurs dans F_s^*. Par le corollaire B.4.3, il existe $b \in F_s^*$ tel que $a_g = {}^g b/b$ pour tout $g \in G$. Par conséquent, $f' := f/b \in F(X)^*$ et $d = \operatorname{div}(f')$ est principal. □

C.4.11. Proposition. — *Pour toute conique C, l'homomorphisme* $\deg : \operatorname{Pic}(C) \to \mathbb{Z}$ *est injectif, d'image*

$$\begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } C \textit{ est isotrope} \\ 2\mathbb{Z} & \textit{si } C \textit{ est anisotrope.} \end{cases}$$

Démonstration. — Sur F_s cela résulte de [**65**, ch. II, prop. 6.4] (ou du fait que $\mathrm{Pic}^0(\mathbf{P}^1_{F_s}) = 0$ puisque $\mathbf{P}^1$ est de genre 0). Sur F, le lemme C.4.10 montre que deg est injectif. Si X est isotrope, elle est isomorphe à $\mathbf{P}^1_F$ qui a des points rationnels, donc deg est surjectif. Si X est anisotrope, la valeur de son image résulte du théorème 1.5.1 : en effet, pour toute courbe X et tout point $x \in X$, la courbe $X_{F(x)}$ a (évidemment) un point rationnel, donc si X est une conique anisotrope, le théorème 1.5.1 implique que tout point de X est de degré pair ; d'autre part, X a des points de degré 2, par exemple les images réciproques des points rationnels de P^1_F *via* un morphisme $X \to \mathbf{P}^1_F$ de degré 2 (cf. début de la section 3.1). □

C.5. Le théorème de Riemann-Roch

Dans cette section et les suivantes, toutes les courbes sont lisses et projectives.

Soit D un diviseur sur un courbe irréductible X. On dit que D est *effectif* si $D = \sum_{x\in X} m_x x$, où tous les m_x sont ≥ 0. Soit D un diviseur quelconque sur X. On lui associe un sous-espace vectoriel $L(D)$ de $F(X)$:

$$L(D) = \{f \in F(X)^* \mid \mathrm{div}(f) + D \,\text{est effectif}\} \cup \{0\}.$$

(Le fait que $L(D)$ est bien un sous-espace vectoriel de $F(X)$ est laissé en exercice.)

Pour $g \in F(X)^*$, on a

$$L(D + (g)) = gL(D)$$

donc $L(D)$ ne dépend, à isomorphisme près, que de la classe de D dans $\mathrm{Pic}(X)$. D'autre part, il est clair que $L(D) \neq 0 \Rightarrow \deg(D) \geq 0$.

C.5.1. Théorème **(théorème de Riemann-Roch)**

a) *Pour tout diviseur $D \in \mathrm{Pic}(X)$, on a $l(D) := \dim L(D) < +\infty$.*

b) *Il existe un diviseur $K \in \mathrm{Pic}(X)$ tel que, pour tout diviseur $D \in \mathrm{Pic}(X)$, on ait*

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

où g est le genre de X.

Démonstration. — Voir [**65**, ch. IV, th. 1.3]. □

(La classe K est associée au *faisceau canonique* sur X, cf. [**65**, p. 295] : cela nous entraînerait trop loin.)

C.5.2. Corollaire. — *Supposons X de genre* 0*. Alors, pour tout $D \in \mathrm{Pic}(X)$, on a*

$$l(D) = \begin{cases} \deg(D) + 1 & \textit{si } \deg(D) \geq 0 \\ 0 & \textit{si } \deg(D) < 0. \end{cases}$$

Démonstration. — En appliquant le théorème de Riemann-Roch à $D = 0$ puis à $D = K$, on obtient

$$l(0) - l(K) = 1, \qquad l(K) - l(0) = \deg(K) + 1$$

d'où $\deg(K) = 2$. Le cas $\deg(D) < 0$ du corollaire est clair. Si $\deg(D) > 0$, alors $\deg(K - D) < 0$ et la conclusion résulte du théorème C.5.1. $\square$

C.5.3. Corollaire. — [**221**, cor. 2.7] *Supposons X de genre 0 et soient $x \in X$, $D \in \mathrm{Div}(X)$ tels que $\deg(x) = \deg(D)$. Si $v_x(D) = 0$, alors l'application*

$$\begin{aligned} \rho : L(D) &\longrightarrow F(x) \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est surjective.

Démonstration. — L'application ρ est F-linéaire. Par le corollaire C.5.2, $\dim L(D) = \deg(D) + 1 = [F(x) : F] + 1$. L'hypothèse implique que $\operatorname{Ker} \rho = L(D - x)$; en réappliquant le corollaire C.5.2, on en déduit $\dim \operatorname{Ker} \rho = 1$, d'où l'énoncé. $\square$

C.6. Réciprocité de Weil

Dans cette section, toutes les courbes sont lisses et projectives.

C.6.1. Proposition. — *Soit X une courbe sur un corps F. Alors, pour tout $n > 0$, on a un complexe*

$$0 \longrightarrow K_n^M(F) \longrightarrow K_n^M(F(X)) \xrightarrow{\ \partial\ } \bigoplus_{x \in X} K_{n-1}^M(F(x)) \xrightarrow{\ \nu\ } K_{n-1}^M(F) \longrightarrow 0$$

où $\partial = (\partial_x)_{x \in X}$ et où ν est donné par la collection des $N_{F(x)/F}$.

Démonstration. — Il faut montrer que $\nu \circ (\partial_x) = 0$. Soit $f \in F(X)$ une fonction non constante, considérée comme morphisme $X \to \mathbf{P}^1_F$. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} K_n^M(F(X)) & \xrightarrow{\ \partial\ } & \displaystyle\bigoplus_{x \in X} K_{n-1}^M(F(x)) & \xrightarrow{\ \nu\ } & K_{n-1}^M(F) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \| \\ K_n^M(F(t)) & \xrightarrow{\ \partial\ } & \displaystyle\bigoplus_{x \in \mathbf{P}^1_F} K_{n-1}^M(F(x)) & \xrightarrow{\ \nu\ } & K_{n-1}^M(F). \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est donnée par la transfert en K-théorie de Milnor (proposition 9.2.1) et, pour $(x, y) \in \mathbf{P}^1_F \times X$, la composante $f_{*(x,y)}$ de la flèche verticale du centre est 0 si $f(y) \neq x$ et est donnée par $f_{*(x,y)} = N_{F(y)/F(x)}$ si $f(y) = x$. Dans ce diagramme, le carré de gauche est commutatif grâce au théorème C.3.3 et le carré de droite est commutatif grâce au théorème 9.2.1. La proposition C.6.1 résulte maintenant du théorème C.2.1. $\square$

C.6.2. Remarque. — Prenons $n = 1$ dans la proposition C.6.1. Alors le complexe devient

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow F(X)^* \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

et on retrouve le lemme C.4.7 b). Cette suite est exacte en F^* et en $F(X)^*$ d'après le lemme C.4.7 a) ; si X est une conique, elle est aussi exacte en $\mathrm{Div}(X)$ et d'homologie $\mathbb{Z}/2$ ou 0 et $\mathbb{Z}$ selon que X est anisotrope ou non, d'après la proposition C.4.11.

On démontre de même :

C.6.3. Proposition. — *Soit X une courbe sur un corps F de caractéristique $\neq 2$. Alors, pour tout $n > 0$, on a un complexe*

$$0 \longrightarrow H^nF \longrightarrow H^nF(X) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x\in X} H^{n-1}F(x) \xrightarrow{\nu} H^{n-1}F \longrightarrow 0$$

où $\partial = (\partial_x)_{x\in X}$ et où ν est donné par la collection des $\mathrm{Cor}_{F(x)/F}$.

APPENDICE D

UN APERÇU SUR LES FORMES QUADRATIQUES EN CARACTÉRISTIQUE 2

par Ahmed Laghribi

D.1. Introduction

Le but de cet appendice est de donner au lecteur une brève idée de l'état actuel de la théorie algébrique des formes quadratiques en caractéristique 2, et de lui permettre ainsi de voir certaines des différences qui apparaissent quand on passe de la caractéristique $\neq 2$ à la caractéristique 2. C'est en caractéristique $\neq 2$ que la théorie algébrique des formes quadratiques a connu le plus grand intérêt depuis plusieurs années, ce qui explique l'existence de certains théorèmes puissants en cette caractéristique. Néanmoins, la théorie en caractéristique 2 a connu récemment un renouveau qui lui permet d'avoir un statut à part. La caractéristique 2 possède ses propres techniques qui la distinguent de la caractéristique $\neq 2$. Parfois, il est difficile d'étendre complètement à la caractéristique 2 un théorème bien connu en caractéristique $\neq 2$, et parfois il arrive qu'on démontre un important théorème en caractéristique 2 par des calculs simples, alors qu'en caractéristique $\neq 2$ on n'arrive pas à démontrer son analogue ou on le démontre avec des méthodes très sophistiquées.

Notre exposé est centré sur la théorie des corps de fonctions des quadriques, y compris les quadriques singulières, puisque c'est cette partie de la théorie algébrique des formes quadratiques en caractéristique 2 qui a connu récemment des avancées.

Décrivons maintenant le contenu de cet appendice. Après un bref rappel de quelques notions de base sur les formes quadratiques et bilinéaires, on expliquera la façon dont une forme quadratique se normalise[(1)], puis on parlera de la diagonalisation d'une forme bilinéaire (symétrique non dégénérée). Après cela, on évoquera la simplification de Witt et la décomposition de Witt pour les formes quadratiques et bilinéaires. On donne aussi au lecteur une brève idée sur l'invariant d'Arf d'une forme quadratique

[(1)] Pour les formes quadratiques en caractéristique 2, le terme « normalisation » vient remplacer « diagonalisation »puisqu'on va voir que dans une base convenable, une forme quadratique ne s'écrit pas toujours de façon diagonale.

non singulière. Cet invariant est l'analogue du discriminant à signe en caractéristique $\neq 2$. On introduit l'anneau de Witt des formes bilinéaires et le groupe de Witt des formes quadratiques non singulières. On définit ensuite la relation de sous-forme entre les formes quadratiques, puis on donne l'analogue du classique théorème de sous-forme de Cassels et Pfister. On incorpore aussi la version de ce théorème pour les formes bilinéaires.

Une importante classe de formes quadratiques qui est traitée est celle des formes de Pfister. En caractéristique 2, on s'aperçoit qu'à cette classe s'ajoutent de nouvelles formes dites quasi-formes de Pfister. Ces dernières jouent le rôle des formes de Pfister pour les formes quadratiques totalement singulières, et proviennent des formes bilinéaires de Pfister comme on va l'expliquer. On introduit aussi la notion de voisines des formes et quasi-formes de Pfister, et on donne la classification de ces dernières au moyen de la théorie du déploiement standard. On met également en évidence la différence entre la théorie de déploiement générique et la théorie de déploiement standard des formes quadratiques : nous verrons que cette dernière suffit pour classifier complètement les formes quadratiques excellentes. Concernant les voisines des formes de Pfister, on donne une généralisation partielle à la caractéristique 2 d'un théorème de Knebusch caractérisant celles-ci *via* une propriété de déploiement sur leur propre corps de fonctions. On ne manquera pas d'exposer les formes bilinéaires voisines introduites récemment, et leur caractérisation par un théorème analogue à celui de Knebusch pour les formes quadratiques voisines en caractéristique $\neq 2$.

En ce qui concerne le problème d'isotropie, on donne une généralisation complète à la caractéristique 2 du théorème fondamental de Hoffmann sur les dimensions séparées par une puissance de 2, puis une autre généralisation d'un important théorème d'Izhboldin sur l'équivalence birationnelle stable de deux quadriques projectives de même dimension $2^n - 1$, $n \geq 1$. Ces deux théorèmes permettent d'avoir quelques conséquences sur les formes dites à déploiement maximal.

On introduit un nouvel invariant des formes quadratiques totalement singulières, dit degré normique. Cet invariant fournit de bonnes informations sur la forme totalement singulière, comme le calcul de sa hauteur standard, et un critère pour qu'une telle forme soit une quasi-voisine de Pfister.

Une des avancées faite récemment en caractéristique 2 est celle due à Aravire et Baeza concernant le comportement des formes différentielles, de F sur F^2, sur les corps de fonctions de quadriques, et leur preuve de la conjecture du degré en caractéristique 2. Nous donnons une idée de leurs résultats qui constituent l'analogue de certains évoqués dans le chapitre 6 du présent livre, et nous terminons notre appendice par quelques calculs récents de noyaux de Witt.

Les détails des résultats que nous évoquons sont actuellement, pour la plupart, consultables dans les références [**14**], [**16**], [**22**], [**76**], [**77**] et [**134**]–[**143**]. Peu de preuves sont incorporées (sauf dans la section D.17) pour la simple raison que nous voulons rester dans le cadre d'un appendice, et que nous projetons d'écrire prochainement en collaboration avec D.W. Hoffmann un livre consacré à la théorie des corps de fonctions en caractéristique 2. Ceci aura pour but de regrouper les récents développements qu'a connus cette théorie et de compléter ainsi la littérature déjà existante sur les formes quadratiques.

Remerciements. — C'est lors d'une rencontre au séminaire N. Bourbaki de novembre 2004 que Bruno Kahn m'a demandé d'écrire cet appendice sur la caractéristique 2 pour compléter le présent livre. Je tiens à le remercier très chaleureusement de m'avoir donné cette opportunité.

Cet appendice a été révisé et complété durant un séjour à l'Universität Bielefeld pour la période mars-mai 2006. Je remercie vivement Ulf Rehmann d'avoir permis cette visite. Je remercie aussi le Sonderforschungsbereich 701 pour le soutien offert durant ce séjour.

D.2. Premières définitions

Dans tout cet appendice, F désigne un corps commutatif de caractéristique 2.

Quelques définitions et notations dont on aura besoin ont déjà été utilisées dans la partie principale de ce livre. Mais nous en rappelons tout de même certaines dans le but de préserver l'autonomie de cet appendice.

1. Une forme bilinéaire symétrique est la donnée d'un couple (V, B) formé d'un F-espace vectoriel V et d'une application $B : V \times V \to F$ telle que :
- $B(v, v') = B(v', v)$ pour tout $v, v' \in V$.
- Pour tout $v \in V$, l'application $V \to F$, donnée par : $v' \mapsto B(v, v')$ est F-linéaire.

Pour simplifier le langage, l'expression « forme bilinéaire »signifiera « forme bilinéaire symétrique ».

2. Une forme quadratique est la donnée d'un couple (V, φ) formé d'un F-espace vectoriel V et d'une application $\varphi : V \to F$ telle que :
- $\varphi(\alpha v) = \alpha^2\varphi(v)$ pour tout $v \in V$ et $\alpha \in F$.
- L'application $B_\varphi : V \times V \to F$, donnée par : $(v, w) \mapsto \varphi(v + w) - \varphi(v) - \varphi(w)$ est F-bilinéaire (symétrique). On dit que B_φ est la forme polaire associée à φ.

On dit que V est l'espace sous-jacent à la forme bilinéaire (ou quadratique) en question.

3. Pour (V, B) et (V', B') deux formes bilinéaires (resp. deux formes quadratiques), une isométrie entre (V, B) et (V', B') est la donnée d'un isomorphisme de F-espaces vectoriels $\sigma : V \to V'$ tel que $B(v, v') = B'(\sigma(v), \sigma(v'))$ (resp. $B(v) = B(\sigma(v')))$ pour tout $v, v' \in V$. Dans ce cas, on note $B \simeq B'$, et on dit que B est isométrique à B'.

4. Pour $\alpha \in F^*$ et (V, B) une forme bilinéaire (resp. une forme quadratique), on note αB la forme bilinéaire (resp. la forme quadratique) ayant pour espace sous-jacent V et donnée par : $(v, v') \mapsto \alpha B(v, v')$ (resp. $v \mapsto \alpha B(v)$) pour tout $v \in V$.

5. Deux formes bilinéaires (ou quadratiques) (V, B) et (V', B') sont dites semblables si $B \simeq \alpha B'$ pour un certain $\alpha \in F^*$.

6. À partir de deux formes bilinéaires (resp. deux formes quadratiques) (V, B) et (V', B'), on forme leur somme orthogonale qui est l'unique forme bilinéaire (resp. forme quadratique) $B \perp B'$ donnée sur la somme directe $V \oplus V'$ par : $B \perp B'(v \oplus v', w \oplus w') = B(v, w) + B'(v', w')$ (resp. $B \perp B'(v \oplus v') = B(v) + B'(v')$) pour tout $(v, v'), (w, w') \in V \times V'$.

7. Pour $n \geq 1$ un entier et B une forme bilinéaire (ou quadratique), on note $n \times B$ la somme $\underbrace{B \perp \cdots \perp B}_{n \text{ fois}}$.

8. On dit qu'une forme bilinéaire (resp. une forme quadratique) (V', B') est une sous-forme (resp. un facteur direct) d'une autre forme (V, B) s'il existe une forme (V'', B'') tel que $B \simeq B' \perp B''$. Dans ce cas, on note $B' \subset B$.

On verra que pour les formes quadratiques, la relation de facteur direct ne suffit pas pour étendre à la caractéristique 2 certains théorèmes connus en caractéristique $\neq 2$, et qu'il faut introduire une autre relation beaucoup plus subtile (cf. section D.8).

Dans la section D.7, on donnera deux autres opérations importantes. Il s'agit du produit entre deux formes bilinéaires, et le produit d'une forme quadratique par une forme bilinéaire.

9. Pour K/F une extension, et (V, C) une forme bilinéaire (resp. (V, φ) une forme quadratique), on désigne par C_K l'unique forme bilinéaire (resp. φ_K l'unique forme quadratique) d'espace sous-jacent $V \otimes_F K$, donnée par : $C_K(v \otimes \alpha, w \otimes \beta) = \alpha\beta C(v, w)$ (resp. $\varphi_K(v \otimes \alpha) = \alpha^2 \varphi(v)$ avec $B_{\varphi_K}(v \otimes \alpha, w \otimes \beta) = \alpha\beta B_\varphi(v, w)$) pour tout $(v, w) \in V^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$.

10. Pour une forme bilinéaire (resp. une forme quadratique) (V, B), on note $D_F(B)$ l'ensemble des scalaires de $F^* := F - \{0\}$ de type $B(v, v)$ (resp. de type $B(v)$).

11. Une forme bilinéaire (resp. une forme quadratique) (V, B) est dite isotrope s'il existe $v \in V - \{0\}$ tel que $B(v, v) = 0$ (resp. $B(v) = 0$). Dans le cas contraire, on dit que B est anisotrope.

12. Le radical d'une forme bilinéaire (resp. d'une forme quadratique) (V, B), qu'on note $\mathrm{rad}(B)$, est le sous-espace vectoriel de V défini par $\mathrm{rad}(B) = \{v \in V \mid B(v, V) = 0\}$ (resp. est le radical de sa forme polaire).

Dans cet appendice, on ne considère que les formes bilinéaires (et quadratiques) ayant un espace sous-jacent de dimension finie.

13. Pour (V, B) une forme bilinéaire (resp. une forme quadratique), on note $\dim B$ la dimension de V, qu'on appelle la dimension de B. Après le choix d'une F-base de V, on peut identifier B à un polynôme $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}x_iy_j$ (resp. $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}x_ix_j$) avec $\dim B = n$. Ainsi, on va souvent travailler avec ce polynôme en négligeant l'espace vectoriel V en question.

D.3. Normalisation d'une forme quadratique

En caractéristique $\neq 2$ on travaille souvent avec des formes quadratiques de radical nul. Ceci est dû, essentiellement, au fait que pour une telle caractéristique, une forme de radical non nul est isotrope. En caractéristique 2, la situation est différente. On peut avoir des formes quadratiques de radical non nul et anisotropes. Ceci motive donc l'idée de travailler avec des formes quadratiques qui peuvent présenter un radical non nul. Mais en même temps, la théorie des formes quadratiques en caractéristique 2 se ramifie, ce qui la rend riche.

Avant d'aller plus loin, faisons remarquer que la restriction d'une forme quadratique φ à son radical $\mathrm{rad}(\varphi)$ est une forme quadratique donnée par un polynôme de type :

$$a_1x_1^2 + \cdots + a_sx_s^2 \tag{D.3.1}$$

avec $a_i = \varphi(e_i)$, où $\{e_1, \dots, e_s\}$ est une F-base de $\mathrm{rad}(\varphi)$.

De plus, il est facile de voir qu'une isométrie entre deux formes quadratiques induit une isométrie entre les restrictions à leurs radicaux. Ainsi, la forme quadratique donnée dans (D.3.1) ne dépend que de la classe d'isométrie de φ.

D.3.1. Notation-Définition. — La forme quadratique donnée dans (D.3.1) s'appelle la partie quasi-linéaire de φ. On la note $\mathrm{ql}(\varphi)$.

Quand on tient compte du radical, on doit distinguer entre différents types de formes quadratiques qu'on précise dans la définition suivante :

D.3.2. Définition. — Une forme quadratique φ est dite :

(1) non singulière si $\dim \mathrm{ql}(\varphi) = 0$.
(2) totalement singulière si $\dim \varphi = \dim \mathrm{ql}(\varphi)$.
(3) singulière lorsque $\dim \mathrm{ql}(\varphi) > 0$.
(4) non défective si sa partie quasi-linéaire est anisotrope (ou nulle).

Voici des reformulations de ces notions en terme de l'espace radical :

D.3.3. Proposition. — *Soit φ une forme quadratique d'espace sous-jacent V. On a :*

(1) *φ est non singulière si et seulement si* $\mathrm{rad}(\varphi) = 0$.
(2) *φ est totalement singulière si et seulement si* $\mathrm{rad}(\varphi) = V$.
(3) *φ est singulière si et seulement si* $\mathrm{rad}(\varphi) \neq \{0\}$.
(4) *φ est non défective si et seulement si* $\mathrm{rad}^0(\varphi) = \{0\}$, *où* $\mathrm{rad}^0(\varphi) = \{v \in \mathrm{rad}(\varphi) \mid \varphi(v) = 0\}$.

On énonce un lemme très utile pour la suite :

D.3.4. Lemme. — *Soient φ une forme quadratique de dimension ≥ 1, et $\{g_1, \ldots, g_s\}$ une F-base de $\mathrm{rad}(\varphi)$. Alors, cette base se complète en une F-base*

$$\{e_1, f_1, \ldots, e_r, f_r, g_1, \ldots, g_s\}$$

de V telle que :

$$\begin{cases} B_\varphi(e_i, f_j) = \delta_{i,j} \\ B_\varphi(e_i, e_j) = B_\varphi(f_i, f_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En écriture polynomiale, on a :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} (a_i x_i^2 + x_i y_i + b_i y_i^2) + \sum_{i=1}^{s} c_i z_i^2 \tag{D.3.2}$$

avec $a_i = \varphi(e_i)$, $b_i = \varphi(f_i)$ $(1 \leq i \leq r)$, et $c_i = \varphi(g_i)$ $(1 \leq i \leq s)$.

Démonstration. — Écrivons $V = W \oplus \mathrm{rad}(\varphi)$ pour un certain sous-espace vectoriel W de V. Il est clair que $\varphi \simeq \psi \perp \mathrm{ql}(\varphi)$, où ψ est la restriction de φ à W. Si $\dim_F W = 0$, alors le lemme se déduit de (D.3.1). Supposons $\dim_F W > 0$, et soit $e_1 \in W$ non nul. Puisque ψ est une forme quadratique non singulière, il existe $f_1 \in W$ tel que $B_\psi(e_1, f_1) = B_\varphi(e_1, f_1) \neq 0$. Quitte à multiplier f_1 par un scalaire, on peut supposer $B_\psi(e_1, f_1) = 1$. Soit U le sous-espace de W engendré par e_1 et f_1. Puisque la restriction ψ' de ψ à U est une forme quadratique non singulière, on obtient par le même argument que dans [**191**, Lem. 3.4, p. 7] que $\psi \simeq \psi' \perp \psi''$ pour une certaine forme quadratique ψ''. Puisque $\dim \psi'' < \dim \psi$ et ψ'' est aussi non singulière (car $\psi'' \subset \psi$), on conclut par récurrence sur $\dim W$. □

D.3.5. Notation

(1) Pour $a, b \in F$, on note $[a, b]$ (resp. $\langle a \rangle$) la forme quadratique $ax^2 + xy + by^2$ (resp. ax^2).

(2) On note simplement $\langle a_1, \ldots, a_s \rangle$ une forme quadratique totalement singulière $\langle a_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle a_s \rangle$.

D.3.6. Définition. — Avec les notations D.3.5, l'écriture dans (D.3.2) devient

$$\varphi \simeq [a_1, b_1] \perp \cdots \perp [a_r, b_r] \perp \langle c_1, \ldots, c_s \rangle,$$

qu'on appelle une normalisation de φ.

Avec les mêmes notations que dans la définition D.3.6, et vu l'unicité de la forme $\langle c_1, \cdots, c_s \rangle$, le couple d'entiers (r, s) ne dépend alors que de la classe d'isométrie de φ.

D.3.7. Définition. — Le couple (r, s) s'appelle le type de φ.

D.3.8. Remarque. — Si $\varphi = R \perp \mathrm{ql}(\varphi)$ est de type (r, s) avec $s > 0$, alors la forme R n'est pas toujours unique comme le montre l'exemple qui suit.

D.3.9. Exemple. — Soient t une variable sur F, φ une forme quadratique sur $F(t)$ telle que $\dim\varphi - \dim \mathrm{ql}(\varphi) = 2$. Soit $B = \{e_1, f_1, g_1, \ldots, g_s\}$ une $F(t)$-base de l'espace sous-jacent à φ avec $\{g_1, \ldots, g_s\}$ une $F(t)$-base de $\mathrm{rad}(\varphi)$. On suppose qu'on a les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 0, \\ \varphi(f_1) = 1, \\ \varphi(g_1) = t^{-1}, \\ B_\varphi(e_1, f_1) = 1. \end{cases}$$

Alors, le passage de la base B à la base $B' = \{e_1+g_1, f_1, g_1, \ldots, g_s\}$ donne l'isométrie :

$$[0,1] \perp \mathrm{ql}(\varphi) \simeq [t^{-1}, 1] \perp \mathrm{ql}(\varphi) \tag{D.3.3}$$

et pourtant $[0,1] \not\simeq [t^{-1}, 1]$ car $[t^{-1}, 1]$ n'est pas isotrope.

Terminons cette section en donnant quelques isométries très simples à vérifier, et dont on se sert souvent pour passer d'une normalisation à une autre.

D.3.10. Lemme. — *Pour tous scalaires $a, b, c, d \in F$, on a :*

$$\begin{cases} [a,b] \perp [c,d] \simeq [a+c, b] \perp [c, b+d], \\ [ca, c^{-1}b] \simeq c[a,b] \quad \textit{si} \quad c \neq 0, \\ [a,b] \perp \langle c\rangle \simeq [a+c, b] \perp \langle c\rangle, \\ \langle a,b\rangle \simeq \langle a+b, b\rangle, \\ [a,b] \simeq [a, a+b+1]. \end{cases} \tag{D.3.4}$$

D.4. Diagonalisation d'une forme bilinéaire

D.4.1. Définition. — Une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de l'espace sous-jacent à une forme bilinéaire B est dite orthogonale pour B si : $B(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$.

D.4.2. Remarque. — Si B est une forme bilinéaire dont l'espace sous-jacent admet une base orthogonale $\{e_1, \cdots, e_n\}$ pour B, alors

$$B \simeq \langle a_1\rangle_b \perp \cdots \perp \langle a_n\rangle_b,$$

avec $a_i = B(e_i)$, et $\langle a\rangle_b$ désigne la forme bilinéaire de dimension 1 donnée par : $(x,y) \mapsto axy$. Dans ce cas, on dit que B est diagonalisable et on la note $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle_b$.

La diagonalisation d'une forme bilinéaire n'est pas toujours immédiate comme le montre le résultat suivant :

D.4.3. Proposition **([164**, Cor. 3.3, p. 6**]).** — *Soit B une forme bilinéaire. Alors, on a une décomposition $B \simeq \langle a_1, \cdots, a_n\rangle_b \perp C$ tel que $a_1, \cdots, a_n \neq 0$ et $C(v,v) = 0$ pour tout vecteur v de l'espace sous-jacent à C.*

Le corollaire suivant est immédiat :

D.4.4. Corollaire. — *Toute forme bilinéaire anisotrope est diagonalisable.*

D.4.5. Définition. — Une forme bilinéaire est dite non dégénérée si son radical est nul.

Pour la suite de cet appendice, toutes les formes bilinéaires considérées seront non dégénérées.

D.5. Invariant d'Arf et algèbre de Clifford

Plus de détails sur les résultats de cette section peuvent être consultés dans [**22**]. La construction de l'algèbre de Clifford qui a été donnée dans le chapitre 5 du présent livre reste évidemment valable en caractéristique 2 pour toute forme quadratique.

Posons $\wp(a) = a^2 + a$ pour tout $a \in F$. Alors, $\wp(F) = \{\wp(a) \,|\, a \in F\}$ est un sous-groupe additif de F.

Lorsque φ est une forme quadratique non singulière, l'algèbre $C(\varphi)$ est simple centrale sur F, et le centre $Z(\varphi)$ de l'algèbre de Clifford paire $C_0(\varphi)$ est une algèbre quadratique séparable sur F, c'est-à-dire, il existe $\delta \in F$ vérifiant $Z(\varphi) = F[x]/(x^2 + x + \delta)$. La classe de δ modulo $\wp(F)$ ne dépend que de la classe d'isométrie de φ, on l'appelle l'invariant d'Arf de φ et on la note $\Delta(\varphi)$. Souvent, on identifie $\Delta(\varphi)$ avec le représentant dans F de sa classe dans $F/\wp(F)$.

Plus concrètement, si $\varphi \simeq a_1[1, b_1] \perp \cdots \perp a_n[1, b_n]$ (on peut toujours écrire φ sous cette forme en partant de l'une de ses normalisations puis on utilise la seconde isométrie décrite dans le lemme D.3.10), alors

$$\Delta(\varphi) = b_1 + \cdots + b_n \in F/\wp(F),$$

et

$$C(\varphi) = [b_1, a_1)_F \otimes_F \cdots \otimes_F [b_n, a_n)_F,$$

où $[b, a)_F$ $(a \in F^*,\ b \in F)$ désigne l'algèbre de quaternions engendrée par deux éléments u, v sur F, avec les relations : $u^2 = a$, $v^2 + v = b$, $uv = (v + 1)u$. C'est une F-algèbre simple centrale de dimension 4 qui devient triviale dans le groupe de Brauer de F lorsque $b \in \wp(F)$. Si $b \notin \wp(F)$, alors cette algèbre est triviale si et seulement si a est une norme de l'extension $F[x]/(x^2 + x + b)$ sur F [**191**, p. 314].

D.6. Simplification de Witt - Décomposition de Witt

D.6.A. Cas des formes quadratiques. — En caractéristique 2 la simplification de Witt ne s'applique pas à toutes les formes quadratiques. L'exemple D.3.9 en est une illustration. Le fait qu'on a $[0, 1] \not\simeq [1, t^{-1}]$ et $[0, 1] \perp \mathrm{ql}(\varphi) \simeq [t^{-1}, 1] \perp \mathrm{ql}(\varphi)$ signifie qu'on ne peut pas simplifier dans cette dernière isométrie par la forme $\mathrm{ql}(\varphi)$.

Néanmoins, on a la simplification de Witt pour certaines formes quadratiques particulières. Le premier cas de simplification qu'on donnera est dû à Knebusch et concerne les formes quadratiques non singulières :

D.6.1. Proposition ([**121**, Prop. 1.2]). — *Soient φ, φ' deux formes quadratiques de même dimension (éventuellement singulières). Si ψ est une forme quadratique non singulière vérifiant $\varphi \perp \psi \simeq \varphi' \perp \psi$, alors $\varphi \simeq \varphi'$.*

On a aussi la simplification de Witt pour les formes quadratiques totalement singulières nulles :

D.6.2. Proposition ([**76**, Lem. 2.6]). — *Soient φ et φ' deux formes quadratiques non défectives de même dimension telles que $\varphi \perp j \times \langle 0\rangle \simeq \varphi' \perp j \times \langle 0\rangle$ pour un certain entier $j \geq 0$. Alors, $\varphi \simeq \varphi'$.*

Comme il a été prouvé dans [**76**], les propositions D.6.1 et D.6.2 suffisent pour avoir la décomposition de Witt de toute forme quadratique :

D.6.3. Théorème ([**76**, Prop. 2.4]). — *Toute forme quadratique φ de dimension ≥ 1 se décompose de manière unique comme suit :*

$$\varphi \simeq i \times \mathbb{H} \perp j \times \langle 0\rangle \perp \varphi_{\mathrm{an}},$$

où φ_{an} est une forme quadratique anisotrope et $\mathbb{H} = [0, 0]$ est le plan hyperbolique.

Le théorème D.6.3 existait déjà dans [**19**, p. 160], [**121**, p. 283] dans le cas d'une forme quadratique φ non défective.

D.6.4. Notation-Définition. — On garde les mêmes notations que dans le théorème précédent.

(1) La forme quadratique φ_{an} s'appelle la partie anisotrope de φ.

(2) La forme quadratique $i \times \mathbb{H} \perp \varphi_{\mathrm{an}}$ s'appelle la partie non défective de φ. On la note φ_{nd}.

(3) L'entier i (resp. j) s'appelle l'indice de Witt de φ et on le note $i_W(\varphi)$ (resp. l'indice de défaut de φ et on le note $i_d(\varphi)$).

(4) L'indice totale de φ est l'entier $i + j$ qu'on note $i_t(\varphi)$.

(5) Une forme quadratique φ non singulière est dit hyperbolique si $i_W(\varphi) = \frac{\dim \varphi}{2}$.

D.6.5. Remarque. — L'indice total d'une forme quadratique (V, φ) n'est autre que la dimension d'un sous-espace totalement isotrope maximal de V. (Un sous-espace W de V est dit totalement isotrope pour φ lorsque $\varphi(w) = 0$ pour tout $w \in W$.)

D.6.B. Cas des formes bilinéaires

D.6.6. Notation. — Pour $a_1, a_2, , b \in F$, on note $\langle a_1 : b : a_2 \rangle$ la forme bilinéaire B dont l'espace sous-jacent admet une F-base $\{e_1, e_2\}$ qui satisfait aux relations : $B(e_i, e_i) = a_i$ et $B(e_1, e_2) = b$.

Comme pour les formes quadratiques, la simplification de Witt n'est pas vraie, en général, pour les formes bilinéaires. Voici un exemple (voir aussi [**22**, Cor. 4.4, p. 82]) :

D.6.7. Exemple. — Soit t une variable sur F. Alors, $\langle t : 1 : 0 \rangle \perp \langle t \rangle_b \simeq \langle 0 : 1 : 0 \rangle \perp \langle t \rangle_b$ et $\langle t : 1 : 0 \rangle \not\simeq \langle 0 : 1 : 0 \rangle$.

Démonstration. — Posons $B = \langle t : 1 : 0 \rangle \perp \langle t \rangle_b$, et soit $\{e, f, g\}$ une $F(t)$-base de l'espace sous-jacent à B avec les relations :

$$\begin{cases} B(e, e) = B(g, g) = t, \\ B(e, g) = B(f, g) = B(f, f) = 0, \\ B(e, f) = 1. \end{cases}$$

La restriction de B à l'espace engendré par $\{e + g, f\}$ est la forme $\langle 0 : 1 : 0 \rangle$. Ainsi, $\langle t : 1 : 0 \rangle \perp \langle t \rangle_b \simeq \langle 0 : 1 : 0 \rangle \perp \langle \alpha \rangle_b$ pour un certain $\alpha \in F^*$. En comparant les déterminants dans cette dernière isométrie, on trouve que $t = \alpha$ modulo un carré. De plus, les formes $\langle t : 1 : 0 \rangle$ et $\langle 0 : 1 : 0 \rangle$ ne peuvent être isométriques puisque la première représente t alors que la deuxième représente uniquement 0. □

D.6.8. Définition. — Un plan métabolique est une forme bilinéaire isométrique à $\langle a : 1 : 0 \rangle$ pour un certain $a \in F$.

Contrairement au cas du plan hyperbolique $\mathbb{H}$, il peut y avoir plusieurs plans métaboliques non isométriques.

L'isotropie des formes bilinéaires peut être vue autrement :

D.6.9. Lemme. — *Une forme bilinéaire B est isotrope si et seulement si elle contient un plan métabolique comme une sous-forme.*

D.6.10. Définition. — Une forme bilinéaire B est dite métabolique lorsqu'elle est isométrique à une somme orthogonale de plans métaboliques.

Voici la décomposition de Witt pour les formes bilinéaires :

D.6.11. Théorème **([164])**. — *Soit B une forme bilinéaire de dimension ≥ 1. Alors, il existe une forme bilinéaire métabolique M et une forme bilinéaire anisotrope B_{an} telles que $B \simeq M \perp B_{\mathrm{an}}$. De plus, la forme B_{an} ne dépend que la classe d'isométrie de B.*

Comme le montre l'exemple D.6.7, la forme métabolique M donnée dans le théorème D.6.11 n'est pas toujours unique. Récemment on a donné dans [**141**, Prop. 5.15] une version raffinée de la décomposition donnée dans le théorème D.6.11. Mais on n'en aura pas besoin ici.

D.6.12. Notation-Définition. — Avec les notations du théorème D.6.11, la forme B_{an} est appelée la partie anisotrope de B, et l'entier $\frac{\dim M}{2}$ est appelé l'indice de Witt de B. On le note $i_W(B)$.

D.6.13. Remarque. — Comme pour l'indice total d'une forme quadratique, l'indice de Witt d'une forme bilinéaire (V, B) n'est autre que la dimension d'un sous-espace totalement isotrope maximal de V. (Un sous-espace W de V est dit totalement isotrope pour B lorsque $B(w, w') = 0$ pour tout $w, w' \in W$.)

D.7. Anneau de Witt – Groupe de Witt

1. Produits des formes bilinéaires. — Le produit de deux formes bilinéaires (V, B) et (V', B') est défini comme étant l'unique forme bilinéaire $B \otimes B'$ d'espace sous-jacent $V \otimes V'$ donnée par :

$$B \otimes B'(v \otimes v', w \otimes w') = B(v, w)B'(v', w')$$

pour tout $(v, w), (v', w') \in V \times W$.

2. Produit d'une forme quadratique par une forme bilinéaire. — À une forme bilinéaire (V, B) et une forme non singulière (W, φ), on associe une forme quadratique non singulière $B \otimes \varphi$ d'espace sous-jacent $V \otimes W$ donnée par :

$$B \otimes \varphi(v \otimes w) = B(v, v)\varphi(w)$$

pour tout $v \in V, w \in W$, et de forme polaire associée $B \otimes B_\varphi$.

On vérifie aisément que la première opération est commutative et associative, et que les deux opérations sont distributives par rapport à la somme orthogonale.

D.7.1. Notation. — Soit $\mathrm{Bil}(F)$ (resp. $\mathrm{Quad}(F)$) la classe des formes bilinéaires (resp. la classe des formes quadratiques non singulières) à isométrie près.

D.7.2. Définition. — Deux formes bilinéaires (resp. deux formes quadratiques) B et B' sont dites Witt-équivalentes, qu'on note $B \sim B'$, lorsque $B \perp M \simeq B' \perp M'$ pour certaines formes métaboliques (resp. formes hyperboliques) M et M'.

Il est clair que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathrm{Bil}(F)$ et $\mathrm{Quad}(F)$. On note $W(F)$ (resp. $W_q(F)$) l'ensemble quotient $\mathrm{Bil}(F)/\sim$ (resp. $\mathrm{Quad}(F)/\sim$).

L'ensemble $W(F)$ (resp. $W_q(F)$) est un anneau pour l'addition et la multiplication induites par la somme orthogonale et le produit des formes bilinéaires. De même, $W_q(F)$ est un groupe pour l'addition induite par la somme orthogonale des formes quadratiques non singulières. On a bien que tout élément de $W(F)$ (et $W_q(F)$) est son propre opposé.

D.7.3. Définition. — On appelle $W(F)$ (resp. $W_q(F)$) l'anneau de Witt de F (resp. le groupe de Witt de F).

D.7.4. Remarque. — Par unicité de la partie anisotrope, la condition $B \sim B'$ implique que $B_{\mathrm{an}} \simeq B'_{\mathrm{an}}$. Ainsi, chaque élément de $W(F)$ (resp. $W_q(F)$) est représenté par une unique forme anisotrope.

Il est clair que la donnée d'une extension de corps K/F induit un homomorphisme d'anneaux (resp. de groupes) $W(F) \to W(K)$ (resp. $W_q(F) \to W_q(K)$) donné par extension des scalaires. Bien sûr, en général, cet homomorphisme n'est pas injectif. On reviendra dans la section D.18 pour étudier les noyaux de ces homomorphismes pour certains corps K.

Le produit des formes quadratiques non singulières par les formes bilinéaires rend $W_q(F)$ un $W(F)$-module. Ceci va nous permettra de définir la notion des formes quadratiques de Pfister (cf. Section D.11).

On note IF l'idéal fondamental de $W(F)$ formé des formes bilinéaires de dimension paire. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I^nF = (IF)^n$ (avec $I^0F = W(F)$). Ainsi, on a une filtration de l'anneau $W(F)$ donnée par : $W(F) = I^0F \supset IF \supset I^2F \cdots$.

En utilisant la structure de $W(F)$-module de $W_q(F)$, on obtient aussi une filtration de $W_q(F)$: $W_q(F) = I^1W_q(F) \supset I^2W_q(F) \supset I^3W_q(F) \cdots$; où $I^nW_q(F) = I^{n-1}F \otimes W_q(F)$ pour tout $n \geq 1$.

En évoquant ces deux filtrations, on donne l'analogue du Hauptsatz d'Arason et Pfister, et une généralisation d'un résultat récent de Karpenko :

D.7.5. Théorème. — *Soient $n \geq 1$ un entier, B une forme bilinéaire (resp. une forme quadratique) appartenant à I^nF (resp. $I^nW_q(F)$). On a :*

(1) *Si B est anisotrope, alors* $\dim B \geq 2^n$.
(2) *Si* $\dim B < 2^{n+1}$, *alors* $\dim B \in \{2^{n+1} - 2^i \mid 1 \leq i \leq n+1\}$.

Rappelons que l'assertion (1) de ce théorème a été prouvée dans [**21**] dans le cas des formes quadratiques, puis elle a été étendue récemment aux formes bilinéaires dans [**141**, Lem. 4.8]. L'assertion (2) est faite dans [**141**, Prop. 5.7, Rem. 5.8].

D.8. Relation de sous-forme entre les formes quadratiques

La relation de sous-forme(2) entre les formes quadratiques est définie comme suit :

(2) Dans [**76**], [**77**], [**134**]–[**143**], on utilise la terminologie « relation de domination » au lieu de « relation de sous-forme ».

D.8.1. Définition. — Soient (V, φ) et (W, ψ) deux formes quadratiques. On dit que φ est une sous-forme de ψ, qu'on note $\varphi \leq \psi$, s'il existe une application F-linéaire injective $\sigma : V \to W$ telle que : $\varphi(v) = \psi(\sigma(v))$ pour tout $v \in V$.

En caractéristique $\neq 2$ dans le cas des formes quadratiques de radical nul, la relation de facteur direct (définie dans le paragraphe D.2) coincide avec la relation de sous-forme. Par contre, en caractéristique 2, la relation de facteur direct n'est qu'un cas particulier de la relation de sous-forme. Ceci est dû à la présence de la partie quasi-linéaire. La proposition suivante clarifie ce commentaire :

D.8.2. Proposition **([76, Lem. 3.1]).** — *Soient φ et ψ deux formes quadratiques. Alors, on a équivalence entre :*

(1) $\varphi \leq \psi$.
(2) *Il existe des formes quadratiques non singulières φ_r et ψ', des entiers $s' \leq s \leq s''$, $c_i \in F$ $(1 \leq i \leq s'')$ et $d_j \in F$ $(1 \leq j \leq s')$ tels que :*

$$\varphi \simeq \varphi_r \perp \langle c_1, \ldots, c_s \rangle,$$
$$\psi \simeq \varphi_r \perp \psi' \perp [c_1, d_1] \perp \cdots \perp [c_{s'}, d_{s'}] \perp \langle c_{s'+1}, \ldots, c_{s''} \rangle.$$

Voici quelques remarques :

D.8.3. Remarques

(1) Comme il a été mentioné dans [**76**, Rem. 3.2], la forme φ_r intervenant dans la proposition D.8.2 peut être n'importe quelle forme non singulière vérifiant $\varphi \simeq \varphi_r \perp \mathrm{ql}(\varphi)$.

(2) Si (φ est non singulière) ou (φ et ψ sont toutes deux totalement singulières), alors la condition $\varphi \leq \psi$ équivaut à $\varphi \subset \psi$.

D.8.4. Définition. — Une forme quadratique non singulière ψ est dite complément non singulier d'une forme quadratique totalement singulière φ si $\varphi \leq \psi$ et $\dim \psi = 2 \dim \varphi$.

La notion de complément non singulier joue un rôle important. On l'utilisera pour définir la forme complémentaire d'une forme voisine de Pfister.

D.8.5. Lemme. — *Si ψ est un complément non singulier de φ, alors $\varphi \perp \psi \sim \varphi$.*

Démonstration. — On utilise l'isométrie $[a, b] \perp \langle a \rangle \simeq \mathbb{H} \perp \langle a \rangle$ pour tout $a, b \in F$. □

Le lemme suivant, dit lemme de complétion, permet d'étendre une isométrie entre deux formes quadratiques singulières en une autre entre deux formes quadratiques qui les contiennent comme sous-forme :

D.8.6. Lemme ([**76**, Cor. 3.10]). — *Soient φ et ψ deux formes quadratiques non singulières et σ, τ deux formes quadratiques totalement singulières telles que $\varphi \perp \sigma \perp \tau \simeq \psi \perp \sigma \perp \tau$. Si ρ est un complément non singulier de σ, alors il existe ρ' un autre complément non singulier de σ tel que $\varphi \perp \rho \perp \tau \simeq \psi \perp \rho' \perp \tau$.*

L'exemple suivant montre que la forme quadratique ρ' intervenant dans le lemme D.8.6 n'est pas toujours isométrique à ρ :

D.8.7. Exemple. — Soit t une variable sur F. Pour les formes $\varphi = [1, t^{-1}]$, $\psi = \mathbb{H}$ et $\sigma = \langle t^{-1} \rangle$, on a les isométries

$$\varphi \perp \sigma \simeq \psi \perp \sigma,$$
$$\varphi \perp [1, t^{-1}] \simeq \psi \perp \mathbb{H},$$

mais $[1, t^{-1}]$ et $\mathbb{H}$ sont deux compléments non singuliers de $\langle t^{-1} \rangle$ non isométriques.

Comme expliqué dans [**77**], le lemme de complétion permet d'obtenir le corollaire suivant qui joue un rôle important dans la preuve du théorème D.12.1 :

D.8.8. Corollaire. — *Soient φ et ψ deux formes quadratiques non singulières et σ une forme quadratique totalement singulière telles que*

$$\varphi \perp \sigma \simeq (\dim \sigma) \times \mathbb{H} \perp \psi \perp \sigma.$$

Alors, $\psi \perp \sigma \leq \varphi$.

D.9. Formes bilinéaires - Formes totalement singulières

Dans cette section, on va donner quelques liens qui existent entre les formes bilinéaires et les formes quadratiques totalement singulières.

D.9.1. Définition. — Soit (V, B) une forme bilinéaire. On désigne par $(V, \widetilde{B})$ la forme quadratique donnée par :

$$\widetilde{B}(v) = B(v, v) \quad \text{pour tout} \quad v \in V.$$

C'est une forme quadratique totalement singulière ne dépendant que de la classe d'isométrie de B. On l'appelle la forme quadratique associée à B.

Le lemme suivant donne une autre caractérisation de la forme quadratique introduite dans la définition précédente :

D.9.2. Lemme. — *Soit (V, B) une forme bilinéaire. Une forme quadratique totalement singulière φ est isométrique à $\widetilde{B}$ si et seulement si $\dim B = \dim \varphi$ et $D_F(B) = D_F(\varphi)$.*

Démonstration. — Par la proposition D.9.7 (2), on sait que deux formes quadratiques totalement singulières sont isométriques si et seulement si elles sont de même dimension et représentent les mêmes scalaires de F^*. □

D.9.3. Remarque

(1) La correspondance $B \mapsto \widetilde{B}$ est compatible avec la somme orthogonale et la multiplication par des scalaires non nuls.

(2) Les formes B et $\widetilde{B}$ sont simultanément isotropes ou anisotropes.

Le lemme suivant complète la remarque D.9.3 (2) dans le cas de la métabolicité de B :

D.9.4. Lemme. — *Si* (V, B) *est une forme bilinéaire métabolique, alors* $i_d(\widetilde{B}) \geq \frac{\dim B}{2}$.

Démonstration. — Puisque B est métabolique, il existe W un sous-espace de V totalement isotrope pour B de dimension $\frac{\dim V}{2}$. En particulier, $\widetilde{B}(W) = 0$. Ainsi, $\dim \widetilde{B}_{\mathrm{an}} \leq \dim V - \dim W = \frac{\dim V}{2}$, c'est-à-dire, $i_d(\widetilde{B}) \geq \frac{\dim B}{2}$. □

La réciproque du lemme D.9.4 n'est pas toujours vraie comme le montre l'exemple qui suit :

D.9.5. Exemple. — Soient t une variable sur F, $B = \langle 1 : 1 : 0 \rangle \perp \langle 1 : 0 : t \rangle$. La forme B n'est pas métabolique puisque $B_{\mathrm{an}} \simeq \langle 1 : 0 : t \rangle$ (Théorème D.6.11), mais $\widetilde{B} \simeq \langle 1, 0, 1, t \rangle \simeq \langle 0, 0, 1, t \rangle$ a pour indice de défaut $2 \geq \frac{\dim B}{2}$.

En vertu du lemme D.9.4, on propose une définition de l'analogue de l'hyperbolicité pour les formes totalement singulières :

D.9.6. Définition. — Une forme quadratique totalement singulière φ est dite quasi-hyperbolique si $\dim \varphi$ est paire et $i_d(\varphi) \geq \frac{\dim \varphi}{2}$.

Cette notion de quasi-hyperbolicité est invariante par extension des scalaires. On l'a introduite auparavant dans [**137**] et [**139**] dans une version un peu restrictive. On verra qu'avec la notion de quasi-hyperbolicité, on peut retrouver l'analogue de certains théorèmes qui n'étaient connus que dans le cas des formes quadratiques non singulières, à savoir le théorème de norme (cf. Théorème D.15.1) et le théorème de la sous-forme (cf. Proposition D.10.5).

Un autre cadre où les formes bilinéaires et les formes totalement singulières se rapprochent est leurs classifications.

D.9.A. Cas des formes totalement singulières. — Les formes totalement singulières se classifient par l'intermidiaire des F^2-espaces vectoriels de dimension finie contenus dans F. Pour cela, on va se servir du fait que pour une telle forme $\varphi \simeq \langle a_1, \ldots, a_s \rangle$, le F^2-sous-espace vectoriel de F engendré par $\{a_1, \ldots, a_s\}$ n'est autre que $D_F(\varphi) \cup \{0\}$. De plus, si $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ est une F^2-base de $D_F(\varphi) \cup \{0\}$, alors $\varphi_{\mathrm{an}} \simeq \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \rangle$. Ceci conduit au résultat suivant.

D.9.7. Proposition ([**76**, Prop. 8.1])

(1) *On a la correspondance biunivoque suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c}\textit{Formes totalement singulières,}\\ \textit{à isométrie près}\end{array}\right\} & \rightleftharpoons & \left\{\begin{array}{c}F^2\textit{-sous-espaces de } F\\ \textit{de dimension finie}\end{array}\right\} \times \mathbb{N} \\ \varphi & \longrightarrow & (V, \dim\varphi - \dim_{F^2} V) \ \textit{pour } V = D_F(\varphi)\cup\{0\} \\ \langle a_1,\dots,a_n\rangle \perp m\times\langle 0\rangle & \longleftarrow & (V,m) \ \textit{pour une } F^2\textit{-base } \{a_1,\dots,a_n\} \textit{ de } V \end{array}$$

(2) $\varphi \simeq \langle a_1,\dots,a_n\rangle \subset \psi \simeq \langle b_1,\dots,b_m\rangle$ *si et seulement si* $m \geq n$ *et le* F^2*-sous-espace vectoriel de* F *engendré par* $\{a_1,\dots,a_n\}$ *est contenu dans le* F^2*-sous-espace vectoriel de* F *engendré par* $\{b_1,\dots,b_n\}$ *si et seulement si* $m \geq n$ *et* $D_F(\varphi)\cup\{0\} \subset D_F(\psi)\cup\{0\}$.

(3) *Pour toute forme quadratique totalement singulière* $\varphi \simeq \langle a_1,\dots a_n\rangle$ *et pour toute extension* K/F*, il existe (éventuellement après ré-indexation)* $0 \leq m \leq n$ *tel que* $(\varphi_K)_{\mathrm{an}} \simeq \langle a_1,\dots,a_m\rangle_K$.

D.9.B. Cas des formes bilinéaires. — Une classification des formes bilinéaires a été donnée auparavant par Milnor [**163**]. Pour décrire celle-ci on donne quelques préliminaires.

Soit $\theta : F \to F^2$ l'application donnée par : $\alpha \mapsto \alpha^2$. C'est une forme quadratique sur F, vu comme F^2-espace vectoriel. Soit $\mathbf{c}$ l'injection de F dans $C(\theta)$, l'algèbre de Clifford de θ. Comme il a été remarqué par Milnor, $C(\theta)$ est un anneau local (commutatif) d'idéal maximal $M = \{x \in C(\theta) \mid x^2 = 0\}$, et que $C(\theta)/M$ est isomorphe à F.

D.9.8. Définition. — Un élément de $C(\theta)$ est dit décomposable s'il s'écrit sous la forme $\mathbf{c}(f_1)\cdots\mathbf{c}(f_k)$ pour certains scalaires $f_1,\cdots,f_k \in F$.

Voici la classification des formes bilinéaires :

D.9.9. Théorème **(**[**163**, Th. 1]**).** — *Le groupe additif* $W(F)$ *est isomorphe au groupe multiplicatif des éléments décomposables du quotient* $C(\theta)^*/F^{*2}$*, où* $C(\theta)^*$ *est le groupe des unités de* $C(\theta)$*.*

L'ingrédient essentiel pour la preuve de ce théorème est la notion de *déterminant de Clifford* introduite par Milnor, dont voici une description :

Soient B une forme bilinéaire sur F et $\{e_1,\cdots,e_n\}$ une F-base de son espace sous-jacent. Pour $1 \leq i,j \leq n$, posons $\alpha_{i,j} = B(e_i,e_j)$. La matrice $(\mathbf{c}(\alpha_{i,j}))$ est à coefficients dans $C(\theta)$ et dont le déterminant s'appelle le *déterminant de Clifford* de B. C'est un élément de la composante paire ou impaire de $C(\theta)$ suivant que l'entier n est pair ou impair.

Comme a été prouvé dans [**163**, Lem. 2], le déterminant de Clifford de B est une unité décomposable de $C(\theta)$ et unique modulo F^{*2}. On note $\triangle(B)$ l'invariant $\det((\mathbf{c}(\alpha_{i,j}))) \cdot F^{*2} \in C(\theta)^*/F^{*2}$. On a alors un homomorphisme $\triangle : W(F) \to C(\theta)^*/F^{*2}$ donné par : $B \mapsto \triangle(B)$.

Il a été prouvé dans [**163**, Lem. 3] qu'une forme bilinéaire anisotrope B est uniquement déterminée par l'invariant $\triangle(B)$. Cela permet d'obtenir le théorème D.9.9.

Voici une autre classification des formes bilinéaires qui se rapproche beaucoup plus à la proposition D.9.7 :

D.9.10. Théorème ([**163**, Th. 3]). — *Une forme bilinéaire B est déterminée, à isométrie près, par sa partie anisotrope B_{an}, le F^2-espace vectoriel $D_F(B) \cup \{0\}$, et $\dim B$ qui vaut $2\dim(\widetilde{B})_{\mathrm{an}} - \dim B_{\mathrm{an}} + 2h$, où h est le maximal de copies du plan métabolique $\langle 0 : 1 : 0\rangle$ qui apparaît dans la décomposition de Witt de B.*

D.10. Corps de fonctions - Théorèmes de sous-forme

Soit $\varphi = \perp_{i=1}^{r} [a_i, b_i] \perp \langle c_1, \dots, c_s\rangle$ une forme quadratique non nulle de dimension ≥ 1.

Le polynôme $P = \sum_{i=1}^{r}(a_i x_i^2 + x_i y_i + b_i y_i^2) + \sum_{i=1}^{s} c_i z_i^2$ est réductible si et seulement si (φ_{nd} est de type $(0,1)$) ou (φ_{nd} est de type $(1,0)$ et est isométrique à $\mathbb{H}$) [**155**]. Il est absolument irréductible si et seulement si φ est de type (r,s) avec $r \geq 1$ et $\dim \varphi_{\mathrm{nd}} \geq 3$ [**2**].

D.10.1. Définition. — Lorsque P est irréductible, le corps de fonctions de φ, qu'on note $F(\varphi)$, est défini comme étant le corps de fonctions de la quadrique affine d'équation $\varphi = 0$. Si P est réductible ou φ est nulle, on pose $F(\varphi) = F$.

D.10.2. Définition. — Le corps de fonctions d'une forme bilinéaire B est défini comme étant le corps $F(\widetilde{B})$.

En caractéristique $\neq 2$, l'extension donnée par le corps de fonctions d'une forme quadratique est transcendante pure sur le corps de base si et seulement si la forme quadratique est isotrope. En caractéristique 2, la situation est assez différente comme le précise le lemme qui suit :

D.10.3. Lemme. — *Pour une forme quadratique φ, on a :*

(1) *L'extension $F(\varphi)/F$ est transcendante pure si et seulement si φ_{nd} est isotrope.*
(2) *Si φ est défective, disons $\varphi \simeq \varphi_{\mathrm{nd}} \perp m \times \langle 0\rangle$, alors $F(\varphi)/F(\varphi_{\mathrm{nd}})$ est transcendante pure de degré de transcendance m.*

Un résultat fondamental en théorie des corps de fonctions en caractéristique 2 est l'analogue du théorème de la sous-forme de Cassels-Pfister :

D.10.4. Théorème ([**76**, Th. 4.2], [**134**, Prop. 3.4]). — *Soient φ, ψ deux formes quadratiques avec φ anisotrope et ψ non défective. Si φ devient hyperbolique sur $F(\psi)$, alors $\alpha\psi \leq \varphi$ pour tout $\alpha \in D_F(\varphi)D_F(\psi)$. En particulier, $\dim \psi \leq \dim \varphi$.*

Le théorème D.10.4 s'étend au cas des formes totalement singulières (Proposition D.10.5) et des formes bilinéaires (Proposition D.10.6), et plus généralement au cas des formes singulières pas totalement singulières (Proposition D.15.6) :

D.10.5. Proposition ([**137**, Th. 1.3], [**67**]). — *Soient φ et ψ deux formes quadratiques totalement singulières telles que φ soit anisotrope et devienne quasi-hyperbolique sur $F(\psi)$. Alors, $\alpha\psi_{\mathrm{an}} \subset \varphi$ pour tout $\alpha \in D_F(\psi)D_F(\varphi)$.*

D.10.6. Proposition ([**138**, Prop. 1.1]). — *Soient B une forme bilinéaire anisotrope et φ une forme quadratique anisotrope telles que B devienne métabolique sur $F(\varphi)$. Alors :*

(1) *φ est totalement singulière.*
(2) *Pour tout $\alpha \in D_F(\varphi)D_F(B)$, il existe B' une sous-forme de αB qui est associée à φ. En particulier, $\dim\varphi \leq \dim B$.*

Démonstration. — Soit $\alpha = uv$ avec $u \in D_F(\varphi)$ et $v \in D_F(B) = D_F(\widetilde{B})$. La métabolicité de $B_{F(\varphi)}$ implique que φ est totalement singulière [**134**], et que $\widetilde{B}_{F(\varphi)}$ est quasi-hyperbolique (Lemme D.9.4). Par la proposition D.10.5, on a $u\varphi \subset v\widetilde{B}$. Ainsi, $D_F(\varphi) \subset \alpha D_F(\widetilde{B}) = \alpha D_F(B)$. Posons $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, et soit x_i les vecteurs de l'espace V sous-jacent à B tels que $B(x_i, x_i) = \alpha^{-1}a_i$. Ces vecteurs x_i sont F-linéairement indépendants puisque les scalaires a_i sont F^2-linéairement indépendants vue que φ est anisotrope. Soit W le sous-espace de V engendré par x_i, et B' la restriction de αB à W. Par l'anisotropie de B, il existe B'' une forme bilinéaire telle que $\alpha B \simeq B' \perp B''$. Il est clair que $D_F(B') = D_F(\varphi)$ et $\dim B' = \dim\varphi$, ce qui donne le résultat. □

D.11. Les formes de Pfister et leurs voisines

D.11.A. Formes de Pfister. — Une importante classe de formes bilinéaires et quadratiques est celle des formes voisines de Pfister. C'est les formes bilinéaires de Pfister qui vont générer leurs analogues quadratiques. D'une part, on va se servir de la structure de $W(F)$-module de $W_q(F)$ pour définir les formes (non singulières) de Pfister, et d'autre part on va utiliser le lien mentioné dans la section D.9 entre les formes bilinéaires et les formes totalement singulières pour définir les formes de Pfister pour ces dernières. Entre autres, on va introduire les voisines de ces différentes formes de Pfister, et on donnera des propriétés, des caractérisations et des classifications pour les formes quadratiques voisines de Pfister.

D.11.1. Définition. — Soit $n \geq 1$ un entier.

(1) Une n-forme bilinéaire de Pfister est une forme isométrique à $\langle 1, a_1\rangle_b \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_n\rangle_b$ pour certains $a_i \in F^*$.

(2) Une quasi n-forme de Pfister est une forme totalement singulière associée à une n-forme bilinéaire de Pfister.

(3) Une $(n+1)$-forme de Pfister est une forme isométrique à $B \otimes [1, a]$ pour certains $a \in F$ et B une n-forme bilinéaire de Pfister. Une 1-forme de Pfister est une forme de type $[1, a]$ pour $a \in F$.

D.11.2. Notation. — Pour $a_1, \cdots, a_n \in F^*$ et $b \in F$, on note par :

(1) $\langle\langle a_1, \cdots, a_n \rangle\rangle_b$ la n-forme bilinéaire de Pfister $\langle 1, a_1 \rangle_b \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_n \rangle_b$.
(2) $\langle\langle a_1, \cdots, a_n \rangle\rangle$ la quasi-forme de Pfister donnée par $\langle\langle a_1, \cdots, a_n \rangle\rangle_b$.
(3) $\langle\langle a_1, \cdots, a_n, b]$ la $(n+1)$-forme de Pfister $\langle\langle a_1, \cdots, a_n \rangle\rangle_b \otimes [1, b]$.
(4) P_nF (resp. GP_nF) l'ensemble des formes quadratiques isométriques (resp. semblables) à des n-formes de Pfister.

Les deux propositions qui vont suivre donnent deux propriétés importantes des formes de Pfister. En ce qui concerne les formes bilinéaires de Pfister, on a :

D.11.3. Proposition. — *Soit B une forme bilinéaire de Pfister. Alors :*

(1) [**22**, Th. 2.8, p. 97] **:** *B est multiplicative, c'est-à-dire, $\alpha \in D_F(B)$ si et seulement si $B \simeq \alpha B$.*
(2) [**138**, Prop. 3.3] **:** *B est isotrope si et seulement si elle est métabolique.*

De façon analogue pour les formes de Pfister et les quasi-formes de Pfister, on a :

D.11.4. Proposition. — *Soit φ une forme de Pfister (resp. une quasi-forme de Pfister). Alors :*

(1) [**22**, Th. 2.4, p. 95] ***; resp.*** [**76**, Section 8] **:** *Pour tout $\alpha \in D_F(\varphi)$, on a $\varphi \simeq \alpha\varphi$.*
(2) [**22**, Cor. 3.2, p. 105] ***; resp.*** [**76**, Section 8] **:** *φ est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique (resp. quasi-hyperbolique).*

Une caractérisation des formes de Pfister est qu'une forme bilinéaire anisotrope (resp. une forme non singulière anisotrope) est semblable à une forme de Pfister si et seulement si elle est métabolique (resp. hyperbolique) sur son propre corps de fonctions (Corollaire D.14.6, resp. Théorème D.13.9). On a le même résultat pour les quasi-formes de Pfister en utilisant la notion de quasi-hyperbolicité ([**137**, Cor. 1.8]). Pour ces dernières, on a une autre caractérisation basée sur la propriété de multiplicativité :

D.11.5. Proposition **(**[**76**, Prop. 8.5]**).** — *Soit φ une forme quadratique totalement singulière anisotrope. Alors, φ est isométrique à une quasi-forme de Pfister si et seulement si $\varphi \simeq \alpha\varphi$ pour tout $\alpha \in D_F(\varphi)$.*

D.11.B. Voisines de Pfister : Définitions, propriétés et classifications

D.11.6. Définition. — Une forme quadratique φ est dite une voisine de Pfister (resp. une quasi-voisine de Pfister) s'il existe une forme de Pfister (resp. une quasi-forme de Pfister) π telle que $2\dim\varphi > \dim\pi$ et $\alpha\varphi \leq \pi$ pour un certain $\alpha \in F^*$.

Dans [**138**] on a introduit la notion de forme bilinéaire voisine de Pfister. Sa formulation diffère légèment de ce qui est donné dans la définition D.11.6, et est motivée par le théorème de sous-forme pour les formes bilinéaires (Théorème D.10.6) :

D.11.7. Définition. — Une forme bilinéaire B est dite voisine d'une forme bilinéaire de Pfister π si $2\dim B > \dim\pi$ et s'il existe une forme bilinéaire C telle que : $\widetilde{B} \simeq \widetilde{C}$ et $\alpha C \subset \pi$ pour un certain $\alpha \in F^*$.

Comme en caractéristique $\neq 2$, voici quelques propriétés classiques des formes quadratiques voisines et quasi-voisines de Pfister :

D.11.8. Proposition **(**[**134**, Prop. 3.1]**,** [**136**, Cor. 2.5]**,** [**76**, Section 8]**)**

Soit φ une forme quadratique anisotrope. Alors on a les assertions suivantes :

(1) *Si φ est une voisine de Pfister, alors elle n'est pas totalement singulière.*
(2) *Si φ est voisine ou quasi-voisine de π, alors π est unique à isométrie près.*
(3) *Si φ est voisine ou quasi-voisine de π, alors pour toute extension K/F, φ_K est isotrope si et seulement si π_K est isotrope. En particulier, les formes $\pi_{F(\varphi)}$ et $\varphi_{F(\pi)}$ sont isotropes.*
(4) *φ est une voisine ou une quasi-voisine de π si et seulement si $2\dim\varphi > \dim\pi$ et $\pi_{F(\varphi)}$ est isotrope.*

En ce qui concerne les classifications, on donne celle des formes voisines de Pfister de dimension au plus 8 :

D.11.9. Proposition **(**[**134**, Prop. 3.2]**).** — *Soit φ une forme quadratique anisotrope telle que $2 \leq \dim\varphi \leq 8$. On a :*

(1) *Si $\dim\varphi \leq 3$, alors φ est une voisine de Pfister si et seulement si φ n'est pas totalement singulière.*
(2) *Si $\dim\varphi = 4$, alors φ est une voisine de Pfister si et seulement si $\varphi \in GP_2F$.*
(3) *Si $\dim\varphi = 5$, alors φ est une voisine de Pfister si et seulement si φ est de type $(2,1)$ et $\operatorname{ind} C_0(\varphi) \leq 2$; ou bien $\varphi \simeq a[1,x] \perp \langle b,c,d\rangle$ et l'algèbre $[x,a)$ est déployée sur $F(\sqrt{bd},\sqrt{cd})$.*
(4) *Si $\dim\varphi = 6$, alors φ est une voisine de Pfister si et seulement si φ est non singulière et hyperbolique sur $F[x]/(x^2+x+\delta)$ avec $\Delta(\varphi) = \delta + \wp(F)$; ou bien $\varphi \simeq \psi \perp \langle a,b\rangle$ avec ψ non singulière et hyperbolique sur $F(\sqrt{ab})$.*
(5) *Si $\dim\varphi = 7$, alors φ est une voisine de Pfister si et seulement si φ est de type $(3,1)$ et l'algèbre $C_0(\varphi)$ est déployée.*
(6) *Si $\dim\varphi = 8$, alors φ est une voisine de Pfister si et seulement si $\varphi \in GP_3F$.*

On a aussi une classification des quasi-voisines de Pfister jusqu'à dimension 7 :

D.11.10. Proposition **(**[**76**, Prop. 8.12]**).** — *Soit φ une forme quadratique totalement singulière anisotrope. On a :*

(1) *Si $\dim\varphi \leq 3$, alors φ est une quasi-voisine de Pfister.*

(2) *Si* $\dim\varphi = 2^n$*, alors* φ *est une quasi-voisine de Pfister si et seulement si* φ *est semblable à une quasi-forme de Pfister.*
(3) *Si* $\dim\varphi = 5$*, alors* φ *est une quasi-voisine de Pfister si et seulement si il existe* $a, b, c \in F^*$ *tels que* φ *soit semblable à* $\langle 1, a, b, ab, c\rangle$*.*
(4) *Si* $\dim\varphi = 6$*, alors* φ *est une quasi-voisine de Pfister si et seulement si il existe* $a, b, c \in F^*$ *tels que* φ *soit semblable à* $\langle 1, a, b, ab, c, ac\rangle$*.*
(5) *Si* $\dim\varphi = 7$*, alors* φ *est une quasi-voisine de Pfister si et seulement si il existe* $a, b, c \in F^*$ *tels que* φ *soit semblable à* $\langle a, b, c, ab, ac, bc, abc\rangle$*.*

La classification donnée dans la proposition D.11.10 est parallèle à celle des formes quadratiques voisines de Pfister donnée par Knebusch en caractéristique $\neq 2$ [**123**, p. 10–11].

Maintenant on revient au cas des formes bilinéaires voisines pour donner quelques unes de leurs propriétés :

D.11.11. Proposition ([**138**, Prop. 5.2, Prop. 5.3])

(1) *Soit* B' *une forme bilinéaire voisine d'une forme bilinéaire de Pfister* B*. Alors :*
  (i) *Pour toute extension* K/F*, les formes* B_K *et* B'_K *sont simultanément isotropes ou anisotropes. En particulier,* $B_{F(B')}$ *et* $B'_{F(B)}$ *sont isotropes.*
  (ii) *Si* B' *est anisotrope et est voisine d'une autre forme bilinéaire de Pfister* C*, alors* $\widetilde{B} \simeq \widetilde{C}$*.*
(2) *Si* B *et* B' *sont deux formes bilinéaires anisotropes avec* B *une forme bilinéaire de Pfister, alors* B' *est voisine de* B *si et seulement si* B *devient isotrope sur* $F(B')$ *et* $2\dim B' > \dim B$*.*

On a démontré cette proposition comme pour le cas des formes quadratiques voisines (quasi-voisines) de Pfister en utilisant la proposition D.10.6 et le fait qu'une forme bilinéaire de Pfister isotrope est métabolique (Proposition D.11.3).

En général, une forme bilinéaire peut être voisine de plusieurs formes bilinéaires de Pfister (cf. Exemple D.11.12), ce qui n'est pas le cas pour les formes quadratiques voisines (quasi-voisines) de Pfister.

D.11.12. Exemple. — Soient x, y des variables sur F, $\pi_1 = \langle\langle x, y\rangle\rangle_b$, $\pi_2 = \langle\langle x, x+y\rangle\rangle_b$ et $B = \langle 1, x, x+y, xy\rangle_b$. Alors, sur le corps $F(x, y)$ les formes π_1, π_2 et B sont anisotropes, B est voisine de π_1 et π_2 mais $\pi_1 \not\simeq \pi_2$.

Démonstration. — Posons $K = F(x, y)$. Puisque $\widetilde{\pi_1} \simeq \widetilde{B} \simeq \widetilde{\pi_2}$ et π_1 est anisotrope, les formes π_2 et B sont aussi anisotropes. De plus, $(\pi_1)_{K(B)}$ et $(\pi_2)_{K(B)}$ sont isotropes. Par la proposition D.11.11 (2), B est voisine de π_1 et π_2. On a $\pi_1 \perp \pi_2 \sim \langle y, xy, x+y, x(x+y)\rangle_b$. Par la quatrième relation d'isométrie du lemme D.3.10, on voit bien que la forme quadratique $\langle\langle x, y\rangle\rangle$ est associée à $\langle y, xy, x+y, x(x+y)\rangle_b$. Ainsi, cette dernière forme ne peut être isotrope, et donc π_1 ne peut être isométrique à π_2. $\square$

Dans [**141**] on a continué l'étude des formes bilinéaires voisines qui a été entamée dans [**138**]. Parmi les résultats qu'on a démontré dans [**141**] on peut citer la proposition suivante qui montre que les formes bilinéaires voisines se correspondent mutuellement avec les formes quasi-voisines, et qu'une forme bilinéaire anisotrope devient une voisine de Pfister après extension des scalaires à un corps convenable :

D.11.13. Proposition **(**[**141**, Prop. 3.8, Prop. 3.13]**)**

(1) *Une forme bilinéaire anisotrope B est une voisine de Pfister si et seulement si $\widetilde{B}$ est une quasi-voisine de Pfister.*
(2) *Si B est une forme bilinéaire anisotrope, alors il existe une extension K/F telle que B_K soit une voisine de Pfister anisotrope.*

On reviendra dans la section D.14 pour discuter quelques caractérisations des formes bilinéaires (resp. quadratiques) voisines utilisant le déploiement sur leur propres corps de fonctions. De plus, on va voir que la théorie de déploiement standard suffit pour caractériser complètement les quasi-voisines de Pfister (Théorème D.17.10 (3)).

D.11.C. Le complémentaire d'une forme quadratique voisine de Pfister. — Fixons $\varphi = \varphi_r \perp \mathrm{ql}(\varphi)$ une forme quadratique anisotrope voisine d'une forme de Pfister π. Soit $a \in F^*$ tel que $\varphi \leq a\pi$.

Par la proposition D.11.8 on a $\dim \varphi_r > 0$, et par la proposition D.8.2 il existe ψ une forme non singulière et σ un complément non singulier de $\mathrm{ql}(\varphi)$ tels que :

$$a\pi \simeq \varphi_r \perp \psi \perp \sigma. \tag{D.11.1}$$

On a la proposition suivante :

D.11.14. Proposition. — *Avec les mêmes notations que dans* (D.11.1)*, on a :*

(1) *La forme quadratique $\psi \perp \mathrm{ql}(\varphi)$ ne dépend que de la classe d'isométrie de φ.*
(2) $\varphi_{F(\varphi)} \sim (\psi \perp \mathrm{ql}(\varphi))_{F(\varphi)}$.
(3) $\dim \varphi + \dim(\psi \perp \mathrm{ql}(\varphi)) = \dim \pi$.

Démonstration

(1) Soient ψ' une forme non singulière, σ' un autre complément non singulier de $\mathrm{ql}(\varphi)$ et $b \in F^*$ tels que $b\pi \simeq \varphi_r \perp \psi' \perp \sigma'$. Alors, par multiplicativité, on obtient $\varphi_r \perp \psi \perp \sigma \simeq \varphi_r \perp \psi' \perp \sigma'$, et par la simplification de Witt (proposition D.6.1), on déduit $\psi \perp \sigma \simeq \psi' \perp \sigma'$. Puisque $\sigma \perp \mathrm{ql}(\varphi) \sim \mathrm{ql}(\varphi) \sim \sigma' \perp \mathrm{ql}(\varphi)$, on utilise de nouveau la simplification de Witt pour avoir $\psi \perp \mathrm{ql}(\varphi) \simeq \psi' \perp \mathrm{ql}(\varphi)$.
(2) Résulte de l'équivalence $\sigma \perp \mathrm{ql}(\varphi) \sim \mathrm{ql}(\varphi)$ et de l'hyperbolicité de $\pi_{F(\varphi)}$.
(3) Évident.

□

D.11.15. Définition

(1) Avec les mêmes notations que dans (D.11.1), la forme $\psi \perp \mathrm{ql}(\varphi)$ s'appelle la forme complémentaire de φ.

(2) La codimension d'une forme quadratique voisine est la dimension de sa forme complémentaire.

Dans le cas d'une forme quadratique voisine φ non singulière, on retrouve la définition de Knebusch de la forme complémentaire d'une forme voisine en caractéristique $\neq 2$.

D.12. Isotropie sur les corps de fonctions des quadriques

D.12.A. Le théorème de Hoffmann et un autre théorème d'Izhboldin. — Le problème d'isotropie sur les corps de fonctions des quadriques consiste à donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme quadratique anisotrope donnée devienne isotrope sur le corps de fonctions d'une autre. Avec le lemme D.10.3, il suffit de considérer les corps de fonctions des formes quadratiques anisotropes.

Un résultat fondamental prouvé ces dernières années sur ce problème est le théorème de Hoffmann , connu sous le nom « théorème des dimensions séparées par une puissance de 2 » [**68**, Main Theorem]. Ce théorème a permis beaucoup d'applications, et a motivé d'autres problèmes comme l'étude de l'équivalence birationnelle stable entre les quadriques.

Récemment, en collaboration avec Hoffmann, nous avons donné une généralisation complète de son théorème à la caractéristique 2 :

D.12.1. Théorème ([**77**, Th. 1.1]). — *Soient φ et ψ deux formes quadratiques anisotropes (éventuellement singulières) telles que* $\dim \varphi \leq 2^n < \dim \psi$ *pour un certain* $n \geq 1$. *Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.*

Une première généralisation du théorème de Hoffmann à la caractéristique 2 a été donnée en collaboration avec Mammone lorsque $\dim \varphi + \dim \mathrm{ql}(\varphi) \leq 2^n < \dim \psi$ [**142**].

La preuve du théorème D.12.1 est fondée sur l'idée utilisée par Hoffmann en caractéristique $\neq 2$ qui consiste à rendre une forme quadratique anisotrope de dimension $\leq 2^n$ un facteur direct d'une $(n+1)$-forme de Pfister après extension des scalaires à une extension convenable du corps de base. En caractéristique 2, on a généralisé cette idée en l'étendant aussi au cas d'une forme de dimension $2^n + 1$ comme suit :

D.12.2. Proposition ([**77**, Prop. 3.1]). — *Soient $n \geq 1$ un entier et φ une forme quadratique anisotrope telle que :*

(A) $\dim \varphi \leq 2^n$, *ou*

(B) $\dim \varphi = 2^n + 1$ *et φ n'est pas totalement singulière.*

Alors, il existe une extension K/F et une forme $\pi \in P_{n+1}K$ anisotrope telles que :

(1) $\varphi_K \leq \pi$,

(2) *Toute forme quadratique anisotrope sur F reste anisotrope sur $K(\pi)$ dans le cas* **(A)**.

D'autre part, on a montré que dans le cas **(B)**, on peut choisir l'extension $K(\varphi)/F(\varphi)$ unirationnelle, c'est-à-dire, $K(\varphi)$ est contenu dans une extension transcendante pure de $F(\varphi)$. Cette idée est due à Izhboldin en caractéristique $\neq 2$, et lui a permis de prouver un théorème général sur l'équivalence birationnelle stable entre deux quadriques, dont la généralisation à la caractéristique 2 est la suivante :

D.12.3. Théorème. — *Soient φ et ψ deux formes quadratiques anisotropes telles que* $\dim \varphi = 2^n + 1$ *et* $\dim \psi > 2^n$. *Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors $\psi_{F(\varphi)}$ est isotrope, et ψ est totalement singulière (resp. n'est pas totalement singulière) si φ est totalement singulière (resp. si φ n'est pas totalement singulière).*

Ce théorème a été prouvé dans [**77**, Th. 1.3] lorsque φ n'est pas totalement singulière, puis il a été récemment complété par Totaro lorsque φ est totalement singulière [**210**].

Rappelons que dans [**134**] et récemment dans [**53**], le problème d'isotropie d'une forme quadratique φ anisotrope sur le corps de fonctions d'une autre forme ψ a été étudié dans les cas suivants pour certaines formes ψ :

(1) (φ est de dimension 7) ou ($\varphi \in I^2W_q(F)$ de dimension 8), et $C(\varphi)$ est Brauer-équivalente à une algèbre de quaternions.

(2) φ est de type $(3,0)$ isotrope sur $F([1, \triangle(\varphi)])$, ou $\varphi \simeq \tau \perp c\langle 1, d\rangle$ pour certains $c, d \in F^*$ et $\tau \in GP_2F$.

(3) φ est une forme d'Albert, c'est-à-dire, $\dim \varphi = 6$ et $\Delta(\varphi) = 0$.

(4) φ est de dimension 5 et de type $(2,1)$.

(5) φ est de dimension 4 et de type $(2,0)$ ou $(1,2)$.

(6) φ est de dimension ≤ 3.

On renvoie à [**134**] et [**53**] pour les détails des énoncés, et les preuves qui utilisent parfois des techniques plus subtiles que celles utilisées en caractéristique $\neq 2$ pour traiter les cas similaires.

Toujours dans le cadre du problème d'isotropie, on donne un résultat général concernant l'isotropie des formes quadratiques totalement singulières sur les corps de fonctions :

D.12.4. Proposition ([**134**, Cor. 3.3]). — *Si φ est une forme quadratique totalement singulière anisotrope et ψ une forme quadratique qui n'est pas totalement singulière, alors φ est anisotrope sur $F(\psi)$.*

Le corollaire suivant est immédiat en utilisant l'unicité de la partie quasi-linéaire :

D.12.5. Corollaire. — *Soient φ et ψ deux formes quadratiques telles que φ soit anisotrope et ψ ne soit pas totalement singulière. Alors,* $\mathrm{ql}(\varphi)_{F(\psi)}$ *est anisotrope et coincide avec la partie quasi-linéaire de $(\varphi_{F(\psi)})_{\mathrm{an}}$. En particulier, si φ est de type (r,s), alors $(\varphi_{F(\psi)})_{\mathrm{an}}$ est de type (r',s) pour un certain $r' \leq r$.*

En termes d'indice de Witt et d'indice total, le corollaire D.12.5 se traduit comme suit :

D.12.6. Corollaire. — *Soient φ et ψ deux formes quadratiques avec φ anisotrope.*

(1) *Si φ et ψ ne sont pas totalement singulières et $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors $i_t(\varphi_{F(\psi)}) = i_W(\varphi_{F(\psi)}) \geq 1$.*

(2) $$i_t(\varphi_{F(\varphi)}) = \begin{cases} i_W(\varphi_{F(\varphi)}) & \textit{si } \varphi \textit{ n'est pas totalement singulière} \\ i_d(\varphi_{F(\varphi)}) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

D.12.B. Formes quadratiques à déploiement maximal. — (cf. exercice 5.8.4).

Le théorème D.12.1 a quelques conséquences importantes. La première concerne les formes voisines de Pfister :

D.12.7. Proposition. — *Soient φ une forme quadratique anisotrope voisine de Pfister, et ρ sa forme complémentaire. Alors, $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} \simeq \rho_{F(\varphi)}$.*

Démonstration. — Supposons que φ soit voisine d'une n-forme de Pfister. Soit ρ la forme complémentaire de φ. On sait par la proposition D.11.14 que $\dim\varphi + \dim\rho = 2^n$ et $\varphi_{F(\varphi)} \sim \rho_{F(\varphi)}$. Puisque $2\dim\varphi > \dim\pi$, on obtient $\dim\rho < 2^{n-1} < \dim\varphi$. Par le théorème D.12.1, $\rho_{F(\varphi)}$ est anisotrope. Ainsi, $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} \simeq \rho_{F(\varphi)}$. □

La deuxième conséquence concerne l'indice total d'une forme quadratique après extension des scalaires à son propre corps de fonctions :

D.12.8. Proposition. — *Soit φ une forme quadratique anisotrope de dimension $2^n + m$ avec $0 < m \leq 2^n$. Alors, $i_t(\varphi_{F(\varphi)}) \leq m$.*

Démonstration. — Soit V l'espace sous-jacent à φ. Posons $i = i_t(\varphi_{F(\varphi)}) \geq 1$. On choisit W un sous-espace de $V \otimes_F F(\varphi)$ totalement isotrope de dimension i, et W' un sous-espace de V de dimension $\dim\varphi - i + 1$. Par raison de dimension, on a $W \cap (W' \otimes_F F(\varphi)) \neq \{0\}$. Cela veut dire que la restriction φ' de φ à W' devient isotrope sur $F(\varphi)$. Par le théorème D.12.1, on a $\dim\varphi' > 2^n$, c'est-à-dire, $i \leq m$. □

D.12.9. Définition. — Une forme quadratique φ anisotrope de dimension $2^n + m$, avec $0 < m \leq 2^n$, est dite à déploiement maximal si $i_t(\varphi_{F(\varphi)}) = m$.

Le lemme qui suit donne des définitions équivalentes à la notion de déploiement maximal.

D.12.10. Lemme. — *Soit φ une forme quadratique anisotrope de dimension 2^n+m avec $0 < m \leq 2^n$. Notons (r,s) le type de φ et (r',s') le type de $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$. Alors, on a équivalence entre :*

(1) *φ est à déploiement maximal.*

(2) $$\dim(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} = \begin{cases} 2^n - m & \textit{si } \varphi \textit{ n'est pas totalement singulière,} \\ 2^n & \textit{sinon.} \end{cases}$$

(3) $$(r',s') = \begin{cases} (r-m,s) & \textit{si } \varphi \textit{ n'est pas totalement singulière,} \\ (0,2^n) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Voici quelques exemples de formes quadratiques à déploiement maximal :

D.12.11. Exemples. — Les formes quadratiques φ vérifiant l'une des conditions suivantes sont à déploiement maximal :

(1) $\dim\varphi = 2^n + 1$ avec $n \geq 1$.
(2) φ est une voisine de Pfister.

Démonstration

(1) Conséquence de la proposition D.12.8.
(2) Se déduit de la proposition D.12.7.

□

D.12.12. Remarque. — Il existe des formes quadratiques anisotropes qui sont à déploiement maximal mais pas des voisines de Pfister.

Démonstration. — Pour x,y,z,t des variables sur F, la forme quadratique $\varphi = x[1,y] \perp \langle 1,z,t\rangle$ est à déploiement maximal sur $F(x,y,z,t)$ car de dimension 5 (Exemple D.12.11), mais elle n'est pas une voisine par la proposition D.11.9. □

Cependant, le théorème suivant montre que sous certaines conditions sur la dimension, une forme quadratique à déploiement maximal ne peut être qu'une voisine de Pfister :

D.12.13. Théorème ([**77**, Th. 1.2]). — *Soit ψ une forme quadratique anisotrope qui n'est pas totalement singulière, de dimension $\leq 2^{n+1}$. Supposons qu'on ait l'une des conditions suivantes :*

(1) $\dim\psi \geq 2^{n+1} - 2$ *avec* $n \geq 2$.
(2) $\dim\psi = 2^{n+1} - 3$ *avec* $n \geq 2$ *si* $\dim \mathrm{ql}(\psi) = 1$, *et* $n \geq 3$ *sinon.*
(3) $\dim\psi = 2^{n+1} - 4$ *avec* $n \geq 3$.

(4) $\dim\psi = 2^{n+1}-5$ *avec* $n \geq 3$ *et (*$\dim \mathrm{ql}(\psi) = 1$ *ou* $\mathrm{ql}(\psi)$ *est semblable à* $\langle 1, a, b, ab\rangle \perp \langle c\rangle$ *pour certains* $a, b, c \in F^*$*).*
(5) $\dim\psi = 2^{n+1}-6$ *avec* $n \geq 3$ *et* $\psi \in I^2W_q(F)$.

Si ψ *est à déploiement maximal, alors elle est une voisine de Pfister.*

Après ce théorème, on peut se poser la question suivante :

D.12.14. Question (**[68**, p. 475]). — Pour tout entier $n \geq 1$, existe-t-il une borne optimale $M(n)$ avec $1 \leq M(n) \leq 2^n$ telle que toute forme quadratique anisotrope de dimension $2^n + m$ avec $M(n) \leq m \leq 2^n$ à déploiement maximal est une voisine de Pfister ?

On a quelques résultats qui donnent le comportement de la propriété de déploiement maximal après extension de scalaires à certains corps :

D.12.15. Proposition (**[77**, Lem. 4.5]). — *Soit* φ *une forme quadratique anisotrope qui n'est pas totalement singulière, de dimension* $2^n + m$ *avec* $0 < m \leq 2^n$*. Soit* ψ *une forme quadratique anisotrope qui n'est pas totalement singulière, de dimension* $> 2^n$*. Alors, on a :*

(1) *Supposons que* φ *soit de type* (r, s) *avec* $2r \geq m$*. Alors,* φ *n'est pas à déploiement maximal si et seulement si il existe une extension* K/F *telle que* $i_W(\varphi_K) < m$*.*
(2) *Si* K/F *est une extension transcendante pure, alors* φ *est à déploiement maximal si et seulement si* φ_K *est à déploiement maximal.*
(3) *Si* $\varphi_{F(\psi)}$ *est anisotrope, alors* φ *est à déploiement maximal si et seulement si* $\varphi_{F(\psi)}$ *est à déploiement maximal.*

Comme prouvé dans [**77**], on utilise le théorème D.12.3 et la proposition D.12.15 pour avoir :

D.12.16. Proposition (**[77**, Prop. 4.6]). — *Soient* φ *et* ψ *deux formes quadratiques anisotropes qui ne sont pas totalement singulières, de dimension respectives* $2^n + m$ *et* $2^n + l$ *avec* $0 < m, l \leq 2^n$*. On suppose que* φ *est à déploiement maximal et que* $\varphi_{F(\psi)}$ *est isotrope. Alors,* ψ *est aussi à déploiement maximal et la forme* $\psi_{F(\varphi)}$ *est isotrope.*

Finalement, en utilisant les théorèmes D.12.3, D.12.13 et la proposition D.12.16, on déduit un résultat général sur le problème d'isotropie :

D.12.17. Corollaire. — *Soient* φ *et* ψ *deux formes quadratiques anisotropes telles que* φ *ne soit pas totalement singulière,* $\dim\varphi = 2^n + 1$ *pour un certain entier* $n \geq 1$*, et que* ψ *satisfasse l'une des conditions (1)–(5) du théorème D.12.13 pour ce même entier* n*. Si* $\varphi_{F(\psi)}$ *est isotrope, alors* φ *et* ψ *sont des voisines de la même* $(n+1)$*-forme de Pfister.*

Démonstration. — Par le théorème D.12.3, la forme $\psi_{F(\varphi)}$ est isotrope et ψ n'est pas totalement singulière. Puisque φ est à déploiement maximal et $\dim \psi > 2^n$, on obtient par la proposition D.12.16 que ψ est aussi à déploiement maximal. Par le théorème D.12.13, ψ est une voisine d'une $(n+1)$-forme de Pfister π. Puisque $\psi_{F(\varphi)}$ est isotrope, alors $\pi_{F(\varphi)}$ est isotrope. Puisque $\dim \varphi > 2^n$, on obtient par la proposition D.11.8 que φ est une voisine de π. □

D.13. Déploiement standard des formes quadratiques

D.13.A. Généralités sur les tours de déploiement standard. — Comme en caractéristique $\neq 2$, à toute forme quadratique φ non nulle, on associe une tour $(F_i, \varphi_i)_{0 \leq i \leq h}$ d'extensions de F et de formes quadratiques, dite tour de déploiement standard de φ, comme suit :

$$F_0 = F, \quad \varphi_0 = \varphi_{\mathrm{an}},$$

et pour $i \geq 1$, on prend

$$F_i = F_{i-1}(\varphi_{i-1}), \quad \text{et} \quad \varphi_i = ((\varphi_{i-1})_{F_i})_{\mathrm{an}}.$$

D.13.1. Définition. — La hauteur standard de φ, qu'on note $\mathrm{hs}(\varphi)$, est le plus petit entier h tel que $\dim \varphi_h \leq 1$.

On a quelques résultats généraux sur les tours de déploiement standard [**135**, Th. 4.6] :

D.13.2. Lemme. — *Soient φ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2, $(F_i, \varphi_i)_{0 \leq i \leq h}$ sa tour de déploiement standard avec $h = \mathrm{hs}(\varphi)$. Notons (r_i, s_i) le type de φ_i pour $0 \leq i \leq h$. Alors, on a $h \geq 1$ et :*

(1) $r_0 \geq r_1 \geq \cdots \geq r_h$.
(2) $s_0 \geq s_1 \geq \cdots \geq s_h$.
(3) $2r_i + s_i > 2r_{i+1} + s_{i+1}$ *pour* $0 \leq i \leq h-1$.

Lorsque φ n'est pas totalement singulière, sa tour de déploiement standard se partage en deux parties. La première comporte des corps qui font augmenter l'indice de Witt de φ tout en gardant anisotrope $\mathrm{ql}(\varphi)$, puis la deuxième fait déployer la partie quasi-linéaire $\mathrm{ql}(\varphi)$. Ceci est formulé dans les deux premières assertions de la proposition qui suit :

D.13.3. Proposition. — *Soient φ une forme quadratique anisotrope qui n'est pas totalement singulière de dimension ≥ 2, $(F_i, \varphi_i)_{0 \leq i \leq h}$ sa tour de déploiement standard avec $h = \mathrm{hs}(\varphi)$. Notons (r_i, s_i) le type de φ_i et $\eta_i = \mathrm{ql}(\varphi_i)$ pour $0 \leq i \leq h$. Alors, il existe un entier $0 \leq h_r \leq h$ tel que :*

(1) $s_i = s_0$ *et* $r_{i-1} > r_i$ *pour* $i \leq h_r$ *(première partie).*
(2) $r_i = 0$ *et* $s_i > s_{i+1}$ *pour* $i \geq h_r$ *(deuxième partie).*

(3) $(r_{h_r}, s_{h_r}) = (0, s_0)$.
(4) $\eta_i \simeq (\mathrm{ql}(\varphi))_{F_i}$ *et* $\mathrm{hs}(\mathrm{ql}(\varphi)) = \mathrm{hs}(\eta_i)$ *pour* $i \leq h_r$.
De plus, on a $h_r = \mathrm{hs}(\varphi) - \mathrm{hs}(\mathrm{ql}(\varphi)) \leq r_0$.

Avec les mêmes notations que dans la proposition D.13.3, le lemme suivant donne plus d'informations sur les cas limites $h_r = 0$ et $h_r = h$, et sur les deux dernières formes φ_{h-1} et φ_h de la tour de φ :

D.13.4. Lemme. — *On garde les mêmes notations que dans la proposition D.13.3. On a :*
(1) $h_r = h$ *si et seulement si* $s_0 \in \{0, 1\}$.
(2) $h_r = 0$ *si et seulement si* $r_0 = 0$.
(3) *Si* $s_0 \geq 1$, *alors* $(r_h, s_h) = (0, 1)$.
(4) *Si* $s_0 \geq 2$, *alors* $(r_{h-1}, s_{h-1}) = (0, 2)$.

Comme fait dans [**135**], les lemmes D.13.2, D.13.4 et la proposition D.13.3 se démontrent en utilisant de façon cruciale le corollaire D.12.5.

On mentionne deux résultats sur la hauteur standard. Le premier se place en parallèle avec la proposition D.12.4 :

D.13.5. Proposition **(**[**135**, Th. 4.4]**).** — *Soient* φ *et* ψ *deux formes quadratiques anisotropes telles que* φ *soit totalement singulière et que* ψ *ne soit pas totalement singulière. Alors,* $\mathrm{hs}(\varphi) = \mathrm{hs}(\varphi_{F(\psi)})$.

Le second résultat donne une interprétation de la hauteur standard d'une forme quadratique comme étant le maximum sur toutes les hauteurs des tours d'extensions de F déployant celle-ci :

D.13.6. Théorème **(**[**76**, Th. 8.16]**).** — *Soit* φ *une forme quadratique anisotrope, et soit* $F = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m$ *une tour d'extensions de* F *telle que* $\dim(\varphi_{K_{i-1}})_{\mathrm{an}} > \dim(\varphi_{K_i})_{\mathrm{an}}$ *pour* $1 \leq i \leq m$. *Alors* $m \leq \mathrm{hs}(\varphi)$.

D.13.B. Quelques cas de généricité des tours de déploiement standard. — La question qui se pose est de savoir si la tour de déploiement standard vérifie les mêmes propriétés de généricité qu'en caractéristique $\neq 2$. Lorsque $\dim \mathrm{ql}(\varphi) \leq 1$, Knebusch et Rehmann ont prouvé que cela est vrai [**125**]. Lorsque $\dim \mathrm{ql}(\varphi) \geq 2$, la situation est plus compliquée. À ce propos, Knebusch montre que le déploiement partiel donné par la sous-tour $(F_i, \varphi_i)_{0 \leq i \leq h_r}$, où h_r est comme dans la proposition D.11.8, est générique au sens de ce qui est connu en caractéristique $\neq 2$ quand on ne considère que les extensions K/F pour lesquelles $\mathrm{ql}(\varphi)_K$ est anisotrope [**119**]. C'est sans doute cela qui l'a poussé à prendre h_r comme définition de la hauteur de φ. Il l'appelle la hauteur non défective de φ. En particulier, une forme quadratique φ est de hauteur non défective 1 si et seulement si φ_{an} n'est pas totalement singulière et $((\varphi_{\mathrm{an}})_{F(\varphi_{\mathrm{an}})})_{\mathrm{an}} \simeq \mathrm{ql}(\varphi_{\mathrm{an}})_{F(\varphi_{\mathrm{an}})}$.

Voici un exemple simple de formes quadratiques de hauteur non défective 1 :

D.13.7. Exemple. — Toute forme quadratique anisotrope de type $(1, s)$ est de hauteur non défective 1.

Démonstration. — Par le corollaire D.12.5, on a $\varphi_{F(\varphi)} \simeq \mathbb{H} \perp \mathrm{ql}(\varphi)_{F(\varphi)}$ et $\mathrm{ql}(\varphi)_{F(\varphi)}$ anisotrope. Ainsi, $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} \simeq \mathrm{ql}(\varphi)_{F(\varphi)}$. □

Signalons que la question de classifier les formes quadratiques de hauteur non défective 1 est encore ouverte. Néanmoins, le théorème qui suit donne une classification de ces formes ayant une partie quasi-linéaire de petite dimension, et donc donne d'autres exemples non triviaux de formes quadratiques de hauteur non défective 1 :

D.13.8. Théorème ([**76**, Th. 7.5]). — *Soit φ une forme quadratique anisotrope de type (r, s) avec $r \geq 2$. On suppose $s \leq 4$ ou $s = 5$ et $\mathrm{ql}(\varphi)$ est semblable à une forme $\langle 1, u, v, uv\rangle \perp \langle w\rangle$ pour certains $u, v, w \in F^*$. Alors, φ est de hauteur non défective* 1 *si et seulement si φ est de l'un des types suivants qui s'excluent mutuellement :*

(1) *Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $r + s = 2^n$ et que φ soit une voisine de Pfister.*
(2) $(r, s) = (2, 4)$ *et il existe $a, b, c, d, e \in F^*$ tels que $\varphi \simeq d\langle 1, a\rangle \otimes [1, b] \perp e\langle 1, a, c, ac\rangle$.*

Par contre, on a une classification complète des formes de hauteur standard 1 :

D.13.9. Théorème ([**135**, Th. 3.1]). — *Une forme quadratique φ anisotrope est de hauteur standard* 1 *si et seulement si elle est de l'un des trois types suivants :*

(1) *φ est de type* $(0, 2)$.
(2) *$\varphi \in GP_nF$ pour un certain entier $n \geq 1$.*
(3) *$\varphi \simeq \varphi_r \perp \langle a\rangle$ avec φ_r non singulière et $\varphi_r \perp a[1, \Delta(\varphi_r)]$ est semblable à une forme de Pfister.*

Toujours concernant le problème de généricité, on a prouvé dans [**76**, Prop. 4.6] le résultat suivant :

D.13.10. Proposition. — *Soient φ une forme quadratique anisotrope, $(F_i, \varphi_i)_{0\leq i\leq h}$ sa tour de déploiement standard et h sa hauteur standard. Notons (r_i, s_i) le type de φ_i pour $0 \leq i \leq h$. Pour toute extension K/F, si (r, s) désigne le type de $(\varphi_K)_{\mathrm{an}}$, alors il existe $i \in \{0, \dots, h\}$ tel que $r = r_i$.*

D'autre part, on a montré qu'en général la sous-tour $(F_i, \varphi_i)_{h_r\leq i\leq h}$ ne peut présenter les mêmes propriétés de généricité qu'en caractéristique $\neq 2$. On a construit un exemple d'une forme totalement singulière φ et d'une extension K/F telle que l'indice de défaut $i_d(\varphi_K)$ (cf. D.6.4) est différent de tous les autres indices de défaut qui apparaîssent dans la tour de déploiement standard de φ [**76**, Exam. 8.15].

D.13.C. Le degré d'une forme quadratique. — En plus de la hauteur standard, on associe à une forme quadratique un autre invariant numérique important, qu'on appelle le degré.

Soit φ une forme quadratique de hauteur standard h avec $\dim \varphi_{\mathrm{an}} \geq 2$. On a $h \geq 1$ et $\mathrm{hs}(\varphi_{h-1}) = 1$. Par le théorème D.13.9, φ_{h-1} est une forme voisine de Pfister de codimension ≤ 1, ou de type $(0, 2)$. Avec ces notations, on pose la définition suivante :

D.13.11. Définition

(1) Le degré de φ, qu'on note $\deg(\varphi)$, est défini[(3)] comme suit :

(i) Si φ_0 est non singulière, alors $\deg(\varphi) = d$ où $\varphi_{h-1} \in GP_d F_{h-1}$.
(ii) Si φ_0 est singulière, alors $\deg(\varphi) = 0$.

(2) Une forme quadratique de partie anisotrope nulle (resp. de partie anisotrope de dimension 1) est dite de degré ∞ (resp. de degré 0).

Comme en caractéristique $\neq 2$, on introduit l'ensemble $J_n(F) = \{\ \varphi \mid \deg(\varphi) \geq n\}$, avec $n \geq 1$. Il est bien clair que $GP_n F \subset J_n(F)$ et $W_q(F) = J_1(F)$. D'autre part, on prouve comme en caractéristique $\neq 2$ la proposition suivante :

D.13.12. Proposition. — *Pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $J_n(F)$ est un $W(F)$-sous-module de $W_q(F)$ contenant $I^n W_q(F)$.*

Récemment, Aravire et Baeza ont montré le théorème suivant qui constitue une réponse positive à l'analogue de la conjecture de degré en caractéristique 2 :

D.13.13. Théorème ([**16**]). — *Pour tout $n \geq 1$, on a $I^n W_q(F) = J_n(F)$.*

Dans [**141**] on a introduit la notion de degré d'une forme bilinéaire, puis on a étendu le théorème D.13.13 au cas des formes bilinéaires. Indiquons aussi que quelques résultats de classification des formes quadratiques (bilinéaires) par hauteur et degré ont été donnés dans [**135**, Section 6], [**141**].

D.13.D. Les formes quadratiques excellentes

D.13.14. Définition

(1) Une forme quadratique φ est dite excellente si elle est de dimension ≤ 1, ou est une voisine de dimension ≥ 2 dont la forme complémentaire est excellente.

(2) Pour K/F une extension et φ une forme quadratique sur K, on dit que φ est définie sur F si $\varphi \simeq \psi_K$ pour une certaine forme quadratique ψ sur F.

La tour de déploiement standard permet de classifier complètement les formes quadratiques excellentes :

---

(3) Notre définition de degré diffère de celle adoptée par Aravire et Baeza dans [**16**]. La nôtre étend la définition de degré en caractéristique $\neq 2$.

D.13.15. Théorème ([**135**, Cor. 5.11]). — *Soient φ une forme quadratique anisotrope, $(F_i, \varphi_i)_{0 \leq i \leq h}$ sa tour de déploiement standard et h sa hauteur standard. Alors, φ est excellente si et seulement si $\dim \mathrm{ql}(\varphi) \leq 1$ et φ_i est définie sur F pour tout $0 \leq i \leq h$.*

Cette classification est analogue à celle donnée par Knebusch pour les formes quadratiques excellentes en caractéristique $\neq 2$ [**123**].

D.14. Un théorème de Fitzgerald et un autre de Knebusch

Un important théorème en théorie des corps de fonctions en caractéristique $\neq 2$ est dû à Fitzgerald [**54**, Th. 1.6]. Il donne des conditions pour qu'une forme quadratique anisotrope soit semblable à une forme de Pfister dès qu'elle devienne hyperbolique sur le corps de fonctions de l'une de ses sous-formes. On a étendu à la caractéristique 2 ce résultat de Fitzgerald en prenant en considération les formes quadratiques singulières :

D.14.1. Théorème ([**76**, Th. 5.1]). — *Soient ψ, η_r, φ_r des formes quadratiques non singulières, et σ une forme quadratique totalement singulière. Soit ρ un complément non singulier de σ. On suppose que :*

(1) ψ, $\eta = \eta_r \perp \sigma$, $\varphi = \varphi_r \perp \sigma$ *sont anisotropes,*
(2) $\dim \psi$, $\dim \varphi \geq 2$,
(3) $\psi \sim \varphi_r \perp \eta_r \perp \rho$,
(4) $\dim \eta < \dim \varphi + 2^{\deg(\psi)}$.

Alors, ψ est hyperbolique sur $F(\varphi)$ si et seulement si ψ est semblable à une forme de Pfister et $\psi \simeq \varphi_r \perp \eta_r \perp \rho$.

Ce théorème a permis d'avoir en caractéristique 2 l'analogue d'un résultat de Knebusch [**106**, Cor. 13.4] :

D.14.2. Corollaire ([**76**, Cor. 5.3]). — *Soient φ et ψ deux formes quadratiques telles que ψ soit non singulière anisotrope et φ soit non défective. Si φ est de type (r, s) avec $3 \dim \varphi + s > \dim \psi$ et $\psi_{F(\varphi)}$ est hyperbolique, alors ψ est semblable à une forme de Pfister.*

En particulier ce corollaire permet de retrouver le résultat caractérisant les formes de Pfister comme étant les formes quadratiques non singulières qui deviennent hyperboliques sur leurs propres corps de fonctions (Théorème D.13.9).

Un autre théorème dû à Knebusch en caractéristique $\neq 2$ affirme qu'une forme quadratique anisotrope φ pour laquelle la forme $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ est définie sur F ne peut être qu'une voisine de Pfister. Ce résultat ne se généralise pas complètement à la caractéristique 2. Dans [**76**, p. 21–22] on a donné plusieurs exemples de formes quadratiques anisotropes φ qui ne sont pas des voisines de Pfister mais que $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ est définie sur F. Un simple exemple est qu'une forme quadratique φ totalement singulière anisotrope ne peut être une voisine de Pfister (proposition D.11.8 (1)), et pourtant on sait que la partie anisotrope de $\varphi_{F(\varphi)}$ est toujours définie sur F (proposition D.9.7 (3)). On a aussi donné d'autres exemples non triviaux de formes quadratiques singulières anisotropes φ non voisines avec $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ définie sur F. Ce qu'on a noté est que tous nos exemples utilisent des formes quadratiques anisotropes de type (r,s) avec $s \geq 2r$. Ceci nous a poussé à conjecturer ce qui suit :

D.14.3. Conjecture **([76**, Conj. 6.5**]).** — *Soit φ une forme quadratique anisotrope de type (r,s) telle que $2r > s$ et que la forme $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}}$ soit définie sur F. Alors, φ est une voisine de Pfister.*

On a répondu par l'affirmative à cette conjecture dans certains cas :

D.14.4. Théorème. — *La conjecture D.14.3 est vraie si $s \leq 4$ ou $s = 5$ et $\mathrm{ql}(\varphi)$ est semblable à $\langle 1, a, b, ab\rangle \perp \langle c\rangle$ pour certains $a, b, c \in F^*$.*

Dans l'esprit des deux théorèmes de Fitzgerald et Knebusch qu'on vient d'évoquer, certains résultats ont été obtenus récemment sur les formes bilinéaires. Voici le premier d'entre eux dont la preuve est basée essentiellement sur le théorème D.18.2 :

D.14.5. Proposition **([138**, Cor. 5.4**]).** — *Soit B une forme bilinéaire anisotrope et φ une forme totalement singulière anisotrope telles que $B_{F(\varphi)}$ soit métabolique et $2\dim\varphi > \dim B$. Alors :*

(1) *B est semblable à une forme bilinéaire de Pfister C.*
(2) *Toute forme bilinéaire B' associée à φ est une voisine de C.*

Une conséquence immédiate de cette proposition est la classification des formes bilinéaires B vérifiant $\dim(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \leq 1$, c'est-à-dire, celles de hauteur standard 1 dans le langage de la théorie du déploiement standard :

D.14.6. Corollaire **([138**, Cor. 5.5**], [141]).** — *Soit B une forme bilinéaire anisotrope. Alors B devient métabolique sur $F(B)$ si et seulement si elle est semblable à une forme bilinéaire de Pfister.*

Démonstration. — On applique la proposition D.14.5 à $\varphi = \widetilde{B}$. □

On a étendu aux formes bilinéaires en caractéristique 2 le résultat de Knebusch cité auparavant sur les formes quadratiques voisines en caractéristique $\neq 2$:

D.14.7. Corollaire **([138**, Cor. 5.6**]).** — *Soit B une forme bilinéaire anisotrope. Alors, on a équivalence entre :*

(1) *B est une voisine d'une forme bilinéaire de Pfister .*
(2) *Il existe une forme bilinéaire C telle que $\widetilde{B} \simeq \widetilde{C}$ et $(C_{F(B)})_{\mathrm{an}}$ soit définie sur F.*

Mais contrairement au cas des formes quadratiques voisines, on peut avoir une forme bilinéaire voisine B et une forme bilinéaire C avec $\widetilde{B} \simeq \widetilde{C}$ et $(C_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq D_{F(B)}$ pour une certaine forme bilinéaire D, mais que la forme $C \perp D$ est isotrope. Voici un exemple :

D.14.8. Exemple. — Soient $K = F(x, y)$ avec x, y des variables sur F, $\pi = \langle\langle x, y\rangle\rangle_b$, $B = \langle 1, 1 + x, y, xy\rangle_b$ et $C = \langle 1, x, x + y, xy\rangle_b$ qui sont des formes anisotropes sur K. Alors :

(1) B est une voisine de π.
(2) $(C_{K(B)})_{\mathrm{an}} \simeq (\langle y, x + y\rangle_b)_{K(B)}$ et $C \perp \langle y, x + y\rangle_b$ est isotrope.

Démonstration. — Puisque $\langle 1\rangle \perp \langle 1+x\rangle \simeq \langle 1\rangle \perp \langle x\rangle$ (cf. D.3.10), on a $\widetilde{B} \simeq \widetilde{\pi}$. Ainsi, B est voisine de π. En particulier, $\pi_{K(B)} \sim 0$. Puisque $C \sim \pi \perp \langle y, x+y\rangle_b$, on déduit que $(C_{K(B)})_{\mathrm{an}} \simeq (\langle y, x + y\rangle_b)_{K(B)}$. Il est clair que $C \perp \langle y, x + y\rangle$ est isotrope. □

Comme le montre l'exemple suivant, on a même des formes bilinéaires voisines B dont la forme $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}}$ n'est pas définie sur F :

D.14.9. Exemple. — Soient $K = F(x, y, z)$ avec x, y, z des variables sur F, et

$$B = \langle x, y, xy, 1 + x, z, (1 + x)z\rangle_b.$$

Alors, B est une voisine de Pfister mais la forme $(B_{K(B)})_{\mathrm{an}}$ n'est pas définie sur K.

Démonstration. — Puisque $\langle x\rangle \perp \langle 1+x\rangle \simeq \langle 1\rangle \perp \langle x\rangle$ et $\langle z\rangle \perp \langle z(1+x)\rangle \simeq \langle z\rangle \perp \langle xz\rangle$, on obtient que $\widetilde{B}$ est associée à une sous-forme de $\langle\langle x, y, z\rangle\rangle_b$, et donc B est une voisine de Pfister. D'après [**141**, Th. 5.10] la forme $(B_{K(B)})_{\mathrm{an}}$ ne peut être définie sur K. □

D.15. Le théorème de norme

D.15.A. Cas des formes bilinéaires et formes quadratiques non singulières. — Un autre résultat classique dans la théorie algébrique des formes quadratiques est le théorème de norme. Ce théorème, prouvé par Knebusch en caractéristique $\neq 2$, affirme que pour $p \in F[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme irréductible unitaire[(4)], une forme quadratique φ anisotrope devient hyperbolique sur $F(p)$, le corps des fractions de l'anneau quotient $F[x_1, \ldots, x_n]/(p)$, si et seulement si p est une norme de φ (*i.e.*, les formes quadratiques φ et $p\varphi$ sont isométriques sur le corps des fractions rationnelles $F(x_1, \ldots, x_n)$) [**121**, Th. 4.2].

En fait, Knebusch a prouvé son théorème de norme pour les formes bilinéaires en toute caractéristique, ce qui permet de l'avoir en particulier pour les formes quadratiques en caractéristique $\neq 2$.

La méthode développée par Knebusch ne s'applique pas aux formes quadratiques non singulières. Elle utilise la suite exacte de Milnor décrivant l'anneau de Witt du

[(4)] Unitaire veut dire que le coefficient dominant du polynôme p pour l'ordre lexicographique est 1.

corps $F(x_1)$ des fractions rationnelles en la variable x_1, alors qu'en caractéristique 2 on ne dispose pas d'une telle suite pour le groupe $W_q(F(x_1))$. Récemment, Aravire et Jacob ont établi cette suite pour $W_q(F(x_1))$ lorsque F est parfait de caractéristique 2 [**18**]. Cependant, le cas d'un corps quelconque de caractéristique 2 est toujours ouvert.

Bien après le résultat de Knebusch, Baeza a étendu le théorème de norme au cas des formes quadratiques non singulières [**23**]. Dans sa preuve, Baeza a utilisé un argument de relèvement en considérant le corps F comme étant le corps résiduel d'un anneau de caractéristique 0 complet pour une valuation discrète, ce qui lui a permis d'utiliser le théorème de norme de Knebusch en caractéristique 0.

D.15.B. Cas des formes quadratiques singulières. — Bien entendu, les formes quadratiques singulières se partagent en deux types s'excluant mutuellement : les formes totalement singulières et les formes φ telles que $\dim \varphi > \dim \mathrm{ql}(\varphi) > 0$. On appelle ces dernières des formes semi-singulières.

Récemment on a étendu le théorème de norme au cas des formes quadratiques totalement singulières en démontrant :

D.15.1. Théorème ([**139**, Th. 1.1]). — *Soient φ une forme quadratique totalement singulière anisotrope de dimension ≥ 2, et $p \in F[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme irréductible unitaire. Alors, on a équivalence entre :*

(1) *φ est quasi-hyperbolique sur $F(p)$.*
(2) *p est une norme de φ.*

Comme on l'a indiqué après la définition D.9.6, on a utilisé dans [**137**], [**139**] qu'une forme quadratique φ totalement singulière de dimension paire est quasi-hyperbolique lorsque $i_d(\varphi) = \frac{\dim \varphi}{2}$. Mais avec la notion de quasi-hyperbolicité fixée dans la définition D.9.6, les résultats de [**137**], [**139**] restent aussi vrais.

Rappelons que Hoffmann a prouvé de manière indépendante le théorème D.15.1 par une méthode différente de la nôtre en travaillant sur les p-formes diagonales en caractéristique $p > 0$ [**74**].

Dans un article récent avec Mammone, on a travaillé sur une version du théorème de norme pour les formes quadratiques semi-singulières. On a obtenu un résultat partiel qui est le suivant :

D.15.2. Théorème ([**143**, Th. 1.1]). — *Soient φ une forme quadratique semi-singulière anisotrope, et $p \in F[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme irréductible.*

(1) *Si p est une norme de φ, alors :*
   (i) *p est inséparable,* i.e., *$\partial p / \partial x_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. En particulier, si p est donné par une forme quadratique ψ, alors ψ est totalement singulière.*
   (ii) *$i_W(\varphi_{F(p)}) = \frac{\dim \varphi - \dim \mathrm{ql}(\varphi)}{2}$ et $\mathrm{ql}(\varphi)_{F(p)}$ est quasi-hyperbolique.*
(2) *Réciproquement, et si p est donné par une forme quadratique ψ qui représente 1, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *p est une norme de φ.*
(ii) *ψ est totalement singulière, $i_W(\varphi_{F(p)}) = \frac{\dim\varphi - \dim \mathrm{ql}(\varphi)}{2}$ et $\mathrm{ql}(\varphi)_{F(p)}$ est quasi-hyperbolique.*
(iii) *ψ est totalement singulière et $i_t(\varphi_{F(p)}) = \frac{\dim\varphi}{2}$.*

Signalons que l'assertion (2) de ce théorème est toujours ouverte dans le cas d'un polynômes irréductible unitaire qui n'est pas donné par une forme quadratique.

D.15.3. Remarque. — L'affirmation $i_W(\varphi_{F(p)}) = \frac{\dim\varphi - \dim \mathrm{ql}(\varphi)}{2}$ de l'assertion (1) du théorème D.15.2 n'implique pas, en général, que $R_{F(p)} \sim 0$ où $\varphi \simeq R \perp \mathrm{ql}(\varphi)$.

Voici un exemple qui illuste cette remarque :

D.15.4. Exemple. — Soit x, y, z des variables sur F, et soit

$$\varphi = [1 + z^{-1}, x^{-1}] \perp y[1, x^{-1}] \perp z^{-1}\langle 1, y\rangle.$$

Alors, φ est anisotrope sur $F(x, y, z)$, et admet $p = X^2 + y$ comme norme sur $F(x, y, z)(X)$, mais $[1 + z^{-1}, x^{-1}] \perp y[1, x^{-1}]$ n'est pas hyperbolique sur $F(x, y, z)(p)$.

Démonstration. — Puisque $[1 + z^{-1}, x^{-1}] \perp \langle z^{-1}\rangle \simeq [1, x^{-1}] \perp \langle z^{-1}\rangle$ (Lemme D.3.10), on obtient $\varphi \simeq [1, x^{-1}] \perp y[1, x^{-1}] \perp z^{-1}\langle 1, y\rangle$, et donc p est une norme de φ sur $F(x, y, z)(X)$ puisqu'il est représenté par les formes $[1, x^{-1}] \perp y[1, x^{-1}]$ et $\langle 1, y\rangle$. De plus, φ est anisotrope sur $F(x, y, z)$ puisque $[1, x^{-1}] \perp y[1, x^{-1}]$ et $\langle 1, y\rangle$ sont aussi anisotropes sur $F(x, y)$ [**139**, Lem. 3.1]. Le polynôme p n'est pas une norme de $[1+z^{-1}, x^{-1}] \perp y[1, x^{-1}]$, car sinon cette forme serait hyperbolique sur $F(x, y, z)(\sqrt{y})$, et donc $[z^{-1}, x^{-1}]$ serait hyperbolique sur $F(x, y, z)(\sqrt{y})$, ce qui est absurde. □

Les affirmations obtenues dans le théorème D.15.2 motivent à étendre la notion de quasi-hyperbolicité au cas des formes semi-singulières comme suit :

D.15.5. Définition. — Une forme quadratique φ semi-singulière est dite quasi-hyperbolique si $\dim\varphi$ est paire et $i_t(\varphi) \geq \frac{\dim\varphi}{2}$.

Avec cette définition et le théorème D.15.2, on a étendu le théorème de sous-forme au cas des formes quadratiques semi-singulières :

D.15.6. Proposition **(**[**143**, Prop. 1.4]**).** — *Soient $\varphi = R \perp \mathrm{ql}(\varphi)$ et ψ deux formes quadratiques anisotropes telles que φ soit semi-singulière et devienne quasi-hyperbolique sur $F(\psi)$. Alors, on a les affirmations suivantes :*
(1) *ψ est totalement singulière.*
(2) *Pour $\alpha \in D_F(\psi)$, $\beta \in D_F(R)$ et $\gamma \in D_F(\mathrm{ql}(\varphi))$, il existe une forme quadratique non singulière R' telle que $\varphi \simeq R' \perp \mathrm{ql}(\varphi)$, et ψ est dominée par $\alpha\beta R'$ et $\alpha\gamma\,\mathrm{ql}(\varphi)$. En particulier,*

$$\dim\psi \leq \min(\frac{\dim R}{2}, \dim \mathrm{ql}(\varphi)).$$

D.16. Formes différentielles et corps de fonctions

Un autre aspect de la théorie algébrique des formes quadratiques et bilinéaires en caractéristique 2 est son lien avec la cohomologie galoisienne et les formes différentielles établi auparavant par Arason [**10**] et Kato [**118**]. Ceci prend sa motivation d'un travail de Milnor [**162**].

D.16.A. Une esquisse sur les contributions d'Arason et Kato.

— Dans [**162**] Milnor a introduit les groupes $K_n^M(F)$ $(n \geq 0)$ dont la définition et les propriétés ont été données dans le chapitre 9 du présent livre. Comme expliqué dans le même chapitre, on a un homomorphisme surjectif $a^n : K_n^M(F)/2 \to I^nF/I^{n+1}F$ envoyant chaque symbole $\{a_1, \cdots, a_n\}$ sur $\langle\langle a_1, \cdots, a_n\rangle\rangle_b + I^{n+1}F \in I^nF/I^{n+1}F$. Milnor a conjecturé que a^n est un isomorphisme pour tout entier positif n et tout corps F. Quelques années plus tard, Kato a répondu par l'affirmative à cette conjecture en donnant un lien entre les groupes $K_n^M(F)$ et les formes différentielles [**118**].

Rappelons que $\Omega_F^0 = F$ et pour $n \geq 1$, $\Omega_F^n = \bigwedge^n \Omega_F^1$ est l'espace des n-formes différentielles de Kähler, où Ω_F^1 est le F-espace vectoriel engendré par les symboles da, $a \in F$, avec les relations :

(1) $d(a+b) = da + db$ pour $a, b \in F$.
(2) $d(ab) = adb + bda$ pour $a, b \in F$.

Par (2) on obtient $da = 0$ pour tout $a \in F^2$. Ainsi, l'application $d : F \to \Omega_F^1$ envoyant a sur da est F^2-linéaire. Cette application s'étend en un homomorphisme de F^2-espaces vectoriels $d : \Omega_F^n \longrightarrow \Omega_F^{n+1}$, dit opérateur différentiel, qui est donné par :

$$d(xda_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_n) = dx \wedge da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_n.$$

On a l'existence d'un homomorphisme $\wp_n : \Omega_F^n \longrightarrow \Omega_F^n/d\Omega_F^{n-1}$ donné sur les générateurs par :

$$\wp_n(\alpha\frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n}) = \overline{(\alpha^2 - \alpha)\frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n}}.$$

On fixe quelques notations :

D.16.1. Notation. — Pour tout entier $n \geq 1$, on notera :

(1) $\nu_F(n)$ le noyau de $\wp_n$.
(2) $\mathcal{H}^n(F)$ le conoyau de $\wp_n$.
(3) $\overline{I^n}W_q(F) = I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$.
(4) $\overline{I^n}F = I^nF/I^{n+1}F$.

Dans [**118**], Kato a montré qu'il y a un isomorphisme $d\log_n : K_n^M(F)/2 \to \nu_F(n)$, donné par :

$$d\log(\{a_1, \cdots, a_n\}) = \frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n}.$$

Ceci donne une description de $\nu_F(n)$ $(n \geq 1)$:

$$\nu_F(n) = \{\sum \frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n} \mid a_i \in F^*\}.$$

Toujours dans [**118**], Kato a lié les formes différentielles avec les formes quadratiques non singulières et les formes bilinéaires en montrant ce qui suit :

D.16.2. Théorème **([118])**. — *Pour tout entier $n \geq 1$, on a des isomorphismes $\mathcal{H}^n F \xrightarrow{\sim} \overline{I^{n+1}} W_q(F)$ et $\nu_F(n) \xrightarrow{\sim} \overline{I^n} F$ donnés respectivement sur les générateurs par :*

$$\begin{aligned} \overline{\alpha \frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n}} &\longmapsto \overline{\langle\langle a_1, \ldots, a_n, \alpha]}, \\ \frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n} &\longmapsto \overline{\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle_b}. \end{aligned}$$

Les groupes $\nu_F(n)$ et $\mathcal{H}^n F$ s'interprètent par le moyen de la cohomologie galoisienne comme suit :

D.16.3. Proposition. — *Soit G_s le groupe de Galois d'une clôture séparable F_s de F. En considérant de manière naturelle le groupe $\nu_{F_s}(n)$ comme un G_s-module, on a $\nu_F(n) = H^0(G_s, \nu_{F_s}(n))$ et $\mathcal{H}^n F = H^1(G_s, \nu_{F_s}(n))$.*

Démonstration. — Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \nu_{F_s}(n) \longrightarrow \Omega^n_{F_s} \xrightarrow{\wp_n} \Omega^n_{F_s}/\Omega^{n-1}_{F_s} \longrightarrow \mathcal{H}^n F_s \longrightarrow 0. \tag{D.16.1}$$

Puisque F_s est séparablement clos, on a $\mathcal{H}^n F_s = 0$. On peut aussi voir que $\Omega^n_{F_s} = \Omega^n_F \otimes_F F_s$. Ainsi, en prenant la cohomologie de la suite (D.16.1), on obtient la conclusion désirée. □

De manière analogue à ce qui a été fait dans la proposition D.16.3, on peut aussi donner une interprétation des groupes $\overline{I^n} W_q(F)$ et $\overline{I^n} F$ en terme de la cohomologie galoisienne, et ce en utilisant le théorème D.16.2.

Arason a essayé de faire cela un peu avant les résultats de Kato en démontrant ce qui suit :

D.16.4. Théorème **([10])**. — *Soit G_s le groupe de Galois d'une clôture séparable F_s de F. En considérant de manière naturelle $W(F_s)$ comme un G_s-module, on a :*

(1) *$W(F) = H^0(G_s, W(F_s))$ et $W_q(F) = H^1(G_s, W(F_s))$.*
(2) *$I^k F = H^0(G_s, I^k F_s)$ et $I^k F \otimes W_q(F) = H^1(G_s, I^k F_s)$ pour $k = 1, 2$.*

Complétons ce théorème par la remarque que les groupes de cohomologie galoisienne en degré > 1 et à coefficients dans $W(F_s)$ (ou $I^k F_s$) sont nuls du fait que $W(F_s)$ est de torsion 2-primaire [**197**].

D.16.B. Comportement des formes différentielles sur les corps de fonctions

Pour toute extension K/F, on note $\Omega^n(K/F)$, $\mathcal{H}^n(K/F)$ et $\nu_{K/F}(n)$ les noyaux respectifs des homomorphismes $\Omega^n_F \to \Omega^n_K$, $\mathcal{H}^n(F) \to \mathcal{H}^n(K)$ et $\nu_F(n) \to \nu_K(n)$ induits par l'inclusion $F \subset K$.

Par le théorème D.16.2, les calculs de $\mathcal{H}^n(K/F)$ et $\nu_{K/F}(n)$ permettent d'avoir les noyaux $\overline{I^n}(K/F)$ et $\overline{I^n}W_q(K/F)$ des homomorphismes naturels $\overline{I^n}F \to \overline{I^n}K$ et $\overline{I^n}W_q(F) \to \overline{I^n}W_q(K)$. C'est ce qu'on fait le plus souvent, puisqu'en général il est plus facile de faire ces calculs pour les formes différentielles que pour les formes quadratiques ou bilinéaires.

Récemment, Aravire et Baeza ont calculé ces noyaux lorsque K est le corps de fonctions d'une forme quadratique ou bilinéaire de Pfister. On renvoie à [**16**] et [**17**] pour tous les détails sur les résultats qu'on va lister.

Une des conséquences de ces calculs faits par Aravire et Baeza est leur preuve de la conjecture de degré en caractéristique 2 (Théorème D.13.13). Son analogue en caractéristique $\neq 2$ se déduit des résultats récents de Voevodsky (Corollaire 9.7.4).

D.16.B.1. Cas des noyaux $\Omega^n(K/F)$ et $\nu_{K/F}(n)$. — Faisons remarquer que les noyaux $\Omega^n(F(B)/F)$ et $\nu_{F(B)/F}(n)$ sont nuls pour B une forme quadratique anisotrope qui n'est pas totalement singulière.

Aravire et Baeza ont prouvé la proposition suivante par un calcul direct sur les formes différentielles :

D.16.5. Proposition ([**16**, Lem. 2.2, 2.7])

(1) *Pour K/F une extension transcendante pure, on a $\Omega^n(K/F) = 0$.*
(2) *Pour $B = \langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle_b$ une n-forme bilinéaire de Pfister, on a :*

$$\Omega^m(F(B)/F) = \begin{cases} \Omega_F^{m-n} \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_n & \text{si } m \geq n, \\ 0 & \text{si } m < n. \end{cases}$$

En utilisant cette fois-ci un calcul beaucoup plus subtil, ils ont prouvé les théorèmes suivants :

D.16.6. Théorème ([**15**, Th. 1.4]). — *Pour $B = \langle\langle a_1, \cdots, a_n\rangle\rangle_b$ une n-forme bilinéaire de Pfister, on a :*

$$\nu_{F(B)/F}(n) = \{a\frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n} \mid a \in F \text{ avec } a^2 + a \in F^2(a_1, \cdots, a_n)'\}$$

où $F^2(a_1, \cdots, a_n)'$ désigne l'ensemble des scalaires représentés par la partie pure de B qui est l'unique forme B' vérifiant $B \simeq \langle 1\rangle_b \perp B'$.

Dans le but de garder un énoncé simplifié, on n'a pas incorporé dans le théorème D.16.6 l'expression du noyau $\nu_{F(B)/F}(m)$ pour $m > n$ et B une n-forme bilinéaire de Pfister. On renvoie à [**15**, Cor. 3.2] pour plus de détails sur ce cas.

En ce qui concerne le noyau $\overline{I^n}(K/F)$, on a le théorème suivant :

D.16.7. Théorème ([**15**, Cor. 3.3]). — *Pour $B = \langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle_b$ une n-forme bilinéaire de Pfister, on a pour $m \geq n$:*

$$\overline{I^m}(F(B)/F) = \{\overline{I^{m-n}F \otimes \langle\langle x_1, \ldots, x_n \rangle\rangle_b} \mid x_i \in F^2(a_1, \ldots, a_n) - \{0\}\}.$$

En particulier, pour $m = n$ on a :

$$\overline{I^n}(F(B)/F) = \{\overline{\langle\langle x_1, \ldots, x_n \rangle\rangle_b} \mid x_i \in F^2(a_1, \ldots, a_n) - \{0\}\}.$$

D.16.B.2. Cas du noyau $\mathcal{H}^n(K/F)$. — Pour ce noyau on tiendra compte aussi du cas des corps de fonctions des formes quadratiques non singulières.

D.16.8. Théorème

(1) [**16**, Th. 4.1] **:** *Pour $B = \langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle_b$ une n-forme bilinéaire de Pfister, on a :*

$$\mathcal{H}^m(F(B)/F) = \begin{cases} \overline{\Omega_F^{m-n} \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_n} & si\ m \geq n, \\ 0 & si\ m < n. \end{cases}$$

(2) [**17**, Th. 1.2] **:** *Pour $\varphi = \langle\langle a_1, \cdots, a_n, b]$ une $(n+1)$-forme quadratique de Pfister, on a :*

$$\mathcal{H}^m(F(B)/F) = \begin{cases} \nu_F(m-n) \wedge \overline{b\frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n}} & si\ m \geq n, \\ 0 & si\ m < n. \end{cases}$$

Le théorème D.16.2 de Kato permet de reformuler le théorème D.16.8 dans le cas des formes quadratiques :

D.16.9. Corollaire

(1) *Pour $B = \langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle_b$ une n-forme bilinéaire de Pfister, on a :*

$$\overline{I^{m+1}}W_q(F(B)/F) = \begin{cases} \overline{B \otimes I^{m-n+1}W_q(F)} & si\ m \geq n, \\ 0 & si\ m < n. \end{cases}$$

(2) *Pour $\varphi = \langle\langle a_1, \cdots, a_n, b]$ une $(n+1)$-forme quadratique de Pfister, on a :*

$$\overline{I^{m+1}}W_q(F(B)/F) = \begin{cases} \overline{I^{m-n}F \otimes \varphi} & si\ m \geq n, \\ 0 & si\ m < n. \end{cases}$$

D.17. Un invariant pour les formes totalement singulières

Fixons une définition :

D.17.1. Définition. — Soit φ une forme quadratique totalement singulière non nulle.

(1) Le corps normique de φ, noté $N_F(\varphi)$, est le corps $F^2(ab \mid a, b \in D_F(\varphi))$.

(2) Le degré normique de φ, noté $\mathrm{ndeg}_F(\varphi)$, est l'entier $[N_F(\varphi) : F^2]$.

Cette définition est analogue à la notion du groupe normique d'une quadrique Q en caractéristique $\neq 2$, qui est défini comme étant le sous-groupe du groupe multiplicatif du corps de base engendré par les éléments ab, où a et b sont représentés par la forme quadratique définissant Q (cf. [**43**, Lem. 2.2]).

Le lemme suivant se vérifie sans difficulté et prouve que le corps normique et le degré normique d'une forme totalement singulière φ sont des invariants de la classe des formes quadratiques semblables à φ :

D.17.2. Lemme. — *Soit $\varphi \simeq \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ une forme totalement singulière avec $a_1 \neq 0$. Alors, pour tout $a \in F^*$ on a :*

$$N_F(a\varphi) = N_F(\varphi) = F^2(a_1a_2, \ldots, a_1a_n).$$

De ce lemme, on déduit :

D.17.3. Corollaire. — *Soit φ une forme quadratique totalement singulière non nulle. Soient $b_1, \ldots, b_m \in F$ tels que $N_F(\varphi) = F^2(b_1, \ldots, b_m)$. Alors, $N_K(\varphi_K) = K^2(b_1, \ldots, b_m)$ pour toute extension K/F.*

Une première application de la notion de degré normique est une autre caractérisation des quasi-formes de Pfister qui s'ajoute à celle de la proposition D.11.5 (d'ailleurs cette dernière proposition se démontre aussi par le moyen de degré normique, cf. [**76**, Section 8]) :

D.17.4. Proposition **(**[**76**, Prop. 8.5]**)**

(1) *Pour $\varphi = \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$, on a $N_F(\varphi) = F^2(a_1, \ldots, a_n) = D_F(\varphi) \cup \{0\}$.*
(2) *Une forme totalement singulière anisotrope φ est semblable à une quasi-forme de Pfister si et seulement si* $\dim\varphi = \mathrm{ndeg}_F(\varphi)$.
(3) *Il y a une correspondance biunivoque entre les quasi n-formes de Pfister anisotropes et les extensions purement inséparables de F^2 de degré 2^n contenues dans F. Cette correspondance est donnée par*

$$\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle \longleftrightarrow F^2(a_1, \ldots, a_n).$$

Démonstration

(1) On a $N_F(\varphi) = F^2(a_1, \ldots, a_n)$. Il est clair que

$$F^2[a_1, \ldots, a_n] = D_F(\varphi) \cup \{0\} \subset N_F(\varphi).$$

Puisque les éléments a_i sont algébriques sur F^2, on obtient $D_F(\varphi) \cup \{0\} = N_F(\varphi)$.
(2) Soient $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = 2^n$ et $a_1, \ldots, a_n \in F$ avec $N_F(\varphi) = F^2(a_1, \ldots, a_n)$. Supposons que $\dim\varphi = \mathrm{ndeg}(\varphi)$. On peut supposer que $\varphi \simeq \langle 1, \ldots\rangle$, et donc $D_F(\varphi) \cup \{0\} \subset N_F(\varphi) = D_F(\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle) \cup \{0\}$. Par la proposition D.9.7 (2), on obtient que $\varphi \subset \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$, et donc $\varphi \simeq \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ par raison de dimension. La réciproque se déduit de (1).

(3) Facile à faire.

□

Voici quelques résultats généraux sur le degré normique :

D.17.5. Proposition **([76**, Prop. 8.6**])**. — *Soit φ une forme totalement singulière non nulle.*

(1) *Il existe $m \geq 0$ tel que $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = 2^m$.*
(2) *Pour m comme dans (1), on a $m + 1 \leq \dim \varphi_{\mathrm{an}} \leq 2^m = \mathrm{ndeg}_F(\varphi)$.*
(3) *Pour m comme dans (1) et pour $a_1, \ldots, a_m \in F^*$ tels que $N_F(\varphi) = F^2(a_1, \ldots, a_m)$, on a que pour tout $a \in D_F(\varphi)$, $a\varphi_{\mathrm{an}} \subset \langle\langle a_1, \ldots, a_m \rangle\rangle$. Si de plus $b_1, \ldots, b_m \in F^*$ vérifient $a\varphi_{\mathrm{an}} \subset \langle\langle b_1, \ldots, b_m \rangle\rangle$, alors*

$$\langle\langle a_1, \ldots, a_m \rangle\rangle \simeq \langle\langle b_1, \ldots, b_m \rangle\rangle,$$

et cette quasi m-forme de Pfister est anisotrope.

Démonstration. — On peut supposer φ anisotrope et $\varphi \simeq \langle 1, a_1, \ldots, a_n \rangle$. Ainsi, $N_F(\varphi) = F^2(a_1, \ldots, a_n)$. Soit $m \leq n$ minimal pour la propriété, qu'après réindexation si nécessaire, $N_F(\varphi) = F^2(a_1, \ldots, a_m)$. Il est clair que $2^m = \mathrm{ndeg}(\varphi)$, ce qui montre (1). Pour prouver (2), on note que l'anisotropie de φ implique que $\{1, a_1, \ldots, a_n\} \subset N_F(\varphi)$ sont F^2-linéairement indépendants, et donc on peut les compléter en une F^2-base de $N_F(\varphi)$, ce qui implique que $\varphi \subset \langle\langle a_1, \ldots, a_m \rangle\rangle$. Ainsi, $m + 1 \leq \dim \varphi \leq 2^m$. (3) se déduit de la proposition D.17.4 (3). □

D.17.6. Notation. — Avec les hypothèses et notations de la proposition D.17.5, l'unique quasi-forme de Pfister $\langle\langle a_1, \ldots, a_m \rangle\rangle$ sera notée φ_{qp}.

Voici la façon dont change le degré normique après extension des scalaires :

D.17.7. Proposition. — *Soit φ une forme totalement singulière anisotrope avec* $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = 2^m$. *Soient $a_1, \ldots, a_m \in F^*$ tels que $N_F(\varphi) = F^2(a_1, \ldots, a_m)$, et K/F une extension telle que φ_K soit isotrope. Alors :*

(1) $\mathrm{ndeg}_K(\varphi_K) = 2^l < 2^m$.
(2) *Il existe un sous-ensemble $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}\} \subset \{a_1, \ldots, a_m\}$ tel qu'on ait $N_K(\varphi_K) = K^2(a_{i_1}, \ldots, a_{i_\ell})$. En particulier, pour tout $x \in D_K(\varphi)$, on obtient $x(\varphi_K)_{\mathrm{an}} \subset \langle\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_l} \rangle\rangle_K$.*

Démonstration. — À un scalaire près, on peut supposer $1 \in D_F(\varphi)$. Par la proposition D.17.5 (3), $\varphi \subset \langle\langle a_1, \ldots, a_m \rangle\rangle$. Comme φ_K est isotrope, il en est de même pour $\langle\langle a_1, \ldots, a_m \rangle\rangle_K$. La proposition D.17.4 (3) implique que

$$[K^2(a_1, \ldots, a_m) : K^2] = 2^l < 2^m.$$

Il est clair qu'on peut trouver une partie $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}\}$ de $\{a_1, \ldots, a_m\}$ telle que $K^2(a_1, \ldots, a_m) = K^2(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l})$. Ainsi, $N_K(\varphi_K) = K^2(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})$. Tout cela avec la proposition D.17.5 (3) permet de conclure. □

Lorsque $K = F(\varphi)$ la proposition D.17.7 se précise comme suit :

D.17.8. Proposition ([**76**, Lem. 8.10]). — *Soient $\varphi = \langle 1\rangle \perp \varphi'$ une forme totalement singulière anisotrope de dimension ≥ 2, et $K = F(\varphi)$. Supposons $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = 2^m$ et soient $b_1, \dots, b_m \in F^*$ tels que $N_F(\varphi) = F^2(b_1, \dots, b_m)$. Alors :*

(1) $\mathrm{ndeg}_K(\varphi_K) = 2^{m-1}$.
(2) $N_K(\varphi_K) = K^2(b_2, \dots, b_m)$. *En particulier,* $(\varphi_K)_{\mathrm{an}} \subset \langle\langle b_2, \dots, b_m\rangle\rangle_K$.

À la proposition D.11.8 s'ajoute une autre donnant la caractérisatiion des formes quasi-voisines *via* le degré normique :

D.17.9. Proposition ([**76**, Prop. 8.9]). — *Soit φ une forme totalement singulière anisotrope. Alors :*

(1) *Si φ est une quasi-voisine d'une quasi m-forme de Pfister anisotrope π, alors $N_F(\varphi) = N_F(\pi)$.*
(2) *φ est une quasi-voisine si et seulement si* $2\dim\varphi > \mathrm{ndeg}_F(\varphi)$.

Démonstration

(1) On a bien $N_F(\varphi) \subset N_F(\pi)$. Ainsi, $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) \leq \mathrm{ndeg}_F \pi = 2^m$. Comme φ est anisotrope de dimension $> 2^{m-1}$, on déduit par la proposition D.17.5 (2) que $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = 2^m$ et donc $N_F(\varphi) = N_F(\pi)$.
(2) Si φ est quasi-voisine, disons d'une quasi m-forme de Pfister π, alors (1) implique $2\dim\varphi > \dim\pi = 2^m = \mathrm{ndeg}_F(\pi) = \mathrm{ndeg}_F(\varphi)$. Réciproquement, supposons $2\dim\varphi > \mathrm{ndeg}_F(\varphi)$. Soient $a_1, \dots, a_m \in F^*$ tels que $N_F(\varphi) = F^2(a_1, \dots, a_m)$ et $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = 2^m$. La forme $\pi = \langle\langle a_1, \dots, a_m\rangle\rangle$ est anisotrope et pour tout $a \in D_F(\varphi)$, on a $a\varphi \subset \pi$ (Proposition D.17.5 (3)). Ainsi, $2\dim\varphi > \mathrm{ndeg}_F(\varphi) = 2^m = \dim\pi$ implique que φ est une quasi-voisine de π.

□

Donnons quelques applications du degré normique à la tour de déploiement standard d'une forme totalement singulière, et plus particulièrement à celle d'une quasi-voisine[(5)] :

D.17.10. Théorème ([**76**, Th. 8.11]). — *Soient φ une forme totalement singulière anisotrope, $(F_i, \varphi_i)_{0\leq i\leq h}$ sa tour de déploiement standard avec $h = \mathrm{hs}(\varphi)$. Soient $b_1, \dots, b_m \in F^*$ tels que $N_F(\varphi) = F^2(b_1, \dots b_m)$ et $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = 2^m$. Soit $s_i = \dim\varphi_i$ et n_i vérifiant $2^{n_i} < s_i \leq 2^{n_i+1}$.*

(1) *Pour tout $i \in \{1, \cdots, h\}$, on a :*
  (i) $\mathrm{ndeg}_{F_i}(\varphi_i) = 2^{m-i}$.
  (ii) $N_{F_i}(\varphi_i) = F_i^2(b_1, \dots, b_{m-i})$.

---

(5) Les résultats du théorème D.17.10 ont été obtenus antérieurement dans [**136**] par des méthodes n'utilisant pas le degré normique.

(iii) $\max\{m-i+1, 2^{n_{i-1}}\} \leq \dim \varphi_i \leq 2^{m-i}$.

(2) *$h = m$. De plus, pour tout $a \in D_F(\varphi)$, on a*

$$a\varphi_i \subset \langle\langle b_1, \ldots, b_{m-i}\rangle\rangle_{F_i}.$$

(3) $(s_0, s_1, \ldots, s_h) = (\dim \varphi, 2^{m-1}, 2^{m-2}, \ldots, 1)$ *si et seulement si φ est une quasi-voisine de Pfister. Dans ce cas, $a\varphi_i \simeq \langle\langle b_1, \ldots, b_{m-i}\rangle\rangle_{F_i}$ pour tout $a \in D_F(\varphi)$ et $i \geq 1$.*

Autre l'énoncé classique du théorème de sous-forme pour les formes totalement singulières (proposition D.10.5), on donne un autre utilisant le degré normique :

D.17.11. Proposition ([**137**, Prop. 1.4]). — *Soient φ et ψ deux formes totalement singulières. On suppose que φ est anisotrope et devient quasi-hyperbolique sur $F(\psi)$. Alors pour tout $a \in D_F(\varphi)$, on a :*

(1) $N_F(\psi) \subset D_F(a\varphi) \cup \{0\}$.

(2) $\psi_{\mathrm{qp}} \subset a\varphi$ *(cf. Notation D.17.6).*

D.18. Quelques calculs de noyaux de Witt

Pour K/F une extension de corps, on note $W(K/F)$ (resp. $W_q(K/F)$) le noyau de l'homomorphisme d'anneaux $W(F) \to W(K)$ (resp. de l'homomorphisme de groupes $W_q(F) \to W_q(K)$) induit par l'inclusion $F \subset K$. En général, il est très difficile de calculer ces noyaux pour K quelconque. Cependant, comme pour le problème d'isotropie, le cas d'un corps de fonctions d'une forme quadratique suscite beaucoup d'intérêt. C'est ce cas qui va nous intéresser dans cette section, et dont l'analogue en caractéristique $\neq 2$ a été traité par Fitzgerald [**55**].

On commence par donner quelques résultats préliminaires sur les deux noyaux :

(1) Il est bien connu que les noyaux $W(K/F)$ et $W_q(K/F)$ sont nuls pour K/F transcendante pure.

(2) Le noyau $W(F(\varphi)/F)$ est nul pour φ non totalement singulière. Ceci se déduit du fait qu'une forme bilinéaire anisotrope reste anisotrope sur $F(\varphi)$ (Proposition D.12.4).

(3) Pour φ et φ' deux formes quadratiques anisotropes telles que $\varphi_{F(\varphi')}$ soit isotrope, on a $W_q(F(\varphi)/F) \subset W_q(F(\varphi')/F)$ [**138**, Prop. 3.9].

(4) Pour φ et φ' deux formes quadratiques totalement singulières anisotropes telles que $\varphi' \leq \varphi$ et $\dim \varphi' \geq 2$, on a $W(F(\varphi)/F) \subset W(F(\varphi')/F)$ [**138**, Prop. 3.6].

Le cas (3) se démontre en utilisant le théorème de sous-forme (Théorème D.10.4), par contre le cas (4) s'obtient de façon beaucoup plus subtile en utilisant des résultats de la théorie de spécialisation.

En parallèle à l'étude des noyaux $W(K/F)$ et $W_q(K/F)$, on peut étudier la quasi-hyperbolicité des formes totalement singulières sur le corps des fonctions d'une autre. Dans ce cas on a une réponse complète :

D.18.1. Théorème ([**137**, Th. 1.5]). — *Soient φ et ψ deux formes quadratiques anisotropes. On suppose que φ est totalement singulière. Alors, on a équivalence entre les assertions :*

(1) *$\varphi_{F(\psi)}$ est quasi-hyperbolique.*
(2) *ψ est totalement singulière et il existe des scalaires convenables $a_1, \dots, a_n \in F^*$ tels que $\varphi \simeq a_1\psi_{\mathrm{qp}} \perp \cdots \perp a_n\psi_{\mathrm{qp}}$ (cf. Notation D.17.6).*

D.18.A. Le noyau $W(F(\varphi)/F)$. — Pour ce noyau, on a une réponse complète :

D.18.2. Théorème ([**138**, Th. 1.2]). — *Soit φ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2 telle que $W(F(\varphi)/F) \neq 0$. Alors :*

(1) *φ est totalement singulière.*
(2) *Soit $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = 2^d$. Une forme bilinéaire anisotrope B sur F devient métabolique sur $F(\varphi)$ si et seulement si $B \simeq \alpha_1 B_1 \perp \cdots \perp \alpha_r B_r$ pour certains $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in F^*$ et $B_1, \dots, B_r$ des d-formes bilinéaires de Pfister associées à φ_{qp} (cf. Notation D.17.6).*

Pour prouver ce théorème, on a procédé par induction sur $\mathrm{ndeg}_F(\varphi)$ en rassemblant beaucoup de résultats, parmi lesquels la proposition D.10.5, le théorème D.18.1 et la proposition D.10.6.

Un autre calcul fait sur le noyau $W(K/F)$ est dû à Hoffmann lorsque l'extension K/F vérifie la proppriété $K^2 \subset F$. Son résultat est le suivant :

D.18.3. Théorème ([**66**, Th. 1.1]). — *Soit K/F une extension telle qu'on ait l'inclusion $K^2 \subset F$. Alors le noyau $W(K/F)$ est l'idéal de $W(F)$ engendré par $\{\langle 1, a\rangle_b \mid a \in K^{*2}\}$.*

On renvoie à [**75**] pour les détails de la preuve de ce théorème, et d'autres résultats.

D.18.B. Le noyau $W_q(F(\varphi)/F)$. — Contrairement au cas du noyau $W(F(\varphi)/F)$, on est loin de donner une caractérisation complète du noyau $W_q(F(\varphi)/F)$. Certains calculs ont été faits auparavant sur ce noyau pour des extensions élémentaires, comme les extensions quadratiques et biquadratiques. Plus précisément, pour $a, b \in F$ on a :

(1) D'après Baeza [**22**, Cor. 4.16, p. 128] :

$$W_q(F(\wp^{-1}(a), \wp^{-1}(b))/F) = W(F)[1, a] + W(F)[1, b].$$

(2) D'après Baeza [**21**] dans le cas quadratique, puis Mammone et Moresi [**153**] dans le cas biquadratique :

$$W_q(F(\sqrt{a}, \sqrt{b})/F) = \langle 1, a\rangle_b \otimes W_q(F) + \langle 1, b\rangle_b \otimes W_q(F).$$

(3) D'après Ahmad [**3**] :

$$W_q(F(\wp^{-1}(a), \sqrt{b})/F) = W(F)[1, a] + \langle 1, b\rangle_b \otimes W_q(F).$$

On reviendra à la fin de cette sous-section pour une généralisation du calcul dans (2) à une extension multiquadratique purement inséparabe. Par contre, le calcul dans

(1) ne se généralise pas au cas des extensions triquadratiques séparables comme il a été prouvé par Mammone et Moresi [**153**]. De manière analogue, en caractéristique $\neq 2$, Elman, Lam, Tignol et Wadsworth [**52**] ont montré que le calcul dans (1) (ou (2)) ne se généralise pas à une extension triquadratique.

Comme en caractéristique $\neq 2$ et lorsque $W_q(F(\varphi)/F)$ n'est pas nul, certains questions se posent sur ce noyau, à savoir s'il contient des formes de Pfister, ou s'il est engendré par des formes semblables à des formes de Pfister qu'il contient, et si c'est le cas, sous quelles conditions le calcul peut être exprimé à isométrie près et non pas à équivalence de Witt près. Dans ce sens on rappelle une définition due originalement à Elman, Lam et Wadsworth [**51**] :

D.18.4. Définition. — Soient $n \geq 1$ un entier, et I une partie de $\mathbb{N}$. Pour K/F une extension, on dit que :

(1) $W_q(K/F)$ est un I-groupe de Pfister s'il est engendré par les formes quadratiques de $W_q(K/F) \cap GP_nF$ pour $n \in I$.
(2) $W_q(K/F)$ est fortement un I-groupe de Pfister si toute forme quadratique de $W_q(K/F)$ est isométrique à une somme orthogonale de formes quadratiques de $W_q(K/F) \cap GP_nF$ pour $n \in I$.

On a une description complète de $W_q(F(\varphi)/F)$ lorsque φ une voisine ou une quasi-voisine de Pfister :

D.18.5. Théorème **(**[**138**, Th. 1.4]**)**. — *Soit φ une forme quadratique anisotrope voisine ou quasi-voisine de π. Soit* $\dim \pi = 2^n$. *Alors :*

(1) $W_q(F(\varphi)/F) = W_q(F(\pi)/F)$.
(2) *Si φ est une voisine de Pfister, alors toute forme anisotrope appartenant à $W_q(F(\varphi)/F)$ est isométrique à $\tau \otimes \pi$ pour une certaine forme bilinéaire τ. En particulier, $W_q(F(\varphi)/F)$ est fortement un n-groupe de Pfister.*
(3) *Si φ est une quasi-voisine de Pfister, alors toute forme anisotrope appartenant à $W_q(F(\varphi)/F)$ est isométrique à $B \otimes \rho$ pour une certaine forme non singulière ρ, où B est une forme bilinéaire de Pfister associée à π. En particulier, $W_q(F(\varphi)/F)$ est fortement un $(n+1)$-groupe de Pfister.*

Rappelons que l'assertion (3) de ce théorème a été prouvé auparavant par Ahmad dans le cas $n = 1$ [**1**, Cor. 2.8].

Pour φ une forme quadratique quelconque, on a donné des résultats sur $W_q(F(\varphi)/F)$ généralisant essentiellement ceux prouvés par Fitzgerald en caractéristique $\neq 2$ [**55**]. Plus exactement, on s'est basé sur l'idée qui permet d'avoir des informations sur $W_q(F(\varphi)/F)$ à partir d'un autre noyau $W_q(F(\varphi')/F)$ sachant que φ' satisfasse certaines conditions vis-à-vis de φ. Notre principal résultat dans ce sens est le théorème suivant :

D.18.6. Théorème ([**138**, Th. 1.5]). — *Soient φ une forme quadratique anisotrope (éventuellement singulière) de dimension ≥ 3, et φ' une forme quadratique telles que :*

(1) $\varphi' \leq \varphi$ *et* $\dim \varphi = \dim \varphi' + 1$.
(2) $W_q(F(\varphi')/F)$ *est fortement un n-groupe de Pfister pour un certain $n \geq 1$.*

Alors $W_q(F(\varphi)/F)$ est un $\{n, n+1\}$-groupe de Pfister.

On a raffiné ce théorème lorsque φ' est une voisine de Pfister :

D.18.7. Théorème ([**138**, Th. 1.6]). — *Soient φ une forme quadratique anisotrope (éventuellement singulière) de dimension ≥ 3, et φ' une forme quadratique telles que :*

(1) $\varphi' \leq \varphi$ *et* $\dim \varphi = \dim \varphi' + 1$.
(2) φ' *est une voisine d'une n-forme de Pfister.*

Alors $W_q(F(\varphi)/F)$ est fortement un m-groupe de Pfister avec $m = n$ ou $n+1$ suivant que φ est une voisine d'une n-forme de Pfister ou non.

Comme on l'a évoqué au début de cette sous-section, on a décrit complètement le noyau $W_q(K/F)$ lorsque K est une extension multiquadratique purement inséparable :

D.18.8. Théorème ([**140**]). — *Pour des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F^*$ ($n \geq 1$), on a :*

$$W_q(F(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})/F) = \sum_{i=1}^{n} \langle 1, \alpha_i \rangle_b \otimes W_q(F).$$

Pour montrer ce théorème on a utilisé la conjecture de Milnor démontrée par Kato [**118**], et des calculs sur les formes différentielles.

En combinant les théorèmes D.18.5, D.18.6 et D.18.7, on a obtenu une description précise du noyau $W_q(F(\varphi)/F)$ lorsque φ est de dimension ≤ 5 et de partie quasilinéaire de dimension s :

Dimension de φ	**Conditions sur φ**	**Le noyau $W_q(F(\varphi)/F)$**
2	$s=0$	fortement un 1-groupe de Pfister
	$s=2$	fortement un 2-groupe de Pfister
3	$s=1$	fortement un 2-groupe de Pfister
	$s=3$	fortement un 3-groupe de Pfister
4	$s=0$ et φ n'est pas semblable à une 2-forme de Pfister	fortement un 3-groupe de Pfiste
	$s=2$	fortement un 3-groupe de Pfister
	$s=4$ et φ n'est pas semblable à une quasi 2-forme de Pfister	fortement un 3-groupe de Pfister
	$s=0$ et φ est semblable à une 2-forme de Pfister	fortement un 2-groupe de Pfister
	$s=4$ et φ n'est pas semblable à une quasi 2-forme de Pfister	un $\{3,4\}$-groupe de Pfister
5	$s=1$ ou 3 et φ n'est pas une voisine de Pfister	un 4-groupe de Pfister
	$s=1$ ou 3 et φ est une voisine de Pfister	fortement un 3-groupe de Pfister
	$s=5$ et φ est une quasi-voisine de Pfister	fortement un 4-groupe de Pfister
	$s=5$ et φ n'est pas une quasi-voisine de Pfister	?

APPENDICE E

FORMES QUADRATIQUES ET CYCLES ALGÉBRIQUES

D'APRÈS ROST, VOEVODSKY, VISHIK, KARPENKO...

Introduction

La théorie algébrique des formes quadratiques (par opposition à la théorie arithmétique dans la lignée de Legendre, Gauss, Hermite, Minkowski, Hasse...) est l'étude des formes quadratiques sur un corps quelconque : l'article fondateur est celui de Witt ([**224**], 1937). Elle a connu un développement par à-coups, impulsé par des idées nouvelles et fondamentales introduites successivement par un petit nombre de mathématiciens. Il s'agit maintenant d'une théorie foisonnante, en pleine clarification, où cependant les méthodes les plus sophistiquées voisinent toujours de manière un peu mystérieuse avec les plus élémentaires, donnant parfois des démonstrations très différentes d'un même théorème.

Qu'est-ce que la théorie des formes quadratiques sur un corps F ? Sous un angle, il s'agit de l'étude des polynômes homogènes de degré 2. Le point de vue de Witt était qu'on peut munir ces polynômes d'une somme et d'un produit, en considérant la somme directe et le produit tensoriel des espaces vectoriels sous-jacents : on obtient ainsi l'anneau de Witt (ou plus exactement de Witt-Grothendieck) de F. La tentation de placer ainsi la théorie dans le contexte plus général de l'étude des formes de degré d est trompeuse : pour $d \geq 3$, la situation devient trop rigide et l'anneau obtenu est essentiellement inintéressant (cf. [**64**][(1)]).

D'un autre point de vue, la quadrique projective des zéros d'une forme quadratique q est un exemple de variété projective homogène (ici, sous l'action du groupe $\mathrm{SO}(q)$) ; en particulier c'est une variété rationnelle. L'étude de l'isotropie de cette quadrique sur les extensions de F est centrale dans la théorie. Quoique d'autres variétés

---

Reproduction de l'exposé no 941 du Séminaire Bourbaki (novembre 2004), avec l'aimable autorisation des organisateurs.

(1) Par exemple, d'après un résultat remontant à Camille Jordan, si F est de caractéristique zéro, le groupe des automorphismes d'une telle forme est fini dès que l'hypersurface projective correspondante est lisse ; voir [**192**] pour une démonstration moderne et un peu plus générale.

projectives homogènes soient naturellement attachées à des structures algébriques (par exemple les variétés de Severi-Brauer), il n'y a pas d'autre famille de telles variétés qui soit représentée par des structures algébriques qu'on puisse additionner et multiplier comme les formes quadratiques. Ceci donne sa richesse et sa spécificité à la théorie, qui se trouve naturellement au confluent de deux mondes (formes et variétés de drapeaux généralisées).

Pendant longtemps, cette théorie a pu passer pour une curiosité à mi-chemin entre l'« arithmétique des corps »et une géométrie algébrique relativement élémentaire. Elle est en train de trouver sa vraie place : d'une part elle intervient de manière essentielle dans la démonstration de la conjecture de Milnor par Voevodsky ([**217**], voir [**100**] pour un rapport dans ce Séminaire). D'autre part, elle est intrinsèquement présente dans la théorie homotopique des schémas de Morel-Voevodsky [**168**] : ce fait, anticipé par Rost, est illustré par le théorème fondamental de Morel (cf. [**166**, rem. 6.4.2]) selon lequel l'anneau des endomorphismes de l'objet unité de la catégorie homotopique stable des F-schémas n'est autre que l'anneau de Witt-Grothendieck de F, lorsque F est parfait de caractéristique $\neq 2$.

Par ailleurs, la théorie des formes quadratiques sur un schéma, qui était longtemps restée embryonnaire après le travail de fondements de Knebusch dans les années 1970, connaît depuis une dizaine d'années un développement spectaculaire grâce aux résultats de Balmer, Walter et d'autres, obtenus à l'aide des catégories triangulées à dualité [**25, 27**]. Ce n'est pas le lieu d'en parler ici, mais cela confirme que la théorie arrive à maturité.

Dans cet exposé, j'ai d'abord voulu offrir un survol de la théorie telle qu'elle s'est développée jusqu'au milieu des années 1990 : mal connue des non spécialistes, elle présente une élégance et une originalité qui, j'espère, séduiront certains lecteurs comme elles m'ont séduit moi-même. (Ne pouvant être exhaustif dans un tel exposé, je me suis néanmoins limité aux aspects directement liés aux derniers développements : ainsi, les travaux d'Elman-Lam ou ceux sur les corps ordonnés ne sont pas mentionnés.) Ensuite expliquer les développements de nature motivique (ou pour être plus terre à terre, faisant intervenir les correspondances algébriques) qui la révolutionnent depuis un peu moins de 10 ans, et les illustrer par des applications frappantes qui semblaient hors de portée avant l'apparition de ces méthodes.

J'ai essayé de donner un traitement aussi géométrique que possible de la théorie ; en particulier, chaque fois que cela a été possible je me suis efforcé de la placer dans le contexte plus général des variétés projectives homogènes (voir ci-dessus).

Ce rapport étant déjà excessivement long, j'ai été conduit à faire des choix cornéliens. En particulier, j'ai renoncé à exposer la partie de la théorie faisant intervenir les invariants supérieurs des formes quadratiques, c'est-à-dire la seconde conjecture de Milnor ([**172**] ; cf. [**100**, (2) à la fin de l'introduction]). On n'y trouvera que de brèves allusions ici ou là, voir notamment remarques E.6.9 et E.11.32. Un avantage de ce choix est que les résultats expliqués ici sont tous de démonstrations « élémentaires », n'utilisant pas la théorie homotopique des schémas.

Je remercie Yves André, Hélène Esnault, Detlev Hoffmann et Alexander Vishik pour leur aide dans la préparation de ce texte, ainsi que Nikita Karpenko, Jean-Pierre Serre et Tamás Szamuely pour diverses remarques le concernant. Je remercie également le CIMAT de Guanajuato, où il a été en partie conçu, pour son hospitalité et pour les excellentes conditions de travail dont j'ai bénéficié.

On travaille sur un corps F *de caractéristique* $\neq 2$. On note $\bar{F}$ une clôture séparable de F.

I. FORMES QUADRATIQUES

E.1. Définitions et notations

Une *forme quadratique* sur F est un espace vectoriel V muni d'une application $q : V \to F$ telle que $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ pour $(\lambda, x) \in F \times V$ et que $\check{q}(x,y) := \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$ (la *forme polaire* de q) soit bilinéaire : V est l'*espace sous-jacent* à q ; sa dimension est appelée la *dimension* de q, et notée $\dim q$. On a les notions classiques de vecteurs orthogonaux et d'orthogonal $X^\perp$ d'une partie X de V. On dit que q est *non dégénérée* si $V^\perp = \{0\}$.

À partir de maintenant, « forme quadratique »signifie forme quadratique de dimension finie, non dégénérée.

Un *morphisme* de (V,q) vers (V',q') est une application linéaire $f : V \to V'$ telle que $q' \circ f = q$: alors f est automatiquement injective et $f(V)$ est facteur direct orthogonal de V'. Si f est un isomorphisme, on dit que c'est une *isométrie*. On note $q \simeq q'$ s'il existe une isométrie entre q et q', et $q \leq q'$ s'il existe un morphisme de q vers q' (*i.e.* si q est isométrique à une sous-forme de q'). On note $O(q)$ le groupe des isométries d'une forme quadratique q : c'est le *groupe orthogonal* de q.

On dit aussi que deux formes q, q' sur F sont *semblables* s'il existe $a \in F^*$ tel que $q \simeq aq'$.

On peut additionner et multiplier les formes quadratiques :

– *Somme directe orthogonale* : $(V,q)\perp(V',q') = (V \oplus V', q\perp q')$, où $(q\perp q')(x,x') = q(x) + q'(x')$.
– *Produit tensoriel* : en termes de formes polaires, $(V,\check{q})\otimes(V',\check{q}') = (V\otimes V', \check{q}\otimes\check{q}')$, où $(\check{q}\otimes\check{q}')(x\otimes x', y\otimes y') = \check{q}(x,y)\check{q}'(x',y')$.

On peut aussi *étendre les scalaires* de F à une extension quelconque K de F : on notera $q \mapsto q_K$ cette opération.

Si (V,q) est une forme quadratique, par le choix d'une base (e_i) de V, q correspond à un polynôme $Q = \sum_i a_i T_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} T_i T_j$, où $a_i = q(e_i)$ et $a_{i,j} = \check{q}(e_i, e_j)$. Si $\dim q \geq 3$, Q est irréductible et définit une hypersurface lisse $X_q \subset \mathbf{P}(V)$: la *quadrique*

associée à q. On a $\dim X_q = \dim q - 2$. Si $\dim q = 2$, X_q n'est plus (géométriquement) irréductible, mais consiste en deux points rationnels ou un point quadratique de $\mathbf{P}(V)$. Deux quadriques X_q et $X_{q'}$ sont isomorphes si et seulement si q et q' sont semblables.

E.2. La théorie de Witt

E.2.A. Base orthogonale et théorème de simplification

E.2.1. Théorème

a) *Toute forme quadratique q possède une base orthogonale.*

b) *Soient q, q_1, q_2 trois formes quadratiques sur F. Si $q \perp q_1 \simeq q \perp q_2$, alors $q_1 \simeq q_2$.*

La partie (a) de ce théorème est bien connue et sa démonstration se perd dans la nuit des temps. La partie (b) (théorème de simplification) est essentiellement équivalente au fait que, si $\dim q = n$, tout élément de $O(q)$ est produit de n réflexions. Elle est couramment attribuée à Witt [**224**] ; toutefois, Scharlau [**191**, §2][(2)] a fait observer qu'elle avait été obtenue 30 ans auparavant par Dickson [**46**] (très probablement sans que Witt en ait conscience).

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthogonale de q et $x = \sum x_i e_i$, on a $q(x) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$ avec $a_i = q(e_i) \in F^*$. On résume ceci par la notation $q \simeq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

E.2.B. Indice de Witt. — Soit q une forme quadratique d'espace vectoriel sous-jacent V. Un vecteur $x \in V$ est *isotrope* si $q(x) = 0$. Un sous-espace $W \subset V$ est *totalement isotrope* si $q_{|W} = 0$. La forme q est *isotrope* s'il existe un vecteur isotrope $\neq 0$, *anisotrope* si elle n'est pas isotrope.

On appelle *plan hyperbolique*, et on note $\mathbb{H}$, la forme quadratique de dimension 2, d'espace vectoriel sous-jacent F^2, définie par $q(x,y) = xy$ ($(x,y) \in F^2$). Pour tout $a \in F^*$, on a $\mathbb{H} \simeq \langle a, -a \rangle$; toute forme quadratique isotrope de dimension 2 est isométrique à $\mathbb{H}$. On dit qu'une forme h est *hyperbolique* si $h \simeq m\mathbb{H} =$ pour m convenable.

E.2.2. Théorème. — *Toute forme quadratique q se décompose de manière unique (à isométrie près) en somme directe orthogonale $q_{\mathrm{an}} \perp h$, où q_{an} est anisotrope et h est hyperbolique.*

Ce théorème, dû à Witt [**224**], se déduit facilement du théorème E.2.1. Il ramène dans une large mesure l'étude des formes quadratiques à celle des formes quadratiques anisotropes. On en déduit immédiatement que, si (V, q) est une forme quadratique, tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux de V ont la même dimension : c'est l'*indice de Witt* de q, noté $i(q)$. Avec la notation du théorème E.2.2, on a $i(q) =$

(2) Je remercie Serre de m'avoir indiqué cette référence.

$\frac{1}{2}\dim h \leq \frac{1}{2}\dim q$. La forme q est hyperbolique si et seulement si $i(q) = \frac{1}{2}\dim q$. Notons le lemme suivant, fort utile et qui donne une idée de l'esprit du sujet :

E.2.3. Lemme

a) *Soient q, q' deux formes quadratiques anisotropes, et soit $n = i(q\perp - q')$. Alors il existe des formes quadratiques φ, q_1, q_1', avec $\dim\varphi = n$, telles que*

$$q \simeq \varphi \perp q_1, \qquad q' \simeq \varphi \perp q_1'.$$

b) *Soient q une forme quadratique sur F et $q' \leq q$, de codimension r. Alors $i(q') \geq i(q) - r$. En particulier, si $\dim q' > \dim q - i(q)$, alors q' est isotrope.*

Voici une démonstration de (b) : soient V l'espace sous-jacent à q, W le sous-espace de V correspondant à q' et $H \subset V$ un sous-espace totalement isotrope de dimension $i(q)$. Alors $\operatorname{codim}_H(W \cap H) \leq r$.

E.2.C. Anneau de Witt

E.2.4. Définition. — Deux formes quadratiques q, q' sont *équivalentes au sens de Witt* si $q_{\mathrm{an}} \simeq q'_{\mathrm{an}}$; on note cette relation $q \sim q'$.

L'équivalence de Witt respecte la somme et le produit des formes quadratiques, d'où

E.2.5. Définition. — L'*anneau de Witt* de F, noté $W(F)$, est l'anneau des classes d'équivalence de la relation $\sim$, pour l'addition et la multiplication induites respectivement par $\perp$ et $\otimes$.

D'après le théorème E.2.2, une forme quadratique est caractérisée, à isométrie près, par sa dimension et sa classe dans $W(F)$. On a parfois besoin de considérer une variante de l'anneau de Witt, l'anneau de Witt-Grothendieck : c'est l'anneau des classes d'équivalence de la relation $\simeq$ de l'introduction, pour l'addition et la multiplication induites respectivement par $\perp$ et $\otimes$. Il est noté (ici) $\hat{W}(F)$. Il est clair qu'on a un homomorphisme surjectif $\hat{W}(F) \to W(F)$, de noyau isomorphe à $\mathbb{Z}$ (engendré par la classe du plan hyperbolique). D'après le théorème E.2.1 (a), ces deux anneaux sont engendrés par les classes des formes quadratiques de dimension 1, et il est facile d'en donner en fait une *présentation* (cf. [**146**, ch. II]).

E.3. Le théorème de Springer

E.3.1. Théorème ([**200**]). — *Soit q une forme quadratique anisotrope sur F, et soit E/F une extension finie de degré impair. Alors q_E est encore anisotrope.*

Ce théorème avait été conjecturé par Witt. Il est contenu dans un théorème plus récent de Swan [**204**] et Karpenko [**107**, prop. 2.6] :

E.3.2. Théorème. — *Soit X une quadrique anisotrope sur F, et soit $x \in X$ un point fermé de degré 2. Alors tout 0-cycle sur X est linéairement équivalent à un multiple de x.*

Utilisons l'argument de Springer pour démontrer ce théorème[3] : soit $\langle a_0, \dots, a_{d+1}\rangle$ une équation de X, où $d = \dim X$, et $X \subset \mathbf{P}^{d+1}$ le plongement projectif associé. Pour commencer, on peut trouver une droite $l \subset \mathbf{P}^{d+1}$ telle que $l \cap X = \{x\}$. Ensuite, on voit que tout point fermé est linéairement équivalent à un point fermé à corps résiduel séparable (si la caractéristique est $p > 0$ avec p impair, utiliser l'endomorphisme « de Frobenius »$(y_0 : \dots : y_{d+1}) \mapsto (a_0^{\frac{p-1}{2}} y_0^p : \dots : a_{d+1}^{\frac{p-1}{2}} y_{d+1}^p))$. Soit maintenant $y \in X$ un point fermé à corps résiduel séparable, de degré n : le choix d'un élément primitif α de $F(y)$ fournit des polynômes $p_0, \dots, p_{d+1}$ de degrés $< n$ tels que $(y_0 : \dots : y_{d+1}) = (p_0(\alpha) : \dots : p_{d+1}(\alpha))$; on peut d'ailleurs supposer les p_i premiers entre eux dans leur ensemble. Soit C la courbe rationnelle définie par les p_i : elle est de degré $m < n$. De plus C n'est pas contenue dans X, sans quoi X aurait un point rationnel. Par conséquent, $Z = C \cap X$ est un 0-cycle effectif de X, de degré $2m$ et contenant y. Comme $C \sim ml$, on a $Z \sim mx$ ($\sim$ désigne l'équivalence linéaire). Mais $Z - y$ est un 0-cycle effectif de degré $2m - n < n$: si $n = 2$, on a nécessairement $Z = y$ et, si $n > 2$, les autres points fermés intervenant dans $Z - y$ sont de degrés $< n$. Par récurrence, $Z - y$ est linéairement équivalent à un multiple de x, donc aussi y.

E.4. La théorie de Pfister : puissances de I

L'anneau $W(F)$ est muni d'une augmentation « dimension modulo 2 »

$$\overline{\dim} : W(F) \to \mathbb{Z}/2.$$

On note $IF = \operatorname{Ker} \overline{\dim}$: c'est l'*idéal fondamental* de $W(F)$. On note traditionnellement ses puissances $I^n F$.

E.4.A. Formes de Pfister. — Il est clair que IF est engendré additivement par les formes binaires $\langle 1, -a\rangle$, et donc que $I^n F$ est engendré additivement par les formes

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle := \langle 1, -a_1\rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_n\rangle.$$

Ces formes sont appelées *n-formes de Pfister*. Le premier, Pfister a reconnu que ce sont les pierres de touche de la théorie des formes quadratiques. Il en a démontré des propriétés remarquables :

E.4.1. Théorème (**[176**, Theorem 2]). — *Pour toute n-forme de Pfister φ, $\varphi(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi \simeq \varphi(x)\varphi$. En particulier, les valeurs non nulles de φ forment un sous-groupe de F^*.*

---

(3) Je remercie Hélène Esnault pour une remarque éclairante à ce sujet.

On a même mieux : toute forme anisotrope multiplicative en ce sens est une forme de Pfister. Cela se déduit du théorème E.4.3 ci-dessous.

Pour $n = 1, 2, 3$, on dispose classiquement d'algèbres expliquant le théorème E.4.1 (extensions quadratiques de F, quaternions, octonions) : ce n'est plus le cas pour $n > 3$. D'ailleurs, pour ces valeurs de n, les formules implicites dans le théorème E.4.1 contiennent des dénominateurs.

Du théorème E.4.1, Pfister déduit facilement :

E.4.2. Corollaire

a) *Une forme de Pfister isotrope est hyperbolique.*
b) *Deux formes de Pfister semblables sont isométriques.*

E.4.B. Théorèmes de Cassels-Pfister. — Il s'agit de trois théorèmes dits de *représentation.* Soit (V, q) une F-forme quadratique et soit A une F-algèbre commutative : on dit que q *représente* $a \in A$ *sur* A s'il existe $\vec{a} \in A \otimes_F V$ tel que $q(\vec{a}) = a$. Notation : $a \in D(q_A)$. La partie (a) du théorème ci-dessous avait été initialement démontrée par Cassels pour des sommes de carrés ; la version générale et la suite sont dus à Pfister [**176**].

E.4.3. Théorème

a) *Soient q une forme quadratique sur F et $f \in F[T] - \{0\}$. Si q représente f sur $F(T)$, alors q représente déjà f sur $F[T]$.*
b) *Soient $q = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ une forme anisotrope sur F $(n \geq 2)$, $q' = \langle a_2, \ldots, a_n\rangle$ et $d \in F^*$. Alors $d \in D(q') \Leftrightarrow d + a_1T^2 \in D(q_{F(T)})$.*
c) *Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec q anisotrope. Soient V l'espace vectoriel sous-jacent à φ et $K = F(V^*)$, de sorte que φ peut être vu comme élément de K. Alors $\varphi \in D(q_K) \Leftrightarrow \varphi \leq q$.*

E.4.C. Le discriminant. — À part la dimension modulo 2, c'est le seul invariant que nous utiliserons. Si $q = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, on pose

$$d_\pm q = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 \cdots a_n \in F^*/F^{*2}.$$

C'est le discriminant de q : il ne dépend que de la classe de q dans $W(F)$. Il interviendra implicitement à cause du lemme suivant :

E.4.4. Lemme

a) *L'application $q \mapsto d_\pm q$ induit un isomorphisme $IF/I^2F \xrightarrow{\sim} F^*/F^{*2}$.*
b) *Soient q, q' deux formes de dimension impaire. Alors il existe un scalaire a tel que $q \perp -aq' \in I^2F$.*

E.5. Corps de fonctions de quadriques

Soit q une forme quadratique sur F, et soit $X = X_q$ la quadrique projective associée : c'est une variété F-rationnelle si et seulement si q est isotrope (cela résulte facilement du théorème E.2.2). On note en général $F(q)$ le corps des fonctions $F(X)$. C'est un invariant important de q (ou de X). On peut dire que, tenant compte des travaux antérieurs de Pfister, son utilisation systématique remonte véritablement à Arason [**13, 9**].

E.5.A. Théorème de la sous-forme

E.5.1. Proposition. — *Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec φ anisotrope et $\dim q = n > 2$. Supposons $\varphi_{F(q)} \sim 0$. Alors, pour tout $b \in F^*$ représenté par q, on a*

$$bq(T_1, \dots, T_n)\varphi_K \simeq \varphi_K$$

où $K = F(T_1, \dots, T_n)$.

Cette proposition se démontre facilement par réduction à une extension quadratique. Knebusch [**121**] en a démontré la réciproque.

Du théorème E.4.3 (c) et de la proposition E.5.1, on déduit l'important théorème suivant, appelé théorème d'Arason-Cassels-Pfister ou simplement théorème de la sous-forme :

E.5.2. Théorème. — *Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec φ anisotrope et $\dim q > 2$. Supposons $\varphi_{F(q)} \sim 0$. Alors, pour tout $(a, b) \in D(q) \times D(\varphi)$, on a $abq \leq \varphi$. En particulier, $\dim \varphi \geq \dim q$.*

E.5.3. Corollaire **(Arason** [**9**, Satz 1.3]**).** — *Si dans le théorème E.5.2, on suppose que q est une forme de Pfister, alors $\varphi \simeq q \otimes \rho$ pour $\rho \in W(F)$ convenable.*

Cela se voit par récurrence sur $\dim q$, en notant que $q_{F(q)} \sim 0$ par le corollaire E.4.2.

E.5.B. Théorème d'Arason-Pfister. — C'est le suivant :

E.5.4. Théorème **([13]).** — *Soit q anisotrope sur F telle que $q \in I^n F$ pour $n \geq 0$. Alors, $\dim q \geq 2^n$.*

De ce théorème il résulte immédiatement que $\bigcap I^n F = \{0\}$.

Démonstration. — Écrivons $q = \pm\varphi_1 + \cdots + \pm\varphi_r$ dans $W(F)$, où les φ_i sont des n-formes de Pfister. Puisque q est anisotrope, on a $r > 0$. Procédons par récurrence sur r. Si $r = 1$ et $\dim q < 2^n$, on a $\pm\varphi_1 \simeq q \perp m\mathbb{H}$ pour $m > 0$ convenable ; alors φ_1 est hyperbolique (corollaire E.4.2) et q aussi, absurde. Si $r > 1$, posons $K = F(\varphi_r)$. Distinguons deux cas :

1) q_K est hyperbolique. Par le corollaire E.5.3, il existe ρ tel que $q \simeq \varphi_r \otimes \rho$. En particulier, $2^n = \dim \varphi_r | \dim q$, d'où $\dim q \geq 2^n$.

2) q_K n'est pas hyperbolique. Soit $q' = (q_K)_{\rm an}$. Alors $q' = \pm\varphi_1 + \cdots + \pm\varphi_{r-1}$ dans $W(K)$. Par récurrence sur r, $\dim q' \geq 2^n$; alors $\dim q \geq 2^n$ également. $\square$

E.6. La théorie de Knebusch : déploiement générique

Dans [**122**] et [**123**], Knebusch développe une théorie de déploiement générique pour les formes quadratiques, qui peut se voir comme une conceptualisation et une extension des résultats précédents. Elle conduit à la définition de deux importants invariants numériques des formes quadratiques : la *hauteur* et le *degré*.

E.6.A. Tours de déploiement génériques ; hauteur. — Considérons une forme quadratique q sur F. On associe à q un entier $h = ht(q)$ et une suite $(F_i, q_i)_{0\leq i\leq h}$, où F_i est une extension de F et q_i est une forme quadratique sur F_i, de la manière suivante :

(i) $q_0 = q_{\rm an}, F_0 = F$.
(ii) Supposons F_i et q_i définis. Si $\dim q_i = 0$ ou 1, alors $i = h$. Sinon, $F_{i+1} = F_i(q_i)$ et $q_{i+1} = ((q_i)_{F_{i+1}})_{\rm an}$.

E.6.1. Définition. — L'entier $ht(q)$ s'appelle la *hauteur* de q [(4)]. La suite $F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_h$ s'appelle la *tour de déploiement canonique* de q. La forme q_i s'appelle le *i-ième noyau* de q. Le corps F_{h-1} (resp. F_h) s'appelle le *corps dominant* (resp. *corps de déploiement canonique*) de q. On note, pour $n > 0$

$$i_n(q) = i((q_{n-1})_{F_n})$$

c'est le *n-ième indice de Witt supérieur* de q. La suite

$$(i_1(q), \ldots, i_h(q))$$

s'appelle la *suite de déploiement* de q.
Si X est la quadrique définie par q, on notera aussi $i_n(X) := i_n(q)$.

Comme $\dim q \geq \dim q_0 > \dim q_1 > \ldots$, l'entier h est bien défini ; comme les $\dim q_i$ ont la même parité que $\dim q$, $ht(q) \leq \frac{1}{2}\dim q$.

« Suite de déploiement »est, faute de mieux, une traduction française de « Splitting pattern », terminologie introduite par Hurrelbrink et Rehmann. Signalons que leur définition diffère de la nôtre, qui est celle de Vishik : ils utilisent plutôt la suite $(i_1(q), i_1(q) + i_2(q), \ldots)$. Quant à Hoffmann et Izhboldin, ils préfèrent utiliser la suite $(\dim q_0, \ldots, \dim q_h)$. On prendra donc garde que la terminologie recouvre plusieurs définitions (aux contenus équivalents) dans la littérature.

Pour alléger, introduisons la notation

$$\dim_{\rm an} q = \dim q_{\rm an}.$$

(4) Nous utilisons la notation $ht(q)$ plutôt que $h(q)$ pour éviter toute confusion avec le motif de la quadrique X définie par q, qui sera noté $h(X)$.

***E.6.2. Théorème* (Knebusch [122, th. 5.1]).** — *Soient q une forme quadratique sur F et K/F une extension quelconque. Alors il existe un unique $i \in \{0, \dots, ht(q)\}$ tel que* $\dim_{\mathrm{an}} q_K = \dim q_i$.

Démonstration. — L'unicité est claire. Knebusch démontre l'existence en utilisant sa théorie de la spécialisation des formes quadratiques [**121**][5] : donnons-en une démonstration directe. Soit i le plus petit entier tel que $\dim q_i \leq \dim_{\mathrm{an}} q_K$. Il faut montrer que $\dim q_i = \dim_{\mathrm{an}} q_K$. Posons, pour tout $j < h$, $K_j = KF_j$. Pour $j < i$, $(q_j)_{K_j} \sim q_{K_j}$ est isotrope ; alors K_{j+1}/K_j est transcendante pure (voir début du §E.5). Il en résulte que K_i/K est transcendante pure, d'où il résulte facilement que $((q_K)_{\mathrm{an}})_{K_i}$ est anisotrope. Mais alors

$$\dim_{\mathrm{an}} q_{K_i} = \dim_{\mathrm{an}} q_K \geq \dim q_i \geq \dim_{\mathrm{an}} (q_i)_{K_i} \tag{E.6.1}$$

et

$$(q_{K_i})_{\mathrm{an}} \simeq ((q_i)_{K_i})_{\mathrm{an}}.$$

Par conséquent il y a partout égalité dans (E.6.1). □

E.6.3. Définition. — Une suite $F = K_0 \subset \cdots \subset K_h$ est une *tour de déploiement générique* de q si elle possède la propriété du théorème E.6.2 avec $q_i = (q_{K_i})_{\mathrm{an}}$ et si les extensions K_{i+1}/K_i sont régulières.

(Dans [**122**], Knebusch demande de plus que, pour toute extension E/F, il existe une F-place de K_i vers E ayant « bonne réduction »en q_i, où i est l'entier tel que $\dim_{\mathrm{an}} q_E = \dim q_i$, mais cette propriété est automatique puisque l'extension composée EK_i/E est transcendante pure, cf. remarque au début du §E.5.)

La définition suivante, due à Izhboldin, est particulièrement importante.

E.6.4. Définition. — Supposons q anisotrope. La *dimension essentielle* de X_q est

$$\dim_{\mathrm{es}} X_q = \dim X_q - i_1(q) + 1.$$

Nous poserons aussi

$$\dim_{\mathrm{es}} q = \dim q - i_1(q) + 1.$$

Le lemme suivant est conséquence immédiate du lemme E.2.3 (b).

E.6.5. Lemme. — *Soient q une forme anisotrope et $q' \leq q$. Supposons que* $\dim q' \geq \dim_{\mathrm{es}} q$. *Alors $q'_{F(q)}$ est isotrope.*

Nous verrons plus loin (§E.8.B) que *la réciproque est vraie.*

[5] Il démontre plus : il existe une F-place $\lambda : F_i \dashrightarrow K$ telle que q_i ait bonne réduction en λ et que $\lambda(q_i) \simeq q_K$.

E.6.B. Interprétation en termes de groupes algébriques. — Kersten et Rehmann [**125**] ont généralisé la notion de tour de déploiement générique dans le contexte des *groupes algébriques linéaires.*

Soit G un F-groupe réductif connexe, de diagramme de Dynkin Δ, et soit Θ un sous-ensemble de Δ. Une extension K/F est un Θ-*corps de déploiement* de G si G_K contient un K-sous-groupe parabolique P de type Θ ; K est dit *générique* si tout Θ-corps de déploiement de G est une F-spécialisation de K (au sens des F-places). L'existence d'un tel K se démontre ainsi : étant donné P (défini sur une clôture séparable $\bar{F}$ de F), l'espace projectif homogène $V_\Theta = G_{\bar{F}}/P$ est défini sur une plus petite extension finie séparable F_Θ de F : l'extension minimale telle que la $*$-action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F_\Theta)$ sur Δ laisse Θ invariant. On a alors $K = F_\Theta(V_\Theta)$.

Dans le cas d'une forme quadratique (V, q), avec $\dim q = n \geq 3$, le groupe $G = \mathrm{SO}(q)$ est de rang $i(q)$. Si $i(q) \geq i$, alors $\mathrm{SO}(q)$ opère transitivement sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes de V de dimension i ; si $i < n/2$, le stabilisateur de l'un d'entre eux est un sous-groupe parabolique P_i correspondant à $\Delta - \{\alpha_i\}$, où α_i est la i-ème racine. Réciproquement, si P_i est rationnel sur F on a $i(q) \geq i$. La variété $V_i = G/P_i$ correspondante est la « grassmannienne quadratique »des sous-espaces totalement isotropes de rang i de V. (Dans le cas $i = n/2$, c'est plus compliqué.) Sans hypothèse sur $i(q)$, une tour de déploiement générique de q est « contenue »dans la suite de corps $K_i = F(V_i)$: elle est plus « économique »que celle de la définition E.6.1 en ce que ses degrés de transcendance sont plus petits, cf. [**125**, p. 61].

E.6.C. Formes de hauteur 1 ; degré. — La proposition suivante est due indépendamment à Knebusch et Wadsworth ([**122**, démonstration du th. 5.8], [**219**]) :

E.6.6. Proposition. — *Une forme q est de hauteur 1 si et seulement si elle est*
- *semblable à une forme de Pfister au cas où $\dim q$ est paire ;*
- *semblable à une sous-forme de codimension 1 d'une forme de Pfister au cas où $\dim q$ est impaire.*

Elle conduit immédiatement à la

E.6.7. Définition. — Soit q une forme quadratique sur F.

a) Si $\dim q$ est impaire, le *degré* de q est $\deg(q) = 0$.
b) Si $\dim q$ est paire et non hyperbolique, soit F_{h-1} son corps dominant. Par la proposition *E.6.6,* q_{h-1} est semblable à une forme de Pfister τ : τ est appelée *forme dominante* de q. Si $\dim \tau = 2^n$, le *degré* de q est l'entier $\deg(q) = n$.
c) Si $q \sim 0$, $\deg(q) = \infty$.

Cette notion est intéressante à cause du théorème suivant, dû à Knebusch [**122**, th. 6.4].

E.6.8. Théorème. — *Pour tout $n \geq 0$, l'ensemble*

$$J_n(F) = \{q \in W(F) \mid \deg(q) \geq n\}$$

est un idéal de $W(F)$ contenant I^nF.

(Si $a \in F^*$ et $q \in J_n(F)$, il est clair que $\langle a\rangle q \in J_n(F)$, et de même il est clair que $J_n(F)$ contient les n-formes de Pfister ; la difficulté est de voir que $J_n(F)$ est stable par addition.)

E.6.9. Remarque. — En fait, *on a* $J_n(F) = I^nF$: ce théorème est dû à Orlov-Vishik-Voevodsky [**172**]. Leur démonstration repose sur les techniques de [**217**], donc sur la théorie homotopique des schémas. Il n'en sera pas fait usage ici.

Le théorème E.6.8 fournit une nouvelle démonstration du théorème E.5.4 : si $q \in I^nF - \{0\}$, alors $\deg(q) \geq n$, donc $\dim(q) \geq 2^n$. On a de plus le complément suivant :

E.6.10. Corollaire. — *Soit q de dimension 2^n. Si $q \in J_n(F)$, alors q est semblable à une forme de Pfister.*

Comme application de la théorie de Knebusch, mentionnons le raffinement suivant du théorème de la sous-forme E.5.2 :

***E.6.11. Théorème* (cf. [122, prop. 6.11], [12, Satz 18])**. — *Soit φ une forme quadratique sur F de dimension paire, de corps dominant L et de forme dominante τ. Soit q une autre forme sur F. Alors $\deg(\varphi_{F(q)}) > \deg\varphi$ si et seulement si q_L est semblable à une sous-forme de τ. En particulier, en posant $n = \deg(\varphi)$,*

(i) *Si $\dim q > 2^n$, on a $\deg(\varphi_{F(q)}) = \deg\varphi$.*

(ii) *Si $\dim q = 2^n$, on a $\deg(\varphi_{F(q)}) > \deg\varphi$ si et seulement si q est semblable à une forme de Pfister τ_0 telle que $(\tau_0)_L \simeq \tau$.*

En particulier, $\varphi_{F(q)} \sim 0 \Rightarrow \dim q \leq 2^{\deg(\varphi)}$.

Dans la même direction on a le théorème sensationnel suivant, dû à Fitzgerald [**54**, th. 1.6] :

E.6.12. Théorème. — *Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec $\varphi \not\sim 0$. Supposons que $\varphi_{F(q)} \sim 0$ et que φ ne soit pas semblable à une forme de Pfister. Alors $\dim\varphi - 2^{\deg(\varphi)} \geq 2\dim q$.*

E.6.D. Voisines de Pfister ; formes excellentes. — Les notations suivantes sont très utiles :

E.6.13. Notation. — Pour un entier n, on note $l(n)$ l'unique entier tel que $2^{l(n)-1} < n \leq 2^{l(n)}$. Pour une forme quadratique q, on note $l(q) = l(\dim q)$.

La définition suivante est due à Knebusch [**123**].

E.6.14. Définition. — Soient q une forme quadratique et φ une n-forme de Pfister (éventuellement isotropes). La forme q est dite *voisine* de φ si

(i) $\dim q > 2^{n-1}$

(ii) q est semblable à une sous-forme de φ.

Une forme q' telle que $q \perp q'$ soit semblable à φ s'appelle *forme complémentaire* de q.

Noter que $n = l(q)$. En utilisant le théorème d'Arason-Pfister, on démontre facilement :

E.6.15. Théorème ([**123**, p. 3]). — *Les formes φ et q' de la définition E.6.14 sont uniquement déterminées par q.*

Knebusch démontre ensuite :

E.6.16. Théorème. — *Pour une F-forme quadratique q, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour toute extension K/F, la forme $(q_K)_{\mathrm{an}}$ est définie sur F.*

(ii) *Pour tout i, la forme q_i de la définition E.6.1 est définie sur F.*

(iii) *Il existe des F-formes de Pfister $\tau_1, \dots, \tau_h$ ($h = ht(q)$), telles que $\tau_j \mid \tau_{j-1}$ pour $j \in [1, h]$, des F-formes $q'_0, \dots, q'_i$ et un scalaire a tels que $q'_0 = q_{\mathrm{an}}$ et que, pour tout $j \in [1, h]$, on ait $q'_{j-1} \perp -q'_j \simeq (-1)^{j+1} a\tau_j$.*

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on a

$$[q] = a([\tau_1] - [\tau_2] + \cdots + (-1)^{h+1}[\tau_h])$$

dans $W(F)$.

E.6.17. Définition. — Une forme vérifiant les conditions équivalentes du théorème E.6.16 est dite *excellente*.

Les formes excellentes peuvent être considérées comme les plus simples des formes quadratiques. Par exemple, la suite de déploiement S d'une forme excellente q (en termes de dimensions anisotropes) ne dépend que de $n = \dim q$, à savoir :

$$S = \{n, c(n), c(c(n)), \dots\}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c(k) = 2^{l(k)} - k$ (notation E.6.13).

E.7. Équivalence birationnelle stable

E.7.A. Généralités. — Soit X une variété projective homogène. Les conditions suivantes sont équivalentes [**31**, th. 21.20] :

(i) X a un point rationnel.

(ii) Il existe une F-place de $F(X)$ vers F.

(iii) X est une variété F-rationnelle, *i.e.* l'extension $F(X)/F$ est transcendante pure.

Soit Y une autre variété : de ce qui précède, il résulte que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X a un point rationnel sur $F(Y)$; autrement dit, il existe une application F-rationnelle de Y vers X.
(ii) Il existe une F-place de $F(X)$ vers $F(Y)$.
(iii) $X \times Y$ est Y-birationnel à $\mathbf{P}^n \times Y$ $(n = \dim X)$.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que Y *domine* X et on écrit $Y \succcurlyeq X$ ou $X \preccurlyeq Y$. Cette relation est particulièrement intéressante quand Y est aussi projective homogène : la condition (ii) montre qu'elle définit une relation de *préordre* sur la famille de ces variétés. La relation d'équivalence associée est l'équivalence birationnelle stable : nous la noterons ici $\approx$ (d'autres auteurs utilisent la notation $\overset{st}{\sim}$).

Nous utiliserons principalement les relations $\preccurlyeq$ et $\approx$ dans le cas des *quadriques*. On notera $q \preccurlyeq q'$ pour $X_q \preccurlyeq X_{q'}$, etc. On a les propriétés évidentes suivantes (la troisième résultant du lemme E.6.5) :

E.7.1. Lemme

a) *La relation $\preccurlyeq$ (resp. $\approx$) définit une relation de préordre (resp. d'équivalence) sur (l'ensemble sous-jacent à l'anneau) $W(F)$.*
b) $q' \leq q \Rightarrow q' \preccurlyeq q$.
c) *Si $q' \leq q$ et $\dim q' \geq \dim_{\mathrm{es}} q$, alors $q' \approx q$.*

De ce lemme, du corollaire E.4.2 et du théorème E.5.2, on déduit facilement :

E.7.2. Théorème. — *Soient π une forme de Pfister, q une voisine de π et q' une forme quadratique anisotrope sur F. Alors,*

a) $q \approx \pi$.
b) *$q' \preccurlyeq q \Leftrightarrow q'$ est semblable à une sous-forme de π.*
c) *$q' \approx q \Leftarrow q'$ est voisine de π.*

En fait l'implication $\Rightarrow$ dans (c) est également vraie, mais c'est un résultat plus profond, cas particulier immédiat du théorème de Hoffmann qui suit.

E.7.B. Théorème de Hoffmann. — C'est le suivant :

E.7.3. Théorème. — *Si $q \preccurlyeq q'$, alors $l(q) \leq l(q')$ (cf. notation E.6.13). En d'autres termes, s'il existe n tel que $\dim q' \leq 2^n < \dim q$, alors $q'_{F(q)}$ est anisotrope.*

Pour la démonstration originelle on pourra se reporter à [**68**] ; une démonstration un peu plus simple, mais dans le même esprit, se trouve dans [**82**]. On peut aussi déduire ce théorème de la *formule du degré de Rost* [**149**, th. 5.3.1] (cette observation est due à Rost). Nous déduirons au §E.8 le théorème de Hoffmann de résultats plus fins obtenus ultérieurement (corollaire E.8.3 et théorème E.8.5).

E.7.4. Corollaire. — *Pour toute q anisotrope, on a* $\dim_{\mathrm{es}} q > 2^{l(q)-1}$.

Pour voir ceci, prendre une sous-forme $q' \leq q$ de dimension $2^{l(q)-1}$ et appliquer le lemme E.7.1 (c) et le théorème E.7.3. On a même [**68, 82**] :

E.7.5. Proposition. — *Pour q anisotrope, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\dim_{\mathrm{es}} q = 2^{l(q)-1} + 1$ *;*

(ii) *il existe K/F tel que q_K soit voisine d'une K-forme de Pfister et $ht(q_K) = ht(q)$.*

Une forme vérifiant les propriétés de la proposition E.7.5 est dite *à déploiement maximal* ($i_1(q)$ prend la plus grande valeur possible) : ces formes sont donc « stablement »des voisines de Pfister, mais on a des exemples de formes à déploiement maximal qui ne sont pas des voisines de Pfister (par exemple de dimension 5). Un phénomène curieux, toutefois, est que quand $\dim q$ est « proche »de $2^{l(q)}$, une forme à déploiement maximal est une voisine de Pfister. Conjecturalement c'est le cas quand $\dim q > 5 \cdot 2^{l(q)-3}$, ce qui est connu pour $l(q) \leq 4$; pour $l(q) > 4$, c'est le cas quand $\dim q \geq 2^{l(q)} - 7$ [**91**, th. 1.7].

E.8. Quatre résultats fondamentaux

Jusqu'à maintenant, les résultats énoncés avaient été obtenus par des méthodes ne faisant intervenir que des résultats élémentaires d'algèbre commutative, voire de théorie des corps. Par contre, la démonstration des suivants utilise les correspondances algébriques, quoique de manière élémentaire pour une large part.

E.8.A. Dimension des formes dans I^n

E.8.1. Théorème. — *Soit $q \in I^nF$, anisotrope. Alors*

– *soit* $\dim q \geq 2^{n+1}$ *(et* $\dim q$ *est paire) ;*

– *soit* $\dim q$ *est de la forme* $2^{n+1} - 2^i$ *pour un entier* $i \in [1, n]$.

De plus, toutes les dimensions visées sont atteintes.

Ce théorème généralise le théorème d'Arason-Pfister ; il avait été conjecturé par Vishik. La dernière partie est relativement facile. Il est dû à Vishik et à Karpenko, seule la démonstration de Karpenko étant rédigée [**113**]. Le cas particulier disant que $\dim q > 2^n \Rightarrow \dim q \geq 2^n + 2^{n-1}$ avait été démontré par Pfister pour $n = 3$, par Hoffmann pour $n = 4$ et par Vishik pour tout n [**213**, th. 6.4] en utilisant le théorème E.11.31 ci-dessous. Voir aussi dans [**116**, th. 4.4] une démonstration de ce cas particulier due à Hoffmann et ne reposant que sur le corollaire E.8.3 ci-dessous. Le théorème E.8.1 rappelle de manière frappante le comportement des premières classes de Stiefel-Whitney non nulles d'un fibré quadratique (ou réel), cf. [**96**, prop. 1.1 (c)].

E.8.B. Dimension essentielle des quadriques

E.8.2. Théorème. — *Soient X une quadrique anisotrope et Y une F-variété propre (éventuellement singulière) dont tous les points fermés sont de degré pair. Supposons que $Y_{F(X)}$ ait un point fermé de degré impair. Alors*

1. $\dim(Y) \geq \dim_{\mathrm{es}}(X)$ *;*
2. *si* $\dim(Y) = \dim_{\mathrm{es}}(X)$*,* $X_{F(Y)}$ *est isotrope.*

E.8.3. Corollaire. — *Soient q, q' deux formes quadratiques anisotropes telles que $q \preccurlyeq q'$. Alors*

1. $\dim_{\mathrm{es}} q \leq \dim_{\mathrm{es}} q'$ *;*
2. $\dim_{\mathrm{es}} q = \dim_{\mathrm{es}} q' \Rightarrow q \approx q'$*.*

Ces résultats sont dus à Karpenko-Merkurjev [**116**] ; le corollaire E.8.3 avait été conjecturé par Izhboldin. *Mutatis mutandis*, l'énoncé du théorème E.8.2 est exactement le même que celui d'un résultat annoncé par Voevodsky dans une lettre à Rost [**100**, th. 9.3][(6)]

– Y est lisse ;
– F est de caractéristique 0 ;
– l'énoncé vaut pour un nombre premier l quelconque ;
– X est supposé être une « (v_n, l)-variété »(*loc. cit.*) et la conclusion de (1) est $\dim Y \geq \dim X$.

(Une quadrique de dimension d est une $(v_n, 2)$-variété si et seulement si $d = 2^n - 1$: pour $l = 2$, le théorème E.8.2 n'est donc pas recouvert par celui de Voevodsky, même pour $i_1(X) = 1$ et même sous les hypothèses additionnelles de ce dernier sur F et Y.)

Le cas particulier suivant avait été obtenu antérieurement par Vishik ([**213**, cor. 4.9], cf. §E.11.D ci-dessous) :

E.8.4. Corollaire. — $q \approx q' \Rightarrow \dim_{\mathrm{es}} q = \dim_{\mathrm{es}} q'$*.*

L'hypothèse est en particulier vérifiée si $q \leq q'$ et $q' \preccurlyeq q$, ce qui fournit la réciproque promise du lemme E.6.5.

Pour la démonstration du théorème E.8.2, voir §E.12.A.

E.8.C. Une borne pour $i_1(q)$

E.8.5. Théorème. — *Pour toute forme anisotrope q, on a $i_1(q) \leq |\dim_{\mathrm{es}} q - 1|_2^{-1}$, où $|\ |_2$ est la valeur absolue dyadique.*

Ce théorème est dû à Karpenko [**112**] ; il avait été conjecturé par Hoffmann. En particulier, $i_1(q) = 1$ si $\dim_{\mathrm{es}} q$ est paire. Une autre formulation est la suivante : il existe un entier n tel que $i_1(q) - 1$ soit le reste de la division de $\dim q - 1$ par 2^n.

---

(6) *Loc. cit.*, il faut lire « tout morphisme *au-dessus de* $\mathbb{Z}_{(l)}$ ».

Pour tout entier m, notons

$$m^{\mathrm{es}} = m - 1 + |m-1|_2^{-1}.$$

Un peu d'arithmétique élémentaire montre que $l(m) = l(m^{\mathrm{es}})$ (cf. notation E.6.13) : ainsi, *le théorème E.8.5 implique le corollaire E.7.4*. Il en découle que *le corollaire* E.8.3 et le théorème E.8.5 impliquent le théorème de Hoffmann E.7.3. (Leurs démonstrations n'utilisent pas ce théorème !)

Pour la démonstration du théorème E.8.5, voir §E.12.B.

E.8.D. Une relation entre les indices de Witt supérieurs

E.8.6. Théorème. — *Soit q une forme quadratique de hauteur h, et soient $i_1, \dots, i_h$ ses indices de Witt supérieurs. Notons v_2 la valuation dyadique. Alors, pour tout $q \in [1, h-1]$, on a*

$$v_2(i_q) \geq \inf\left(v_2(i_{q+1}), \dots, v_2(i_h)\right) - 1.$$

Si de plus $\dim q$ *est paire et l'entier $i_q + 2(i_{q+1} + \cdots + i_h)$ n'est pas une puissance de 2, on a*

$$v_2(i_q) \leq \sup\left(v_2(i_{q+1}), \dots, v_2(i_h)\right).$$

Ce théorème est dû à Karpenko [**114**]. Il en déduit une autre démonstration du théorème E.8.1 : si q est un contre-exemple à ce théorème, on se ramène en montant dans sa tour de déploiement générique à supposer que $q_1, \dots, q_h$ en vérifient la conclusion, ce qui contredit la borne inférieure du théorème E.8.6.

E.9. Trois applications

E.9.A. Dimension des formes de hauteur 2

E.9.1. Théorème. — *Soit q une forme anisotrope de hauteur 2 et de degré $n \geq 0$. Alors*

a) *Si $n = 0$, $\dim q$ est de la forme $2^a - 2^b + 1$ et $i_1(q)$ est de la forme $2^{a-1} - 2^b + 1$ pour $a > b > 1$ (le cas $a = b+1$ est permis).*

b) *Si $n > 0$, on a*

$$\dim q \in \{2^n + 2^{n-1}, 2^{n+1}, 2^{r+1} - 2^n (r > n)\}.$$

Ce théorème est dû à Vishik [**212**, th. 3.1]. Donnons-en une autre démontration, reposant sur les théorèmes E.8.5 et E.8.6 :

Démonstration. — Traitons (b) : le cas de (a) se traite de même. D'après la proposition E.6.6, on a $\dim q_1 = \dim q - 2i_1(q) = 2^n$. Appliquons le théorème E.8.5 : il existe r tel que $i_1(q) \leq 2^r$ et $\dim q - 1 \equiv i_1(q) - 1 \pmod{2^r}$. Deux cas se présentent :

1. $r > n$. Alors $i_1(q) = 2^r - 2^n$, donc $\dim q = 2^{r+1} - 2^n$.
2. $r \leq n$. On a $i_1(q) \equiv 0 \pmod{2^r}$, donc $i_1(q) = 2^r$ et $\dim q = 2^n + 2^{r+1}$.

Cette alternative avait été obtenue antérieurement par Vishik dans sa thèse, au moins quand -1 est un carré [**211**, Statement 6.2]. On applique maintenant le théorème E.8.6, qui montre que (2) n'est possible que pour $r \geq n-2$ (noter que, pour $r = n$, on retrouve le cas $r = n+1$ de (1)). □

Plus précisément, on conjecture (par exemple [**211**, Question 6.4]) :

E.9.2. Conjecture. — *Une forme anisotrope q de hauteur 2 et de degré $n > 0$ est d'un des trois types suivants :*

(i) *excellente ;*
(ii) *$q \simeq \varphi \otimes \psi$, où φ est une $(n-1)$-forme de Pfister et $\dim \psi = 4$, $\psi \notin I^2F$;*
(iii) *$q \simeq \varphi \otimes \psi$, où φ est une $(n-2)$-forme de Pfister et $\dim \psi = 6$, $\psi \in I^2F$ (on dit que ψ est une* forme d'Albert*).*

Cette conjecture est connue pour $n = 1$ (Knebusch, [**123**, §10]) et pour $n = 2$ [**99**].

***E.9.3. Remarque* (Hoffmann)**. — Dans le cas $n = 0$, la situation est un peu différente. D'après Knebusch [**122**, §10], q est excellente dès que sa forme dominante est définie sur F : il obtient ainsi le théorème E.9.1 (a) dans ce cas particulier. D'autre part, si $\dim q = 5$, elle est de hauteur 2 mais pas excellente en général (par exemple si q est une sous-forme d'une forme d'Albert anisotrope, cf. conjecture E.9.2 (iiii)). Mais par ailleurs, le théorème E.9.1 (a) entraîne que q est à déploiement maximal si $a > b+1$. Pour $a = b+1$, q est excellente d'après le lemme E.9.4 ci-dessous. La conjecture mentionnée à la fin du §E.7 implique ainsi que *q doit être excellente en toute dimension $\neq 5$*. C'est par exemple vrai pour $a \leq 4$ ou pour $b \leq 3$.

***E.9.4. Lemme* (Hoffmann)**. — *Soit q une forme de hauteur 2 et de dimension 2^b+1, avec $b \geq 3$. Alors q est excellente.*

Démonstration. — Comme q est de hauteur 2, il existe un scalaire $u \in F_1^*$ tel que $q_1 \perp \langle u \rangle$ soit semblable à une b-forme de Pfister (proposition E.6.6). En fait, la classe de carrés u est définie sur F (pour le voir, on peut l'interpréter comme le discriminant de q_1, et donc de q). Soit $q' = q \perp \langle u \rangle$. Notons que $q' \in I^2F$, donc que $\deg(q') \geq 2$. Évidemment, on a $\deg(q') \leq b$. Supposons que $\deg(q') < b$. Alors il existe une extension L telle que

$$4 \leq \dim_{\mathrm{an}}(q'_L) \leq 2^{b-1}$$

et donc

$$1 < 3 \leq \dim_{\mathrm{an}}(q_L) \leq 2^{b-1}+1 < 2^b-1 \text{ (car } b \geq 3)$$

Or par hypothèse, les seules dimensions « anisotropes »possibles de q sont $1, 2^b-1$, 2^b+1. D'où une contradiction.

Par conséquent, $\deg(q') = b$. Comme $b \geq 3$, le théorème E.8.1 implique que $\dim_{\mathrm{an}} q' = 2^b$ (observer qu'*a priori* $\dim_{\mathrm{an}}(q') \geq 2^b$ par construction de q'). Ainsi $q = q'' + \langle -u \rangle$ avec q'' semblable à une b-forme de Pfister. □

E.9.B. Une borne pour l'indice de Witt

E.9.5. Théorème. — *Supposons que $q \preccurlyeq q'$ où q et q' sont deux formes anisotropes. Alors*

$$i(q'_{F(q)}) - i_1(q') \leq \dim_{\mathrm{es}} q' - \dim_{\mathrm{es}} q.$$

Ce théorème est dû à Karpenko-Merkurjev [**116**, cor. 4.2] ; une variante tout aussi frappante est $\dim q' - i(q'_{F(q)}) + 1 \geq \dim_{\mathrm{es}} q$. Voici leur démonstration : posons $X = X_q$ et $Y = X_{q'}$. Si $\dim_{\mathrm{es}}(X) = 0$, l'énoncé est trivial. Sinon, soit Y' une sous-quadrique de Y de dimension $\dim_{\mathrm{es}}(X) - 1$. Puisque $\dim_{\mathrm{es}}(Y') < \dim(Y') < \dim_{\mathrm{es}}(X)$, la quadrique Y' reste anisotrope sur $F(X)$ par la première partie du corollaire E.8.3. Donc, d'après le lemme E.2.3 (b), on a $i(Y_{F(X)}) \leq \operatorname{codim}_Y(Y') = \dim(Y) - \dim_{\mathrm{es}}(X) + 1$, d'où l'inégalité.

E.9.C. Degré de transcendance d'un corps d'isotropie générique. — Par définition, un corps d'isotropie générique d'une forme anisotrope q est un corps de type K_1, où (K_i) est une tour de déploiement générique au sens de la définition E.6.3.

E.9.6. Théorème. — *Le plus petit degré de transcendance d'un corps d'isotropie générique K de q est égal à* $\dim_{\mathrm{es}}(X_q)(= \dim_{\mathrm{es}}(q) - 2)$.

Ce théorème est encore dû à Karpenko-Merkurjev [**116**, th. 4.3] (ils utilisent la terminologie « corps de déploiement générique », attribuée par Knebusch au corps K_h de la définition E.6.3). Il le déduisent facilement du théorème E.8.2 : nous renvoyons à *loc. cit.* pour les détails.

II. CYCLES ALGÉBRIQUES

E.10. Formes quadratiques et motifs : résultats de base

E.10.A. Motifs de Chow. — Nous nous dispenserons de rappeler en détail la construction de la catégorie des motifs de Chow, celle-ci étant maintenant bien connue et ayant fait l'objet d'excellentes expositions, y compris dans ce Séminaire [**156, 45, 193, 5**]. Rappelons seulement que :

1) On part de la catégorie des F-variétés projectives lisses.

2) On « agrandit »celle-ci en gardant les mêmes objets mais en prenant comme morphismes les *correspondances de Chow* : Si X est purement de dimension d, les correspondances de X vers une autre variété Y sont les éléments du groupe de Chow $\mathrm{CH}_d(X \times Y)$. La catégorie obtenue est additive. Elle est munie d'une structure monoïdale symétrique, induite par le produit des variétés, et bilinéaire par rapport à l'addition des correspondances (on dira qu'elle est *tensorielle*). La correspondance

« graphe d'un morphisme »définit un foncteur (covariant, avec nos conventions) de la catégorie de (1) vers cette catégorie.

3) On agrandit la catégorie de (2) en adjoignant des noyaux aux endomorphismes idempotents (enveloppe pseudo-abélienne ou karoubienne). La catégorie obtenue est celle des *motifs de Chow effectifs*. Elles est encore tensorielle et notée $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F)$. Si X est une variété projective lisse, on note $h(X)$ son image dans $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F)$.

4) Dans $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F)$, on a une décomposition canonique $h(\mathbf{P}^1) = \mathbf{1} \oplus L$, où $\mathbf{1} = h(\operatorname{Spec} F)$ et L est le *motif de Lefschetz*. On passe de $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F)$ à $\mathrm{Mot}(F)$, catégorie des motifs de Chow, en inversant L pour la structure monoïdale. Si $M \in \mathrm{Mot}(F)$ et $n \in \mathbb{Z}$, nous noterons ici

$$M(n) := M \otimes L^{\otimes n}.$$

La catégorie $\mathrm{Mot}(F)$ est rigide, ce qui signifie qu'elle porte une dualité parfaite relativement à sa structure tensorielle : on notera $M^\vee$ le dual d'un motif M [(7)]. Dans les applications arithmético-géométriques des motifs, il est fréquent de tensoriser les groupes de morphismes par $\mathbb{Q}$: ici, au contraire, il est très important de les considérer à coefficients entiers. En fait nous aurons à considérer des variantes à coefficients finis : si p est un nombre premier, on note

$$\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F, \mathbb{F}_p), \qquad \mathrm{Mot}(F, \mathbb{F}_p)$$

les catégories définies comme ci-dessus en prenant comme groupes de correspondances les groupes $\mathrm{CH}_d(X \times Y)/p$. La catégorie $\mathrm{Mot}(F, \mathbb{F}_p)$ est encore rigide.

E.10.1. Notation. — Pour $M \in \mathrm{Mot}(F)$, on note $\delta(M) \in \mathbb{Z}$ la dimension de M (au sens des catégories rigides : c'est la trace de l'identité). De même pour $M \in \mathrm{Mot}(F, \mathbb{F}_p)$; on a alors $\delta(M) \in \mathbb{F}_p$.

On sait que, si $M = h(X)$ pour une variété projective lisse X, $\delta(h(X))$ est la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de X par rapport à une cohomologie de Weil quelconque.

E.10.B. Variétés cellulaires et motifs de Tate purs. — Soit X une variété projective lisse de dimension d admettant une décomposition cellulaire : cela signifie que X admet une stratification par des espaces affines. Le motif de X a alors une description très simple : les groupes de Chow de X sont libres de type fini et

$$h(X) \simeq \bigoplus_{n=0}^{d} \mathrm{CH}_n(X) \otimes L^n. \tag{E.10.1}$$

De plus, les accouplements $\mathrm{CH}^n(X) \times \mathrm{CH}^{d-n}(X) \to \mathbb{Z}$ donnés par le produit d'intersection sont parfaits. La première assertion (vraie sans supposer X projective ni lisse) se montre par dévissage et récurrence sur le nombre de cellules (c'est un

[(7)] On prendra garde au fait que, dans [**213**], Vishik utilise cette notation dans un sens différent : si N est un facteur direct du motif d'une quadrique de dimension d, ce qu'il note $N^\vee$ correspond à ce que nous notons $N^\vee(d)$.

cas très particulier de la proposition E.10.7 ci-dessous) ; la seconde, qui revient à une formule de Künneth *via* le principe d'identité de Manin, se démontre de la même manière ; enfin la troisième se déduit de (E.10.1) par dualité (voir ci-dessous). Ainsi, $h(X)$ est somme directe de motifs de la forme L^n : on dit que $h(X)$ est un *motif de Tate pur*.

La sous-catégorie pleine des motifs de Tate purs est très simple : on a

$$\mathrm{Hom}(L^m, L^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases} \tag{E.10.2}$$

Ainsi, les Hom sont des groupes abéliens libres de type fini, et sont *invariants par extension des scalaires.* Il est également clair que

$$\delta(L^n) = 1 \text{ pour tout } n \text{ (cf. notation (E.10.1)).} \tag{E.10.3}$$

Plus généralement, soit X une variété projective lisse telle que $h(X)$ soit un motif de Tate pur. Alors les groupes de Chow de X sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini, comme le montre la formule

$$\mathrm{Hom}(L^n, h(X)) = \mathrm{CH}_n(X).$$

Ces groupes sont en dualité parfaite, comme il résulte des formules (E.10.2) et de la dualité sur $h(X)$.

Si F est séparablement clos et que l est un nombre premier différent de la caractéristique de F, on a $H^j_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l) = 0$ pour j impair et la classe de cycle $\mathrm{CH}^i(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2i}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(i))$ est bijective : c'est évident en considérant le foncteur de réalisation l-adique. Les groupes de Chow forment donc (pour une telle X) une « cohomologie de Weil »à coefficients entiers. De plus, l'équivalence rationnelle coïncide avec l'équivalence numérique.

On peut pousser plus loin l'analogie : on a des isomorphismes de Künneth pour toute autre variété projective lisse Y (évidents en considérant une fois de plus le motif de X) :

$$\mathrm{CH}_n(X \times Y) \simeq \textstyle\bigoplus_{i+j=n} \mathrm{CH}_i(X) \otimes \mathrm{CH}_j(Y). \tag{E.10.4}$$

En tenant compte de la dualité sur les groupes de Chow de X donnée ci-dessus, on obtient ainsi une desciption canonique de $\mathrm{Hom}(h(X), h(Y))$:

$$\mathrm{Hom}(h(X), h(Y)) \simeq \prod_{i \geq 0} \mathrm{Hom}(\mathrm{CH}_i(X), \mathrm{CH}_i(Y)). \tag{E.10.5}$$

E.10.C. Motifs géométriquement de Tate purs

E.10.2. Définition. — Un motif $M \in \mathrm{Mot}(F)$ est *géométriquement de Tate pur* si $\bar{M} \in \mathrm{Mot}(\bar{F})$ est un motif de Tate pur. On note $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{tate}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mot}(F)$ formée des motifs géométriquement de Tate purs. Si p est un nombre premier, on définit de même la catégorie $\mathrm{Mot}(F, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$.

La catégorie $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{tate}}$ est visiblement une sous-catégorie rigide de $\mathrm{Mot}(F)$, stable par facteurs directs, de même que $\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ dans $\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)$.

De même que dans le cas classique, on peut définir l'*équivalence numérique* dans $\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)$ et $\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$: pour $M,N\in\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)$, introduisons

$$\mathcal{N}(M,N)=\{f:M\to N\mid \forall g:N\to M, \mathrm{tr}(gf)=0\}$$

où *tr* est la trace, donnée par la structure rigide de $\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)$: c'est un idéal monoïdal de cette catégorie (cf. [**6**, lemme 7.1.1]) et on définit $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F,\mathbb{F}_p)$ comme l'enveloppe pseudo-abélienne de $\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)/\mathcal{N}$, et de même pour $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$.

Donnons-nous un nombre premier p. Si F est séparablement clos, le foncteur canonique $\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}\to\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ est une équivalence de catégories ($\mathcal{N}=0$). On prendra garde au fait que le foncteur d'extension des scalaires

$$H:\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}\longrightarrow\mathrm{Mot}(\bar F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$$

n'induit pas un foncteur de $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ vers $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(\bar F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ (voir ci-dessous). L'analogie avec la situation classique est tentante : définissons l'*équivalence homologique* sur $\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ comme le noyau de H, et $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ comme l'enveloppe pseudo-abélienne de $\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}/\operatorname{Ker}(H)$. On est donc dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\Pi"'] & \mathrm{Mot}(\bar F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}} \arrow[r, "\bar H"] \arrow[d] & \mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(\bar F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}} \\
\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}} &
\end{tikzcd} \tag{E.10.6}$$

où le foncteur $\bar H$ est (par définition) fidèle. L'argument de Jannsen [**94**] (cf. aussi [**5**, prop. 2.6] ou [**7**, th. 1]) donne :

E.10.3. Proposition. — *La catégorie* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ *est abélienne semi-simple.*

Malheureusement, pour $M\in\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F,\mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$, il n'est pas vrai en général que $\mathcal{N}(M,M)$ soit égal au radical de *End*(M) ; c'est même loin d'être le cas :

E.10.4. Proposition. — *Soit X une quadrique anisotrope. Alors l'image de $h(X)$ dans* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F,\mathbb{F}_2)_{\mathrm{tate}}$ *est égale à* 0.

Démonstration. — Il suffit de voir que tout endomorphisme de $h(X)$ dans $\mathrm{Mot}(F,\mathbb{F}_2)_{\mathrm{tate}}$ est de trace nulle. Cela découle immédiatement du fait que tout 0-cycle sur $X\times X$ est de degré pair, ce qui résulte du théorème E.3.2. □

Ceci limite fortement l'intérêt de la proposition E.10.3. Néanmoins, la proposition E.10.4 a une conséquence intéressante :

E.10.5. Lemme. — *Soit N un facteur direct de $h(X)$, où X est une quadrique anisotrope. Alors $\delta(N)$ est pair (voir notation E.10.1).*

En effet, $\delta(N) = \mathrm{tr}(\pi_N)$, où $\pi_N \in \mathit{End}(h(X))$ est le projecteur définissant N ; le lemme résulte donc immédiatement de la proposition E.10.4.

D'après (E.10.3), cela veut dire que *le nombre de motifs de Tate intervenant dans $H(N)$ est pair.*

E.10.D. Variétés projectives homogènes. — Soit X une variété projective homogène sous un groupe réductif connexe G. Si G est déployé, X admet une décomposition cellulaire [**42**] et on est dans la situation du §E.10.B. C'est par exemple le cas si X est une *quadrique hyperbolique.* En général on est dans la situation du §E.10.C.

Si G n'est pas déployé mais que X a un point rationnel, on peut décomposer partiellement le motif de X. Par exemple, si X est une quadrique isotrope définie par la forme quadratique $q \simeq \mathbb{H} \perp q'$, on a

$$h(X) \simeq \mathbf{1} \oplus h(X')(1) \oplus L^d \tag{E.10.7}$$

où $d = \dim X$ et X' est la quadrique d'équation $q' = 0$. Ce résultat est dû à Rost [**186**]. Il montre que $h(X)$ « contient »l'indice de Witt $i = i(q)$: en itérant, on obtient une décomposition

$$h(X) \simeq \mathbf{1} \oplus L \oplus \cdots \oplus L^{i-1} \oplus h(Y)(i) \oplus L^{d-i+1} \oplus \cdots \oplus L^d \tag{E.10.8}$$

où Y est une quadrique dont l'équation est donnée par la partie anisotrope de q. De plus,

E.10.6. Lemme. — *$h(X)$ ne contient pas L^i en facteur direct.*

En effet

$$\mathrm{Hom}(L^i, h(X)) = \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, h(Y)) = \mathrm{CH}_0(Y)$$

et

$$\mathrm{Hom}(h(X), L^i) = \mathrm{Hom}(h(Y), \mathbf{1}) = \mathrm{CH}^0(Y).$$

La composition des correspondances

$$\mathrm{Hom}(h(X), L^i) \times \mathrm{Hom}(L^i, h(X)) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$$

correspond au produit d'intersection $\mathrm{CH}^0(Y) \times \mathrm{CH}_0(Y) \to \mathbb{Z}$. Or le théorème E.3.2 montre que ce produit est d'image $2\mathbb{Z}$.

La décomposition (E.10.7) a été généralisée par Karpenko, puis par Chernousov-Gille-Merkurjev au cas d'une variété projective homogène quelconque ayant un point rationnel :

E.10.7. Proposition ([**109**, th. 6.5 et cor. 6.11] **;** [**41**, th. 7.1])

Soit X une variété projective lisse admettant une filtration

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n = X$$

où les X_i sont fermés et où, pour tout $i \in [0,n]$, $X_i - X_{i-1}$ est fibré sur une variété projective lisse Y_i à fibres des espaces affines de dimension constante a_i. Alors on a un isomorphisme canonique dans $\mathrm{Mot}(F)$

$$h(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} h(Y_i)(a_i).$$

La manière la plus agréable (mais certainement pas la moins chère) de comprendre la démonstration de cette proposition est de se placer dans la catégorie triangulée des motifs géométriques $DM_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(F)$ de Voevodsky ([**216**], voir aussi l'exposé Bourbaki de Friedlander [**57**, §3]) : rappelons que dans cette catégorie, le motif $M(U)$ d'une variété lisse U est défini et que la catégorie $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F)$ s'y plonge de manière pleinement fidèle d'après [**215**]. Traitons le cas $n = 1$: c'est de toute façon le cas essentiel. On a le triangle exact de Gysin

$$M(X - X_0) \to M(X) \to M(X_0)(c)[2c] \xrightarrow{+} .$$

Soit $p : X - X_0 \to Y_1$ la projection de l'énoncé. Par invariance homotopique, le morphisme $M(p)$ est un isomorphisme. Le point est alors que l'adhérence dans $X \times Y_0$ du graphe de p fournit une correspondance de Chow qui scinde ce triangle exact. On obtient ensuite la proposition en dualisant.

Il en résulte :

E.10.8. Théorème ([**41**, th. 7.4]). — *Soit X une variété projective homogène ayant un point rationnel. Écrivons $X = G/P$, où G est semi-simple adjoint et P est un sous-groupe parabolique de G défini sur F (c'est toujours possible). Alors on a un isomorphisme canonique dans* $\mathrm{Mot}(F)$*, de la forme*

$$h(X) = \bigoplus_{\delta \in \Delta} h(Z_\delta)(l(\delta))$$

où Δ est l'ensemble (fini) des coïnvariants de l'action de Galois sur $(P\backslash X)(\bar{F})$ et où $l(\delta), Z_\delta$ sont un certain entier ≥ 0 et une certaine variété projective homogène associés à δ.

Karpenko avait obtenu auparavant ce théorème dans le cas où G est classique [**109**]. En itérant, il en résulte que *le motif de Chow d'une variété projective homogène est somme directe canonique de tordus à la Tate de motifs de Chow de variétés projectives homogènes anisotropes.*

E.10.E. Le théorème de nilpotence de Rost

E.10.9. Notation. — On note $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$ la sous-catégorie épaisse (c'est-à-dire pleine, additive et stable par facteurs directs) de $\mathrm{Mot}(F)$ engendrée par les $h(X)(n)$, où $n \in \mathbb{Z}$ et X est une variété projective homogène. On note de même $\mathrm{Mot}(F, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{hmg}}$ la catégorie correspondante à coefficients $\mathbb{F}_p$.

La catégorie $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$ est visiblement stable par produit tensoriel et par dual ; d'après les remarques du début du §E.10.D, c'est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{tate}}$. Mêmes remarques à coefficients finis.

E.10.10. Théorème. — *Pour $M, N \in \mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$, notons $I(M,N)$ l'ensemble des homomorphismes f de M vers N tels que $f_{\bar{F}} = 0$. Alors, pour tout $M \in \mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$, $I(M,M)$ est un nilidéal de $End(M)$.*[(8)]

Ce théorème est dû à Chernousov–Gille–Merkurjev [**41**, th. 8.2] ; dans le cas où M est le motif d'une quadrique, c'est le célèbre théorème de nilpotence de Rost. Pour le démontrer, on peut visiblement supposer que M est somme de motifs de la forme $h(X)(n)$ pour X projective homogène (cas que considèrent les auteurs). En utilisant le théorème E.10.8, on se ramène facilement au théorème suivant :

E.10.11. Théorème. — *Soient X, Y deux variétés projectives lisses et $f \in Endh(X)$. Supposons que f agisse trivialement sur $\mathrm{CH}_*(X_{F(y)})$ pour tout point $y \in Y$. Alors $f^{\dim Y+1}$ agit trivialement sur $\mathrm{CH}_*(Y \times X)$.*

Ce théorème est dû à Brosnan [**35**, th. 3.1] ; le cas $\mathrm{CH}_{\dim Y}(Y \times X)$ avait été démontré par Rost. Soit $(F_n \mathrm{CH}_*(Y \times X))_{n \geq 0}$ la filtration de $\mathrm{CH}_*(Y \times X)$ par la dimension du support de Y. Si $(gr_n)_{n \geq 0}$ est le gradué associé, il suffit de montrer que f agit trivialement sur gr_n pour tout n. Brosnan le démontre en généralisant légèrement la composition classique des correspondances, autorisant trois variétés X_1, X_2, X_3 quelconques à condition que la variété intermédiaire X_2 soit projective lisse. Pour ce faire, il utilise la formule

$$f \circ g = (p_{13})_* \varphi^!(g \otimes f)$$

où φ est l'immersion régulière $X_1 \times X_2 \times X_3 \to X_1 \times X_2 \times X_2 \times X_3$ donnée par la diagonale de X_2 et $\varphi^!$ est le morphisme de Gysin correspondant [**58**, ch. 6]. Essentiellement, cela lui permet de faire opérer la correspondance f sur la suite spectrale de niveau qui aboutit à la filtration (F_n) [(9)]. Rost, quant à lui, utilisait une suite spectrale obtenue à l'aide de sa théorie des modules de cycles.

E.10.12. Remarques

a) Comme le groupe $End(M_{\bar{F}})$ est libre de type fini, $I(M)$ est aussi le *sous-groupe de torsion* de $End(M)$ comme le montre un argument de transfert bien connu.

b) Les théorèmes E.10.8 et E.10.10 s'étendent aux motifs à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, avec les mêmes démonstrations.

[(8)] La démonstration donne même qu'il existe un entier d ne dépendant que de M tel que $f^d = 0$ pour tout $f \in I = I(M,M)$. Contrairement à ce qui était indiqué dans la version diffusée lors de l'exposé, on ne peut pas en déduire que I est nilpotent, car le lemme de Nagata et Higman invoqué dans cette version (cf. [**6**, lemme 7.2.8]) ne s'applique qu'aux $\mathbb{Q}$-algèbres. J'ignore si I est nilpotent ; heureusement cela n'a pas d'importance pour l'application aux corollaires E.10.13 et E.10.14.

[(9)] Sa formulation est plus élémentaire.

c) J'ignore si le théorème E.10.10 s'étend à tous les objets de $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{tate}}$. Même perplexité à coefficients finis.

Puisque les Hom dans $\mathrm{Mot}(\bar{F}, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ sont de dimension finie, la remarque E.10.12 (b) entraîne, *via* [**188**, pp. 40/41, 235, 241/242] :

E.10.13. Corollaire. — *Soit p un nombre premier. Alors pour tout objet $M \in \mathrm{Mot}(F, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{hmg}}$, l'anneau $End(M)$ est extension d'une $\mathbb{F}_p$-algèbre semi-simple par un nilidéal. En particulier le théorème de Krull-Schmidt est vrai : tout objet est somme directe d'un nombre fini d'objets indécomposables, uniques à isomorphisme près.*

***E.10.14. Corollaire* (cf. [41, cor. 8.3]).** — *Soit $M \in \mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$, soit K/F une extension, et soit $(p_i) \in \mathrm{Im}\,(End(M) \to End(M_K))$ une famille de projecteurs orthogonaux de somme 1. Alors les p_i se relèvent en une famille de projecteurs orthogonaux de somme 1 de $End(M)$, de manière unique à conjugaison près.*

Cet énoncé reste vrai à coefficients finis.

On aimerait pouvoir également démontrer que le foncteur d'extension des scalaires $\mathrm{Mot}(F) \to \mathrm{Mot}(\bar{F})$ est conservatif. Il faut faire un peu attention car ce foncteur n'est pas plein. Le problème est de montrer que, si f est un morphisme tel que f_K soit un isomorphisme, l'inverse de f_K est défini sur F : on s'en tire essentiellement quand on sait ceci *a priori* ou quand la source et le but de f sont égaux. Ce problème est de même nature que pour la conjecture standard B. Cela donne l'énoncé un peu désagréable suivant.

E.10.15. Corollaire

a) *Soient $M, N \in \mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$, K/F une extension, et $f : M \to N$, $g : N \to M$ deux morphismes tels que $(gf)_K$ soit un isomorphisme. Alors gf est un isomorphisme. Si $(fg)_K$ est également un isomorphisme, alors f et g sont des isomorphismes.*
b) *Si N est indécomposable, il suffit de demander que $(gf)_K$ soit un isomorphisme pour que f et g soient des isomorphismes.*
c) [**41**, cor. 8.4] **:** *Soient X, Y deux variétés projectives homogènes, K/F une extension et $f \in \mathrm{Hom}(h(X), h(Y))$. Si f_K est un isomorphisme, alors f est un isomorphisme.*

Ces énoncés restent vrais à coefficients finis.

Démonstration

a) On se ramène immédiatement au cas $M = N, g = 1$. Quitte à agrandir K, on peut supposer que M_K est un motif de Tate mixte. Alors $End(M_K)$ est produit d'algèbres de matrices M_i sur $\mathbb{Z}$; en observant que le terme constant du polynôme caractéristique de l'image de f_K dans M_i est égal à ± 1 (c'est le déterminant), on voit que l'inverse de f_K est donné par un polynôme $Q(f_K)$.

En considérant $fQ(f)$, on se ramène au cas où $f_K = 1$; alors f est unipotent, donc inversible.

b) En utilisant (a), on se ramène au cas où $(gf)_K = 1$. Alors $(fg)_K$ est idempotent, donc égal à 0 ou 1 par hypothèse. Mais $(fg)_K = 0$ est impossible : cela impliquerait que $g_K = (gfg)_K = 0$, contredisant $(gf)_K = 1$.

c) On peut encore supposer que X et Y sont déployées sur K. En considérant le motif de Tate de poids maximal intervenant dans $h(X_K)$ et $h(Y_K)$, on remarque que nécessairement $\dim X = \dim Y$. Alors la transposée de f définit un morphisme $g : h(Y) \to h(X)$ et g_K est évidemment un isomorphisme. On est donc ramené au cas (a).

□

Dans la veine de (E.10.6), la définition suivante clarifie bien les choses et sera utile plus loin :

E.10.16. Définition

a) On note $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F)_{\mathrm{hmg}}$ le quotient de la catégorie $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$ par l'idéal I du théorème E.10.10.

b) Soit p un nombre premier. On note $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{hmg}}$ l'image essentielle de $\mathrm{Mot}(F, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{hmg}}$ dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ (cf. (E.10.6) et notation E.10.9).

Par définition, les morphismes dans la catégorie

$$\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F)_{\mathrm{hmg}} \quad (\text{resp. } \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{hmg}}),$$

entre des motifs de variétés $h(X)$ et $h(Y)$, disons, sont formés de l'image de

$$\mathrm{CH}_{\dim X}(X \times Y) \text{ dans } \mathrm{CH}_{\dim X}(\bar{X} \times \bar{Y}) \quad (\text{resp. dans } \mathrm{CH}_{\dim X}(\bar{X} \times \bar{Y})/p).$$

Le théorème E.10.10 et sa version modulo p montrent, comme ci-dessus, que les foncteurs

$$\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}} \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F)_{\mathrm{hmg}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mot}(F, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{hmg}} \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{hmg}}$$

sont conservatifs et que l'image d'un motif indécomposable est indécomposable. Le corollaire E.10.15 et les remarques le précédant concernent la conservativité partielle (?) des foncteurs

$$\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F)_{\mathrm{hmg}} \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(\bar{F})_{\mathrm{hmg}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{hmg}} \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(\bar{F}, \mathbb{F}_p)_{\mathrm{hmg}}.$$

E.10.F. La multiplicité d'une correspondance. — Soit $\alpha : h(X) \to h(Y)$ une correspondance entre variétés projectives lisses. Il existe un unique entier $\mu(\alpha)$ tel que $(p_Y)_* \circ \alpha = \mu(\alpha)(p_X)_*$, où p_X et p_Y sont les morphismes structuraux : c'est la *multiplicité de* α. Cette fonction a les propriétés évidentes suivantes :

1. $\mu(\alpha + \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$.
2. $\mu(\alpha \circ \beta) = \mu(\alpha)\mu(\beta)$.
3. $\mu(\alpha \otimes \beta) = \mu(\alpha)\mu(\beta)$.

4. Si α est le graphe d'une application rationnelle, $\mu(\alpha) = 1$.

En particulier, si $X = Y$ et que π est une correspondance idempotente, on a $\mu(\pi) = 0$ ou 1 ; le second cas se produit si et seulement si la composition

$$N \to h(X) \to \mathbf{1},$$

où N est le facteur direct défini par π, est non triviale.

On peut aussi définir la multiplicité d'une correspondance $\alpha \in \mathrm{CH}_{\dim X}(X \times Y)$, où X et Y sont des variétés quelconques avec Y propre : c'est l'entier $\mu(\alpha)$ tel que $p_*\alpha = \mu(\alpha)[X] \in \mathrm{CH}_{\dim X}(X)$, où p est la projection $X \times Y \to Y$. Elle coïncide avec la précédente dans le cas projectif lisse.

E.10.G. Opérations de Steenrod sur les groupes de Chow. — Dans [**218**], Voevodsky définit des opérations de Steenrod en cohomologie motivique modulo p : pour $p = 2$, ces opérations jouent un rôle essentiel dans sa preuve de la conjecture de Milnor ([**217**], voir aussi [**100**, §6]). En comptant les degrés, on observe que les plus importantes d'entre elles préservent les groupes de Chow modulo p

$$\mathrm{CH}^i(X)/p = H^{2i}(X, \mathbb{Z}/p(i))$$

pour X une F-variété lisse. Il est tentant d'essayer de les définir directement dans ce cadre, en évitant la théorie homotopique des schémas : cela correspond d'ailleurs à une question de Fulton [**58**, ex. 19.2.8]. C'est ce qu'a fait Brosnan dans sa thèse [**36**]. Sa construction et les propriétés principales de ces opérations (pour $p = 2$) sont exposées lucidement et succinctement par Karpenko dans [**112**, §2] :

Au moins pour les variétés quasi-projectives lisses X, Brosnan suit exactement la construction de Steenrod, en utilisant les groupes de Chow équivariants définis par Edidin et Graham [**47**] (voir aussi Totaro [**210**]). Il obtient ainsi des opérations

$$S^i : \mathrm{CH}^n(X)/2 \to \mathrm{CH}^{n+i}(X)/2$$

(en cohomologie modulo 2, S^i correspondrait à l'opération de Steenrod Sq^{2i}). Ces opérations ont les propriétés suivantes :

1. L'opération de Steenrod totale $S = \sum S^i$ est un endomorphisme de l'anneau $\mathrm{CH}^*(X)/2$.
2. S est contravariant pour les morphismes quelconques. Compte tenu de (1), cela fournit la *formule de Cartan* pour les cross-produits de cycles.
3. Sur $\mathrm{CH}^n(X)/2$, S^i est égal à
   - 0 pour $n < i$;
   - l'élévation au carré pour $n = i$.
4. $S^i = 0$ pour $i < 0$; S^0 est l'identité.
5. *Formule de Riemann-Roch*: si $f : Y \to X$ est un morphisme propre et $\alpha \in \mathrm{CH}^*(Y)/2$, on a

$$f_*(S(\alpha) \cdot c(-T_Y)) = S(f_*\alpha) \cdot c(-T_X)$$

où T_X et T_Y sont respectivement les fibrés tangents de X et Y et c désigne la classe de Chern totale (les expressions $-T_X$ et $-T_Y$ ayant un sens dans $K_0(X)$ et $K_0(Y)$).

Dans le cas où f est une immersion fermée et où α est la classe de Y, la formule de Riemann-Roch se réduit à la *formule de Wu* :

$$S([Y]) = f_* c(N) \tag{E.10.9}$$

où N est le fibré normal de l'immersion f.

E.10.H. Le motif d'une quadrique déployée. — Soit X une quadrique déployée de dimension d et d'équation $q = 0$. L'anneau de Chow de X admet une description très simple : on a

$$\mathrm{CH}^i(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}h^i & \text{si } i < d/2 \\ \mathbb{Z}l_{d-i} & \text{si } i > d/2 \\ \mathbb{Z}l^1 \oplus \mathbb{Z}l^2 & \text{si } i = d/2 \end{cases} \tag{E.10.10}$$

où h est la classe d'une section hyperplane de X et, si $j < d/2$, l_j désigne la classe d'un sous-espace projectif de X de dimension j. Pour $j = d/2$ (donc d pair), on a deux telles familles de sous-espaces l^1 et l^2, qui sont conjuguées sous l'action de $O(q)$. Plus précisément :

E.10.17. Lemme

a) *Soit $u \in O(q)$. Alors u opère trivialement sur $\mathrm{CH}^i(X)$ si $i \neq d/2$. Si $i = d/2$, u opère trivialement sur $\mathrm{CH}^i(X)$ si $u \in \mathrm{SO}(q)$ et échange l^1 et l^2 si $u \notin \mathrm{SO}(q)$.*
b) *L'application naturelle $O(q) \to End(h(X))$ est triviale si d est impair et se factorise (non trivialement) à travers le déterminant si d est pair.*

(Il suffit de tester (a) sur les réflexions puisque celles-ci engendrent $O(q)$, ce qui est facile ; (b) résulte de (a) puisque $End(h(X))$ opère fidèlement sur les $\mathrm{CH}^i(X)$, cf. (E.10.5) ci-dessous.)

On a de plus les relations (cf. par exemple [**107**])

$$\begin{gathered} h^i = 2l_{d-i} \quad (i > d/2) \\ h^{d/2} = l^1 + l^2 \quad \text{si } d \text{ est pair} \\ \langle h^i, l_{d-i}\rangle = 1 \qquad (i < d/2) \\ \langle l^1, l^2\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } d \equiv 0 \pmod 4 \\ 1 & \text{si } d \equiv 2 \pmod 4 \end{cases} \\ \langle l^a, l^a\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } d \equiv 0 \pmod 4 \\ 0 & \text{si } d \equiv 2 \pmod 4 \end{cases} \qquad \text{pour } a = 1, 2. \end{gathered} \tag{E.10.11}$$

Ceci permet de donner une formule explicite pour les « projecteurs de Künneth » π_i de X selon la décomposition (E.10.4) (π_i projette sur $\mathrm{CH}_i(X)$) :

$$\pi_i = \begin{cases} l_i \times h^i & \text{si } i < d/2 \\ h^{d-i} \times l_{d-i} & \text{si } i > d/2 \\ l^1 \times l^1 + l^2 \times l^2 & \text{si } i = d/2 \text{ et } d \equiv 0 \pmod 4 \\ l^1 \times l^2 + l^2 \times l^1 & \text{si } i = d/2 \text{ et } d \equiv 2 \pmod 4. \end{cases} \tag{E.10.12}$$

Bien entendu, tous ces calculs restent valables modulo 2.

E.10.18. Remarque. — (E.10.10) et (E.10.11) sont des cas particuliers de [**175**, prop. 1], qui permettrait de généraliser la formule (E.10.12) à une variété projective homogène déployée quelconque.

Les opérations de Steenrod opèrent de la manière suivante sur les images de h et des l_i dans les groupes de Chow modulo 2 :

$$\begin{aligned} S(h^i) &= h^i(1+h)^i \qquad (i \geq 0) \\ S(l_{d-i}) &= l_{d-i}(1+h)^{i+1} \quad (i \geq d/2). \end{aligned} \tag{E.10.13}$$

(La première formule se réduit au cas $i = 1$ par la propriété (1) du §E.10.G ; elle est alors évidente compte tenu de (3) et (4). Quant à la deuxième formule, elle est démontrée par exemple par Karpenko dans [**112**, cor. 3.3] au moyen de la formule de Wu (E.10.9). Noter également que $h^i = 0$ pour $i > d/2$ d'après les relations (E.10.11), de sorte que la contradiction entre les deux formules pour $i = d/2$ quand d est pair n'est qu'apparente !)

E.11. Formes quadratiques et motifs : théories de Rost et de Vishik

Dans cette section, nous exposons les résultats de Rost et Vishik sur la structure du motif d'une quadrique. Ils reposent sur le théorème de nilpotence de Rost (théorème E.10.10), que Rost a démontré pour calculer le motif d'une quadrique de Pfister (théorème E.11.14). Ce calcul a ensuite été vastement généralisé par Vishik dans sa thèse [**211**]. Vishik y travaille apparemment dans la catégorie $DM_-^{\mathrm{eff}}(F)$ des motifs triangulés de Voevodsky, mais l'article [**213**], sur lequel nous nous reposons, clarifie les choses et montre que tout se passe en fait dans la catégorie des motifs purs et résulte de calculs remarquablement élémentaires (à l'exception d'un résultat, le théorème E.11.31 qui utilise les opérations de Steenrod motiviques).

E.11.A. Facteurs directs du motif d'une quadrique, d'après Vishik. — Soit X une quadrique anisotrope de dimension d. Notons
- $h(X)$ son motif dans $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$;
- $h(X, \mathbb{F}_2)$ son motif dans $\mathrm{Mot}(F, \mathbb{F}_2)_{\mathrm{hmg}}$;
- $h_{\mathrm{hom}}(X)$ son motif dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F)_{\mathrm{hmg}}$;
- $h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2)$ son motif dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbb{F}_2)_{\mathrm{hmg}}$.

On notera aussi $\bar{X} = X \times_F \bar{F}$ et on ne distinguera pas $h(\bar{X})$ et $h_{\mathrm{hom}}(\bar{X})$, ni $h(\bar{X}, \mathbb{F}_2)$ et $h_{\mathrm{hom}}(\bar{X}, \mathbb{F}_2)$.

D'après le corollaire E.10.14, les facteurs directs de $h(X)$ (resp. de $h(X, \mathbb{F}_2)$) sont en correspondance bijective, à isomorphisme près, avec ceux de $h_{\mathrm{hom}}(X)$ (resp. de $h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2)$). Vishik démontre de plus que les facteurs directs de $h_{\mathrm{hom}}(X)$ et de $h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2)$ sont aussi en correspondance bijective. Son raisonnement pour relever des projecteurs modulo 2 en des projecteurs entiers est assez délicat dans le cas où d est pair : nous en donnons l'essentiel en E.11.A.2. En réalité, toutes les applications aux formes quadratiques utilisent les groupes de Chow modulo 2 : la distinction entre le cas entier et le cas modulo 2 n'a donc pas une grande importance en pratique.

E.11.A.1. Le cas de dimension impaire. — Si d est impair, la situation est relativement simple : pour tout $i \in [0, d]$, la correspondance $2\pi_i$ (cf. (E.10.12)) est rationnelle sur F, représentée par le cycle $h^{d-i} \times h^i$. En particulier, $\mathit{End}(h_{\mathrm{hom}}(X)) = \mathrm{Im}(\mathit{End}(h(X)) \to \mathit{End}(h(\bar{X})))$ contient $2\mathit{End}(h(\bar{X}))$. Pour comprendre cette image on peut donc réduire modulo 2 ; d'après (E.10.5), on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathit{End}(h(\bar{X}, \mathbb{F}_2)) \simeq \prod_{i=0}^{d} \mathbb{F}_2.$$

L'image $\mathit{End}(h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2))$ de $\mathit{End}(h_{\mathrm{hom}}(X))$ dans cet anneau correspond donc à une *partition* P *de* $\{0, \dots, d\}$, et tout idempotent de $\mathit{End}(h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2))$ se relève en un idempotent de $\mathit{End}(h_{\mathrm{hom}}(X))$, unique puisque cette algèbre est commutative.

Explicitement, soit I une partie de $\{0, \dots, d\}$ telle que la correspondance $\pi_I := \sum_{i \in I} \pi_i$ soit définie sur F : alors les I minimaux forment la partition en question. En appliquant le corollaire E.10.14, on obtient que les $(\pi_I)_{I \in P}$ se relèvent en des projecteurs orthogonaux $\tilde{\pi}_I$ de somme 1 dans $\mathit{End}(h(X))$, de manière unique à conjugaison près. En particulier, les $\tilde{\pi}_I$ définissent une décomposition

$$h(X) \simeq \textstyle\bigoplus_{I \in P} N(I)$$

en somme directe de motifs indécomposables, unique à isomorphisme près. On a

$$N(I)_{\bar{F}} \simeq \textstyle\bigoplus_{i \in I} L^{\otimes i}.$$

Vishik note $N \mapsto \Lambda(N)$ la bijection inverse de $I \mapsto N(I)$: il appelle $\Lambda(N)$ le *support* du facteur direct indécomposable N.

Énonçons une partie de ce qui précède :

E.11.1. Proposition. — *Supposons d impair. Alors l'algèbre $\mathit{End}(h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2))$ est commutative et semi-simple. En particulier,*

(i) *Tout facteur direct indécomposable de $h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2)$ apparaît avec multiplicité* 1.

(ii) *Si N, N' sont deux facteurs directs indécomposables de $h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2)$ non isomorphes, on a* $\mathrm{Hom}(N, N') = 0$.

E.11.A.2. Le cas de dimension paire. — Le premier résultat difficile de Vishik est que la description précédente s'étend (essentiellement) au cas pair.

E.11.2. Théorème. — *Soit X une quadrique non hyperbolique de dimension paire d. Alors*

a) *Le radical de $End(h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2))$ est engendré par $\theta := 1-\tau$, où τ est (le graphe d')une réflexion quelconque.*
b) *L'algèbre quotient est commutative.*
c) *Tout système d'idempotents orthogonaux de somme 1 de $End(h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2))$ se relève dans $End(h_{\mathrm{hom}}(X))$, de manière unique à conjugaison près.*

En particulier, tout facteur direct indécomposable de $h(X)$ apparaît avec multiplicité 1.

Ce théorème est (essentiellement) le contenu de [**213**, Sublemma 5.11].

Démonstration. — Voici une démonstration de (a) et (b) : d'après (E.10.5), $End(h(X))$ est une sous-algèbre de

$$\prod_{i=0}^{d} End(\mathrm{CH}^i(\bar{X})/2) = \prod_{i\neq d/2} \mathbb{F}_2 \times M_2(\mathbb{F}_2).$$

L'image de θ dans cette algèbre est nulle dans chaque facteur $\mathbb{F}_2$, et vaut $\bar{\theta} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dans $M_2(\mathbb{F}_2)$ (lemme E.10.17).

Comme X n'est pas hyperbolique, tous les éléments de $\mathrm{CH}^{d/2}(X)/2$ sont de degré pair (cf. remarques suivant (E.10.7)). En particulier, pour tout $\psi \in End(h(X))$, $\psi(h^{d/2})$ est de degré pair ; autrement dit, si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est l'image de ψ dans $M_2(\mathbb{F}_2)$, on a $a+b+c+d=0$. Notons A la sous-algèbre de $M_2(\mathbb{F}_2)$ définie par cette condition.

***E.11.3. Lemme* (Vishik).** — *Pour $x \in A$, soit x, soit $x+\bar{\theta}$ est idempotent.*

Ce lemme entraîne que soit ψ, soit $\psi+\theta$ est idempotent. Pour conclure la preuve de (a) et (b), il suffit de montrer que θ est dans le radical de $End(h(X))$: mais il est clair que $\bar{\theta}$ est de carré nul et que son produit avec toute matrice de A est un multiple de θ.

Quant à (c), il n'apparaît pas sous cette forme dans [**213**], mais voici une manière de le déduire des calculs qui y sont faits. Tout d'abord, l'énoncé de (c) est vrai pour l'homomorphisme $End(h(\bar{X})) \to End(h(\bar{X}, \mathbb{F}_2))$ (vérification facile) ; ceci implique (c) au cas ou l'on a

$$2End(h(\bar{X})) \subset End(h_{\mathrm{hom}}(X)). \tag{E.11.1}$$

E.11.4. Lemme. — (E.11.1) *est vrai dans les cas suivants :*

(i) *$End(h_{\mathrm{hom}}(X))$ contient un élément ψ tel que $\mathrm{tr}(\psi \mid \mathrm{CH}^{d/2}(\bar{X}))$ soit impair.*
(ii) *Le groupe de Galois absolu G_F opère non trivialement sur $\mathrm{CH}^*(\bar{X})$ (c'est-à-dire sur $\mathrm{CH}^{d/2}(\bar{X})$).*

Démonstration. — (i) est [**213**, sublemma 5.7] : nous renvoyons à *loc. cit.* pour la démonstration, très technique. (ii) Si l'action de G_F n'est pas triviale, G_F permute l^1 et l^2, donc opère comme $O(q)$; alors $End_{G_F}(\mathrm{CH}^{d/2}(\bar{X})) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta$ et (E.11.1) est vérifié. □

Déduisons-en (c) : le cas intéressant est celui où la condition du lemme E.11.4 n'est pas vérifiée. Soit $\epsilon \in End(h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2))$ un idempotent. L'hypothèse implique que la trace de ϵ opérant sur $\mathrm{CH}^{d/2}(\bar{X})/2$ est égale à 0. Donc ϵ opère sur ce groupe comme 0 ou l'identité. Quitte à le remplacer par $1 - \epsilon$, on peut supposer qu'il opère trivialement. Or X est déployée par une extension multiquadratique de F : il existe donc un entier s tel que $2^s End(h(\bar{X}))^{G_F} = 2^s End(h(\bar{X})) \subset End(h_{\mathrm{hom}}(X))$.

Soit A_s l'image de $End(h_{\mathrm{hom}}(X))$ dans $End(h(\bar{X}))/2^s$. Comme le noyau de $A_s \to End(h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2))$ est nilpotent, ϵ se relève en un idempotent $\epsilon_s \in A_s$, dont l'action sur $\mathrm{CH}^{d/2}(\bar{X})/2^s$ est nécessairement triviale. Par conséquent, l'image de ϵ_s dans $End(h(\bar{X}))/2^s$ se relève en un idempotent ϵ de $End(h(\bar{X}))$, et on a automatiquement $\epsilon \in End(h_{\mathrm{hom}}(X))$. □

Pour compléter cette description, il faut encore étudier les homomorphismes entre facteurs directs indécomposables. Notons $\pi^1_{d/2}$ et $\pi^2_{d/2}$ les deux idempotents de A de somme 1 (voir la définition de A juste avant le lemme E.11.3)

$$\pi^1_{d/2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi^2_{d/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\pi^1_{d/2}\bar{\theta} = 0, \quad \pi^2_{d/2}\bar{\theta} = \bar{\theta}, \quad \bar{\theta}\pi^1_{d/2} = \bar{\theta}, \quad \bar{\theta}\pi^2_{d/2} = 0.$$

Deux cas se présentent donc :

E.11.5. Proposition

a) *Supposons que, dans $End(h(X))/\langle\theta\rangle$, un idempotent indécomposable ϵ contienne $\pi^1_{d/2} + \pi^2_{d/2}$. Alors, si N_ϵ est le facteur direct correspondant de $h(X)$, on a $End(N_\epsilon) = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2\epsilon\theta\epsilon$. Pour tout autre facteur direct indécomposable N, on a $End(N) = \mathbb{F}_2$, et $\mathrm{Hom}(N, N') = 0$ si N et N' sont deux facteurs directs indécomposables non isomorphes.*

b) *Supposons que, dans $End(h(X))/\langle\theta\rangle$, un idempotent indécomposable ϵ_1 contienne $\pi^1_{d/2}$ et qu'un autre idempotent indécomposable ϵ_2 contienne $\pi^2_{d/2}$. Soient N_1 et N_2 les facteurs directs de $h(X)$ correspondants. Alors, pour tout facteur direct indécomposable N de $h(X)$, on a $End(N) = \mathbb{F}_2$. Si N, N' sont deux facteurs directs indécomposables non isomorphes, on a $\mathrm{Hom}(N, N') = 0$, sauf si $(N, N') = (N_1, N_2)$ auquel cas $\mathrm{Hom}(N_1, N_2) = \pi^2_{d/2}\theta\pi^1_{d/2}\mathbb{F}_2 \neq 0$.*

E.11.6. Remarque. — Comme me l'a fait observer Vishik, il est facile de donner un exemple de deux facteurs directs indécomposables M, N de motifs de quadriques (différentes) tels que $\dim \mathrm{Hom}(M, N) \geq 3$ dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbb{F}_2)_{\mathrm{hmg}}$: prenons une forme quadratique q de dimension $d+2$ avec $d \geq 5$, de quadrique associée X, telle que $N = h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbb{F}_2)$ soit indécomposable (par exemple q générique). On voit facilement que $\mathrm{Im}(\mathrm{CH}^2(X \times X) \to \mathrm{CH}^2(\bar{X} \times \bar{X})/2$ a pour base $(h^2 \times 1, h \times h, 1 \times h^2)$ où h est une section hyperplane. Mais

$$\mathrm{Hom}(N(d-2), N) = \mathrm{Hom}(N(d-2), N^\vee(d)) = \mathrm{Hom}(N \otimes N, L^2)$$

est égal à ce groupe. (Noter que $N(d-2)$ est facteur direct de $h(Y)$, où Y est la quadrique définie par $q \perp (d-2)\mathbb{H}$, cf. (E.10.8).)

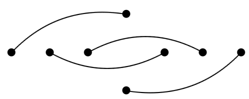
E.11.A.3. Les diagrammes de Vishik. — On a vu en E.11.A.1 que, si la dimension d de la quadrique X est impaire, les facteurs directs indécomposables de $h(X)$ sont en bijection avec une certaine partition de l'ensemble des motifs de Tate intervenant dans $H(h(X))$, qui peut être identifié à $\{0, \dots, d\}$. Lorsque d est pair, le même énoncé est vrai d'après E.11.A.2, mais on ne peut plus identifier cet ensemble à un ensemble d'entiers puisque $L^{d/2}$ intervient avec multiplicité 2. En fait, comme le remarque Vishik, ces deux facteurs sont dissymétriques. Plus précisément, il fait le choix suivant :

$$\begin{aligned} \pi^{up} &= l^1 \times (l^1 + l^2) \\ \pi_{lo} &= \pi_{d/2} - \pi^{up} \qquad \text{(cf. (E.10.12)).} \end{aligned}$$

(Ainsi, π^{up} opère comme $\pi^2_{d/2}$ sur $\mathrm{CH}^2(\bar{X})/2$ si $d \equiv 2 \pmod 4$ et comme $\pi^2_{d/2} + \bar{\theta}$ si $d \equiv 0 \pmod 4$.) Il note L^{up} et L_{lo} les deux facteurs directs correspondants : la restriction de $\overline{\deg}_X$ à $\mathrm{CH}_{d/2}(L^{up})$ (cf. E.11.A.4) est nulle tandis que sa restriction à $\mathrm{CH}_{d/2}(L_{lo})$ est non nulle. Il note $\Lambda(X)$ l'ensemble de ces motifs de Tate : ainsi, pour tout facteur direct M de $h(X)$, on peut identifier l'ensemble $\Lambda(M)$ des motifs de Tate intervenant dans $H(X)$ à un sous-ensemble de $\Lambda(X)$, et M est déterminé par $\Lambda(M)$ à isomorphisme près. Énonçons ceci explicitement, pour référence ultérieure :

E.11.7. Proposition. — *Soient N, N' deux facteurs directs du motif d'une même quadrique. Si $\Lambda(N) \cap \Lambda(N') \neq \emptyset$, alors $N \simeq N'$.*

Pour représenter la décomposition de $h(X)$ en facteurs directs indécomposables, Vishik dessine des diagrammes fondés sur cette description. Ainsi, voici un diagramme représentant la décomposition motivique d'une quadrique définie par une 3-forme de Pfister :



E.11.A.4. Le caractère de Vishik. — Vishik a introduit un critère très pratique pour démontrer un isomorphisme entre motifs indécomposables :

E.11.8. Définition. — Soit X une quadrique. On note $\overline{\deg}_X$ l'homomorphisme

$$\overline{\deg}_X : \mathrm{CH}_*(\bar{X})/2 \to \mathbb{F}_2$$

prenant la valeur 1 sur tous les générateurs apparaissant dans (E.10.10). C'est le *caractère de Vishik*.

On a le lemme trivial suivant :

E.11.9. Lemme. — *Si* $\dim X$ *est paire,* $\overline{\deg}_X \circ \theta = 0$*, où* θ *est comme dans le théorème E.11.2.*

On en déduit :

E.11.10. Théorème **([213, th. 3.8]).** — *Soient* X_1, X_2 *deux quadriques et* a_1, a_2 *deux entiers* ≥ 0*. Soient* $\alpha : h(X_1)(a_1) \to h(X_2)(a_2)$ *et* $\beta : h(X_2)(a_2) \to h(X_1)(a_1)$ *deux morphismes de* $\mathrm{Mot}(F, \mathbb{F}_2)$*, et soit* $r \geq 0$ *tels que* $(\overline{\deg}_{X_1} \circ \beta \circ \alpha)_{|\,\mathrm{CH}_r(\bar{X}_1)/2} \neq 0$*. Alors il existe des facteurs directs indécomposables* N_1 *et* N_2 *de* $h(X_1)(a_1)$ *et* $h(X_2)(a_2)$*, isomorphes, tels que* $L^r \in \Lambda(N_1)$ *et* $L^r \in \Lambda(N_2)$*.*

Démonstration. — Tout d'abord, on peut se ramener à $a_1 = a_2 = 0$ en remplacant X_1 et X_2 par X_1' et X_2', où X_i' est d'équation $a_i\mathbb{H} \perp q_i$ si X_i est d'équation q_i (cf. (E.10.8)). Choisissons maintenant des décompositions en somme de facteurs directs indécomposables

$$h(X_1) \simeq \bigoplus\nolimits_{s \in S} N_s^1, \qquad h(X_2) \simeq \bigoplus\nolimits_{t \in T} N_t^2.$$

Travaillons dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbb{F}_2)_{\mathrm{hmg}}$. Sur les décompositions ci-dessus, les morphismes $\Pi(\alpha)$ et $\Pi(\beta)$ ont des écritures matricielles (α_{st}) et (β_{ts}) (voir (E.10.6) pour se rappeler la définition des foncteurs H et Π). De même, $\Pi(\beta \circ \alpha)$ a une écriture matricielle $((\beta \circ \alpha)_{ss'})$. De plus, la proposition E.11.5 implique que, modulo θ si $\dim X$ est paire, cette matrice est diagonale. L'hypothèse et le lemme E.11.9 impliquent donc qu'il existe s_0 tel que

$$(\beta \circ \alpha)_{s_0 s_0} = \sum_{t \in T} \beta_{t s_0} \alpha_{s_0 t} \equiv 1 \pmod{\langle \theta \rangle}.$$

Par conséquent, il existe aussi un t_0 tel que $\beta_{t_0 s_0} \alpha_{s_0 t_0} \equiv 1 \pmod{\langle \theta \rangle}$. Soient $N_1 = N_{s_0}^1$ et $N_2 = N_{t_0}^2$: le corollaire E.10.15 (b) implique que $N_1 \simeq N_2$. De plus, l'hypothèse implique immédiatement que $L^r \in \Lambda(N_1)$ et $L^r \in \Lambda(N_2)$. □

E.11.B. Premières applications

E.11.11. Définition. — Pour toute quadrique anisotrope X, on note $N_0(X)$ l'unique facteur direct indécomposable de $h(X)$ tel que $\mathbf{1} \in \Lambda(N_0(X))$: c'est le *motif initial* de X.

E.11.12. Théorème. — *Soient* X, Y *deux quadriques anisotropes. Alors* $X \approx Y \Leftrightarrow N_0(X) \simeq N_0(Y)$*.*

L'implication $\Rightarrow$ est le corollaire 3.9 de [**213**].

Démonstration. — Voici la démonstration de Vishik : choisissons un point rationnel $p \in Y(F(X))$ et un point rationnel $q \in X(F(Y))$. Alors p et q correspondent à des appplications rationnelles $p : X \rightsquigarrow Y$ et $q : Y \rightsquigarrow X$. Soient $\alpha : h(X) \to h(Y)$ et $\beta : h(Y) \to h(X)$ les correspondances données respectivement par (l'adhérence du) graphe de p et de q. Il est immédiat que la condition du théorème E.11.10 est vérifiée avec $r = 0$.

Je n'ai pas trouvé l'implication $\Leftarrow$ dans [**213**], mais sa démonstration est facile : soit $\varphi : N_0(X) \to N_0(Y)$ un isomorphisme. Il induit un morphisme

$$h(X) \longrightarrow N_0(X) \xrightarrow{\varphi} N_0(Y) \longrightarrow h(Y)$$

qui induit évidemment un isomorphisme $\mathrm{CH}_0(\bar{X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}_0(\bar{Y})$. Par le théorème E.3.2, tout point rationnel de X (sur une extension de F) fournit un point rationnel de Y, donc $X \preccurlyeq Y$, et de même $Y \preccurlyeq X$. $\square$

E.11.13. Théorème. — *Soit X une quadrique anisotrope. Alors $h(X)$ contient*

$$\bigoplus_{i=0}^{i_1(X)-1} N_0(X)(i)$$

en facteur direct (cf. la définition E.6.1 pour se rappeler la définition de $i_1(X)$).

C'est le corollaire 3.10 de [**213**]. Vishik le démontre ainsi : comme les $N_0(X)(i)$ sont visiblement deux à deux non isomorphes, il suffit de montrer que chacun est facteur direct de $h(X)$. Fixons $i < i_1(X)$. Dans $X_{F(X)}$, choisissons un sous-espace projectif L de dimension i. Son adhérence dans $X \times X$ définit une correspondance $\alpha : h(X)(i) \to h(X)$. D'autre part, considérons une section plane de codimension i de X, et plongeons-la diagonalement dans $X \times X$: cela définit une correspondance $\beta : h(X) \to h(X)(i)$. Il est alors facile de voir que la condition du théorème E.11.10 est vérifiée avec $r = i$.

E.11.C. Le motif de Rost

E.11.14. Théorème. — *Soit φ une n-forme de Pfister anisotrope, et soit $X = X_\varphi$ la quadrique associée. Alors il existe un unique motif $M = M_\varphi$ tel que*

(i) $M_{\bar{F}} \simeq \mathbf{1} \oplus L^{\otimes(2^{n-1}-1)}$;

(ii) $h(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^{2^{n-1}-1} M(i)$.

Ce théorème est dû à Rost [**186**]. Le motif M_φ est appelé le *motif de Rost* associé à φ : il joue un rôle clé dans la démonstration par Voevodsky de la conjecture de Milnor (cf. [**100**, §8.1]).

Démonstration. — Voici comment Vishik le déduit du théorème E.11.13 : nous allons voir que $M_\varphi = N_0(X_\varphi)$. Partons de ce dernier motif (noté N pour simplifier). Comme $i_1(X_\varphi) = 2^{n-1}$, $h(X_\varphi)$ contient

$$M = \bigoplus_{i=0}^{2^{n-1}-1} N(i)$$

en facteur direct. D'autre part, le lemme E.10.5 implique que $H(N)$ contient au moins deux motifs de Tate. En comptant, on voit successivement que

- le nombre de motifs de Tate intervenant dans M est $\geq$ au nombre de motifs de Tate intervenant dans $h(X)$;
- $M = h(X)$;
- $H(N)$ contient exactement deux motifs de Tate ;
- le motif de Tate $\neq \mathbf{1}$ intervenant dans $H(N)$ est nécessairement $L^{2^{n-1}-1}$.

$\square$

On a le complément suivant :

E.11.15. Lemme. — *Posons $d = 2^n - 2 = \dim X$. Alors le facteur $L^{d/2}$ contenu dans $\Lambda(M_\varphi)$ est L^{up}.*

C'est le point clé du contenu de [**213**, §5.7] (démonstration de la proposition 4.8). Le raisonnement de Vishik est le suivant : $\Lambda(M_\varphi(d/2))$ contient L^d, donc

$$\mathrm{CH}_d(H(M_\varphi(d/2))) = \mathrm{CH}_d(\bar{X}) = \mathrm{CH}^0(\bar{X})$$

dont le générateur est évidemment défini sur le corps de base. Il en est donc de même pour le générateur de $\mathrm{CH}_{d/2}(H(M_\varphi)) = \mathrm{CH}_d(H(M_\varphi(d/2)))$. Comme X n'est pas hyperbolique, ce générateur est nécessairement $h^{d/2}$, et donc $\overline{\deg}_X(\mathrm{CH}_{d/2}(H(M_\varphi))) = 0$.

Avant d'énoncer un corollaire, donnons une définition :

E.11.16. Définition. — Soit N un facteur direct de $h(X)$. On note :

- $a(N)$ le plus petit entier a tel que $L^a \in \Lambda(N)$.
- $b(N)$ le plus grand entier b tel que $L^b \in \Lambda(N)$.
- $t(N) = b(N) - a(N)$ (c'est la *taille* de N).

E.11.17. Corollaire. — *Soit X une quadrique anisotrope de dimension d. Soit $a < i_1(X)$, et soit N un facteur direct indécomposable de $h(X)$ tel que $L^a \in \Lambda(N)$. Si $a < d/2$, on a $N \simeq N_0(X)(a)$. Si $a = d/2$, on a $N \simeq N_0(X)(a)$ ou $N \simeq N_0(X)$ selon que $L^a = L_{lo}$ ou que $L^a = L^{up}$.*

Cet énoncé recouvre le contenu de [**213**, §5.7]. Pour le démontrer, rappelons que $N_0(X)(a)$ est facteur direct de $h(X)$ d'après le théorème E.11.13. Si $a < d/2$, $\Lambda(N) \cap \Lambda(N_0(X)(a)) \neq \emptyset$, d'où l'assertion. Supposons maintenant $a = d/2$. Alors $d/2 < i_1(X)$, donc d'après la proposition E.6.6, X est définie par une forme de Pfister. D'après le théorème E.11.14, $h(X)$ contient exactement deux motifs indécomposables N' tels que $L^{d/2} \in \Lambda(N')$, à savoir $N' = N_0(X)$ et $N' = N_0(X)(d/2)$. L'énoncé résulte donc du lemme E.11.15.

E.11.D. La taille du motif initial

E.11.18. Théorème. — *Soit X une quadrique anisotrope. Alors :*

a) $t(N_0(X)) = \dim_{\mathrm{es}}(X)$.
b) $N_0(X) \simeq N_0(X)^\vee(\dim_{\mathrm{es}}(X))$.

La première partie de ce théorème est le corollaire 4.7 de [**213**] ; la deuxième partie est un cas particulier du théorème 4.19 de *op. cit.* La démonstration se fait en deux étapes :

1. Le cas $i_1(X) = 1$.
2. Réduction au cas (1).

Pour l'étape (1), nous proposons la démonstration suivante, différente de celle de Vishik : posons $N = N_0(X)$ et $K = F(X)$. D'après (E.10.7), on a

$$h(X)_K \simeq \mathbf{1} \oplus h(X_1)(1) \oplus L^d$$

où X_1 est la quadrique anisotrope définie par q_1. On a aussi

$$N_K \simeq \mathbf{1} \oplus N'.$$

D'autre part,

$$\delta(N) = \delta(N_K) = 1 + \delta(N')$$

est pair (lemme E.10.5), donc $\delta(N')$ est impair. En réappliquant le lemme E.10.5, il en résulte que N' n'est pas facteur direct de $h(X_1)(1)$. Mais alors on a forcément $L^d \in \Lambda(N)$, ce qui démontre (a).

Pour (b), on observe que $N^\vee(d)$ est facteur direct de $h(X)^\vee(d) \simeq h(X)$ et que, d'après (a), $\Lambda(N) \cap \Lambda(N^\vee(d)) \neq \emptyset$ et on conclut par la proposition E.11.7.

L'étape (2) est une méthode devenue classique dans le sujet. Il y a plusieurs manières de faire cette réduction : dans [**86**, dém. du lemme 7.9], Izhboldin utilise une technique générique. Vishik, pour sa part, démontre que X contient une sous-quadrique Y telle que $X \approx Y$ et $i_1(Y) = 1$ [**213**, sublemma 5.25]. Si $i_1(X) = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $i_1(X) > 1$. Alors toute sous-quadrique Z de codimension 1 est stablement birationnellement équivalente à X (lemme E.7.1 (c)) et on s'en tire par récurrence sur $d = \dim X$.

Le théorème E.11.12 montre maintenant que $N_0(X) \simeq N_0(Y)$. D'après le théorème E.11.13, $N_0(X)(i_1(X) - 1)$ est facteur direct de $h(X)$, ce qui implique *a priori* que $b = b(N_0(X)) \leq \dim_{\mathrm{es}}(X)$. Pour montrer l'inégalité inverse, Vishik observe que le lemme E.10.6 implique d'abord que $b > d/2$, puis que $b > d - i_1(X)$ parce que $N_{F(X)}$, et donc $h(X)_{F(X)}$, contient un facteur direct isomorphe à L^b.

Le corollaire E.8.4 découle immédiatement des théorèmes E.11.12 et E.11.18. On déduit aussi du théorème E.11.18 le corollaire suivant, dû à Karpenko [**110**, th. 6.4] :

E.11.19. Corollaire. — *Soit α une correspondance de X vers elle-même, où X est une quadrique anisotrope telle que $i_1(X) = 1$. Alors $\mu(\alpha) \equiv \mu(\alpha^t) \pmod 2$, où α^t est la correspondance transposée et μ est la multiplicité (cf. E.10.F).*

Démonstration. — Soit π le projecteur définissant $N_0(X)$: on a $\mu(\pi) = 1$ (cf. fin de E.10.F). On a donc par E.10.F (2)

$$\mu(\alpha) = \mu(\pi\alpha\pi).$$

Le théorème E.11.18 implique en particulier que $\pi = \pi^t$. On a donc

$$(\pi\alpha\pi)^t = \pi\alpha^t\pi.$$

Rappelons que $End(N_0(X)) = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2\theta$, où $\theta = 1 - \tau \in End(h(X))$ est l'élément du théorème E.11.2 (proposition E.11.5). Soit $A = End(N_0(X))$ dans le premier cas et $A = End(N_0(X))/\langle\theta\rangle$ dans le second. Remarquons que $\theta^t = \theta$, donc la transposition induit une involution de $A \simeq \mathbb{F}_2$, et cette involution est nécessairement l'identité. Ainsi

$$(\pi\alpha\pi)^t = \pi\alpha\pi \quad \text{dans } A.$$

D'autre part, $\mu(\theta) = \mu(1) - \mu(\tau_*) = 0$ par E.10.F (4). On obtient donc finalement, modulo 2 :

$$\mu(\alpha) = \mu(\pi\alpha\pi) = \mu((\pi\alpha\pi)^t) = \mu(\pi\alpha^t\pi) = \mu(\alpha^t)$$

comme demandé. □

E.11.E. Motifs supérieurs. — Soit X une quadrique anisotrope de dimension d, d'équation $q = 0$, et soit $(i_1, \ldots, i_h)$ sa suite de déploiement (définition E.6.1). Pour $0 \leq r \leq h$, posons également

$$I_r = \sum_{t=1}^{r} i_t.$$

Ainsi I_r est l'indice de Witt de q_{F_r} (voir encore définition E.6.1).

E.11.20. Théorème. — *Soit $r \in [0, h[$. Supposons qu'il existe un facteur direct indécomposable N de $h(X)$ tel que $a(N) \in [I_r, I_{r+1}[$. Alors :*

a) *Pour tout $j \in [I_r, I_{r+1}[$, $N(j - a(N))$ est facteur direct de $h(X)$.*
b) *On a $t(N) = \dim_{\mathrm{es}}(X_r)$.*
c) *On a $N \simeq N^\vee(2a(N) - \dim_{\mathrm{es}}(X_r))$.*

Ce théorème est équivalent à [**213**, th. 4.13 et cor. 4.14]. Pour démontrer (a), Vishik distingue deux cas : $j \geq a(N)$ et $j \leq a(N)$. Dans le premier, la démonstration est analogue à celle du théorème E.11.13 ([**213**, §5.8] ; il utilise les motifs des grassmanniennes quadratiques du §E.6.B). Ensuite, il ramène le deuxième au premier par dualité.

Nous proposons la démonstration suivante de (b), un peu différente de celle de Vishik : dans le cas $r = 0$, c'est déjà connu (théorème E.11.13, corollaire E.11.17, théorème E.11.18). À partir de là, on procède par récurrence sur r de la manière suivante.

***E.11.21. Lemme* (cf. [213, sublemma 5.29]).** — *$b(N) \leq d - I_r$.*

Démonstration. — En effet, supposons le contraire. Alors $a(N^\vee(d)) = d - b(N) < i_r$. Observons que $N^\vee(d)$ est facteur direct (indécomposable) de $h(X)^\vee(d) \simeq h(X)$. Par récurrence, on a

$$t(N) = t(N^\vee(d)) = \dim_{\mathrm{es}}(X_s) = d - I_s + 1$$

pour un $s < r$. Mais alors

$$b(N) = a(N) + d - I_s + 1 \geq d + I_r - I_s + 1 > d + 1$$

ce qui est impossible. □

Le lemme E.11.21 implique que N_{F_r} est un facteur direct de $h(X_r)(I_r)$. Par conséquent, $N' = N_{F_r}(-I_r)$ est facteur direct de $h(X_r)$, et $a(N') < i_1(X_r)$. Il résulte du corollaire E.11.17 que N' contient $N_0(X_r)(a(N'))$ en facteur direct, et d'après le théorème E.11.18 que

$$t(N) = t(N') \geq \dim_{\mathrm{es}}(X_r).$$

Grâce à la partie (a) du théorème E.11.20, on peut supposer que $a(N) = I_{r+1} - 1$. Alors $t(N) \geq \dim_{\mathrm{es}}(X_r) \Rightarrow b(N) \geq I_{r+1} + \dim(X_r) - i_{r+1} = d - I_r$, donc $b(N) = d - I_r$ grâce au lemme E.11.21, d'où (b). Enfin, pour (c), on remarque que $d - b(N) \in [I_r, I_{r+1}[$ et on applique la proposition E.11.7.

E.11.22. Corollaire. — *Pour N comme dans le théorème E.11.20, on a $b(N) \geq d/2$.*

Démonstration. — En effet, on a

$$b(N) = a(N) + t(N) \geq I_r + \dim_{\mathrm{es}} X_r = I_r + d - 2I_r - i_{r+1} + 1 = d - I_{r+1} + 1$$

et cet entier est toujours $\geq d/2$. □

Le corollaire E.11.22 implique par dualité que $a(N) \leq d/2$ pour tout facteur direct indécomposable N de $h(X)$: ainsi *le théorème* E.11.20 *décrit tous ces facteurs directs.* En particulier :

***E.11.23. Corollaire* ([213, th. 4.19]).** — *Tout facteur direct indécomposable N du motif d'une quadrique est polarisable : il existe un entier r tel que $N^\vee \simeq N(r)$.*

On en déduit :

E.11.24. Corollaire. — *Soient N, N' deux facteurs directs indécomposables de motifs de quadriques et soit $f : N \to N'$ un morphisme. Supposons que f_K soit un isomorphisme, où K/F est une extension. Alors f est un isomorphisme.*

Démonstration. — En tenant compte du corollaire E.11.23, c'est la même que celle du corollaire E.10.15 (c) (on observe d'abord que, nécessairement, $a(N) = a(N')$ et $b(N) = b(N')$). □

E.11.25. Remarque. — Vishik m'a donné un exemple où, bien que $t(N) = \dim_{\mathrm{es}}(X_r)$ dans le théorème E.11.20, N_{F_r} n'est pas isomorphe à un twist de $N_0(X_r)$: il prend une sous-forme q de codimension 1 d'une forme p de dimension 12 telle que $p \in I^3F$. Si X est la quadrique correspondante (de dimension 9), on a $h(X) = N_0(X) \oplus N$ où N est indécomposable (avec $\Lambda(N) = \{L, L^3, L^6, L^8\}$). Mais q_1 est une voisine de Pfister (ce résulat est dû à Izhboldin), donc $N_0(X_1)$ est un motif binaire d'après le théorème E.11.14, ce qui montre que N_{F_1} est décomposable. cf. [**213**, p. 77].

E.11.F. Équivalence motivique

E.11.26. Théorème. — *Soient q, p deux formes quadratiques, $m, n \geq 0$ et X, Y les quadriques associées. Supposons que, pour toute extension K/F, les conditions $i(p_K) > n$ et $i(q_K) > m$ soient équivalentes. Supposons que $h(Y)$ admette un facteur direct indécomposable N tel que $a(N) = n$. Alors $h(X)$ admet $N(m - n)$ comme facteur direct.*

C'est le théorème 4.17 de [**213**]. Sa preuve est dans [**213**, §5.9] : c'est une généralisation de celle de l'implication ⇒ dans le théorème E.11.12, qui repose également sur le théorème E.11.10 et utilise les grassmanniennes quadratiques. En voici deux corollaires :

E.11.27. Corollaire. — *Soit X une quadrique anisotrope, et soit $r \in [0, h[$ où h est la hauteur de X. On prend les notations de la définition E.6.1. Supposons qu'il existe une quadrique anisotrope Y telle que $Y \approx X^{(r+1)}$, où $X^{(r+1)}$ est une grassmannienne quadratique de corps des fonctions équivalent à F_{r+1} (cf. §E.6.B). Alors l'hypothèse du théorème E.11.20 est vérifiée.*

Démonstration. — C'est le cas particulier $n = 0$ du théorème E.11.26. □

***E.11.28. Corollaire* (Équivalence motivique).** — *Soient X, Y deux quadriques anisotropes de la même dimension. Alors $h(X) \simeq h(Y)$ si et seulement si $i(X_K) = i(Y_K)$ pour toute extension K/F.*

C'est l'un des plus beaux résultats de Vishik, le théorème 4.18 de [**213**]. La nécessité résulte facilement du théorème E.11.26 ; pour la suffisance, Vishik remarque simplement que le motif de X (ou celui de Y) « code »les indices de Witt supérieurs (cf. lemme E.10.6).

Izhboldin a remarqué :

E.11.29. Proposition **(**[**84**, cor. 2.9]**).** — *Si dans le corollaire E.11.28 la dimension commune de X et Y est impaire, alors ses deux conditions équivalentes équivalent encore à $X \simeq Y$.*

Démonstration. — En effet, choisissons deux équations q, q' de X et Y. Quitte à multiplier q' par un scalaire, on peut supposer que $q \perp -q' \in I^2F$ (lemme E.4.4). Par hypothèse, le corps $F_1 = F(q)$ est un corps d'isotropie générique commun à q et q'. Par récurrence sur la hauteur commune de q et q', on peut supposer que $q_1 \simeq q'_1$; autrement dit, $(q \perp -q')_{F_1} \sim 0$. En appliquant le théorème E.6.12 de Fitzgerald (ou la version plus faible obtenue plus élémentairement par Izhboldin dans [**84**, cor. 1.2]), on en déduit que $q \perp -q'$ est soit hyperbolique, soit semblable à une forme de Pfister. Mais le deuxième cas est impossible puisque $\dim q = \dim q'$ est impaire. □

E.11.G. La taille d'un motif binaire

E.11.30. Définition. — Un motif $N \in \mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{tate}}$ est *binaire* si $H(N)$ est de la forme $L^a \oplus L^b$.

Le théorème suivant est l'un des résultats les plus profonds de Vishik :

E.11.31. Théorème **(**[**213**, th. 4.20]**).** — *Soit N un motif binaire, facteur direct du motif d'une quadrique anisotrope X. Alors $t(N)$ est de la forme $2^n - 1$.*

Sa démonstration originelle [**211**, dém. de Statement 6.1] utilise les opérations de Steenrod motiviques de Voevodsky : elle est reproduite dans [**91**, th. 6.1]. Plus récemment, Karpenko et Merkurjev ont donné dans [**115**] une démonstration n'utilisant que les opérations construites par Brosnan (cf. E.10.G).

E.11.32. Remarque. — Vishik prouve plus : si $\dim_{\mathrm{es}} X = 2^n - 1$ (cas auquel on peut toujours se ramener), alors $\mathrm{Ker}(H^{n+1}(F, \mathbb{Z}/2) \to H^{n+1}(F(X), \mathbb{Z}/2)) \neq 0$. Karpenko et Merkurjev ne retrouvent pas ce complément. Il est directement lié à la conjecture ci-dessous (cf. [**104**, « conjecture »énoncée après le corollaire 2 de l'introduction] : cette conjecture prédit que le noyau précédent est engendré par un symbole $(a_1, \dots, a_{n+1})$). Pour des compléments là-dessus, nous renvoyons à l'article [**91**] d'Izhboldin et Vishik.

E.11.33. Conjecture. — *Soit N un facteur direct indécomposable binaire du motif d'une quadrique, de taille $2^n - 1$. Alors il existe une $(n+1)$-forme de Pfister φ telle que N soit de la forme $N_0(X_\varphi)(a)$.*

C'est la conjecture 4.21 de [**213**], cf. aussi [**111**, conj. 1.6] : elle implique que, si tous les facteurs indécomposables de $h(X)$ sont binaires, la quadrique anisotrope X est définie par une forme excellente. Elle est connue pour $n \leq 2$ (facilement) et pour $n = 3$ (Karpenko [**111**]).

E.11.H. Compléments sur le motif initial. — Soit X une quadrique anisotrope. La proposition E.11.7 montre que les termes de $\Lambda(N_0(X))$ contrôlent dans une certaine mesure quels motifs supérieurs interviennent dans le théorème E.11.20, et présentent donc une interaction avec la suite de déploiement de X. Vishik a explicité cette observation dans un certain nombre de théorèmes.

E.11.34. Notation. — Gardons les notations du théorème E.11.20. Soit $r \in]1, h]$. On note

$$\Lambda_r(X) = \{n \in [I_r, I_{r+1}[\mid L^n \in \Lambda(N_0(X))\}.$$

(Vishik emploie le terme *r-th shell* pour désigner l'ensemble $[I_r, I_{r+1}[$.)

E.11.35. Théorème

a) *Soit $r \in]1, h]$. Si $i_r < i_1$, alors $\Lambda_r(X) = \emptyset$.*
b) *Si i_2 n'est pas divisible par i_1, alors $\Lambda_2(X) = \emptyset$.*

E.11.36. Théorème. — *Supposons que $\Lambda_r(X) = \emptyset$ pour tout $r > 0$. Alors $N_0(X)$ est binaire.*

E.11.37. Théorème. — *Supposons que $h(X_1) \simeq \bigoplus_{l=0}^{i_2-1} N_0(X_1)(l)$ (on pourrait dire que $h(X_1)$ est* engendré *par $N_0(X_1)$). Alors soit $h(X) \simeq \bigoplus_{l=0}^{i_1-1} N_0(X)(l)$, soit $N_0(X)$ est binaire (les deux cas étant possibles simultanément).*

Ce sont respectivement les théorèmes 7.7, 7.8 et 7.9 de [**213**] : ils se démontrent par des arguments de comptage. Nous renvoyons à [**213**, §7] pour les démonstrations, ou laissons au lecteur le plaisir de les reconstituer à partir des résultats exposés précédemment. Nous leur ajoutons :

E.11.38. Théorème. — *Supposons que, pour $r \in [1, h]$, il existe un facteur direct indécomposable N de $h(X)$ tel que $a(N) \in [I_r, I_{r+1}[$. Alors tous les $N_0(X_r)$ sont binaires.*

La démonstration est du même tonneau.

À tous ces résultats on peut bien sûr ajouter ceux sur la taille des motifs supérieurs (théorème E.11.18) et d'un motif binaire (théorème E.11.31). Dans [**213**, §7], Vishik utilise ceci en conjonction avec des théorèmes de structure d'autres auteurs pour déterminer toutes les suites de déploiement possibles pour les formes de dimension paire ≤ 12 ou impaire ≤ 21. (Hoffmann [**73**] avait auparavant traité le cas de toutes les formes de dimension ≤ 10.)

E.12. Quelques démonstrations

E.12.A. Démonstration du théorème E.8.2. — Cette démonstration n'utilise pas les opérations de Steenrod ni la théorie de Vishik ; nous allons la simplifier très légèrement en utilisant cette théorie, ce qui nous permet de considérer le corollaire

E.8.4 comme connu, cf. remarque juste avant le corollaire E.11.19, ainsi que ce dernier énoncé. Le corollaire E.8.4 montre que l'énoncé du théorème E.8.2 est stablement birationnel en X, et la réciproque du lemme E.6.5 nous réduit alors au cas où $i_1(X) = 1$, ce que font Karpenko et Merkurjev plus élémentairement. Ils démontrent alors (1) et (2) simultanément par double récurrence sur $n = \dim X + \dim Y$, le cas $n = 0$ étant trivial.

Soit $\alpha \in \mathrm{CH}_d(X \times Y)$ la correspondance donnée par le graphe Z de l'application rationnelle $X \rightsquigarrow Y$ déduite d'un point fermé de $Y_{F(X)}$ de degré impair : alors $\mu(\alpha)$ est impair.

Supposons d'abord $\dim X = \dim Y =: d$ et démontrons (2) : nous allons en fait montrer que $\mu(\alpha^t)$ est impair. Supposons le contraire, et soit $x \in X$ un point de degré 2 : quitte à modifier α par un multiple de $x \times Y$, on peut alors supposer que $\mu(\alpha^t) = 0$. Comme $\deg : \mathrm{CH}_0(X_{F(Y)}) \to \mathbb{Z}$ est injectif (théorème E.3.2), cela implique que α provient d'une correspondance $\alpha' \in \mathrm{CH}_d(X \times Y')$ avec Y' un fermé propre de Y, et $\mu(\alpha') = \mu(\alpha)$ est impair. Choisissant un cycle représentant α', on peut supposer ce cycle irréductible et donc aussi Y'. Mais $\dim Y' < \dim Y = \dim X$, ce qui contredit (1) par récurrence sur n.

Cette partie de la démonstration utilise seulement le fait que X est une quadrique, mais pas encore l'hypothèse $i_1(X) = 1$; elle va intervenir maintenant.

Démontrons maintenant (1). Supposons au contraire que $\dim Y < \dim X$. Karpenko et Merkurjev se ramènent d'abord au cas où $Z \to Y$ est surjectif en remplaçant Y par l'image de Z. Leur stratégie est alors la suivante :

(i) Produire une correspondance $\gamma : Y \to X$ de multiplicité impaire.
(ii) À l'aide de α et γ, fabriquer une correspondance $\delta : X \to X$ telle que $\mu(\delta)$ soit impaire mais $\mu(\delta^t) = 0$, ce qui contredira le corollaire E.11.19.

Pour (i), ils font intervenir une astuce : quitte à faire une extension transcendante pure, ce qui ne change pas la situation, on peut supposer que X contient une sous-quadrique X' de même dimension que Y et vérifiant encore $i_1(X) = 1$ (cette construction est due à Izhboldin ; nous y avons fait allusion au §E.11.D). Si $\iota : X' \to X$ est l'immersion fermée correspondante, ils prennent

$$\gamma = \iota_* \iota^*(\alpha^t)$$

qui est bien de multiplicité impaire grâce à (2), par récurrence.

Pour (ii), comme dans la démonstration de (2) on peut « extraire »de γ une correspondance γ' de support T irréductible, tel que la projection $T \to Y$ soit surjective de degré générique impair. Choisissons maintenant une variété propre S munie de morphismes $S \to T, S \to Z$ génériquement finis, le second étant de degré générique impair (prendre pour S une composante irréductible convenable de $T \times_Y Z$). Les deux projections (passant par Z et par T) $S \to X$ fournissent la correspondance δ cherchée (on a $\mu(\delta^t) = 0$ parce que γ n'est pas dominante).

(Comme ils le remarquent, si Y est lisse il suffit de prendre la composée $\gamma \circ \alpha$; on s'en tire dans le cas général en approximant cette construction, parce que le problème est birationnel.)

E.12.B. Démonstration du théorème E.8.5. — Cette démonstration utilise les opérations de Steenrod (plus précisément une opération) et, implicitement, la théorie de Vishik, mais Karpenko exprime sa démonstration en termes de cycles algébriques sans parler de motifs. Nous allons la résumer. Cela donnera une idée de sa démonstration du théorème E.8.6, qui est de la même eau mais en plus compliqué.

Karpenko raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une quadrique anisotrope X de dimension d telle que $i_1 := i_1(X) > 2^r$, où $r = v_2(d - i_1 + 2)$. Quitte à prendre une section hyperplane itérée, on peut supposer $i_1 = 2^r + 1$ sans changer $d - i_1$ (réciproque du lemme E.6.5). En particulier, on remarque que d est *impair.*

Posons

$$e^i = \begin{cases} h^i & \text{si } i < d/2 \\ l_{d-i} & \text{si } i > d/2 \end{cases}$$

cf. (E.10.10). Dans $\mathrm{CH}^{d-2^r}(\bar{X} \times \bar{X})/2$, tout cycle α s'écrit

$$\alpha = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i e^i \times e^{d-2^r-i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{F}_2.$$

Karpenko exhibe un cycle α, défini sur F, tel que $\alpha_{d-2^r} = 1$: pour cela il prend le même cycle que Vishik dans la démonstration du théorème E.11.13, à savoir l'adhérence dans $X \times X$ d'un sous-espace projectif de dimension 2^r de $X_{F(X)}$. Observant que $e^i \times e^{d-2^r-i} = h^i \times h^{d-2^r-i}$ est défini sur F pour $d/2 - 2^r < i < d/2$, il modifie α de façon à assurer $\alpha_i = 0$ pour ces valeurs de i.

Comme $2^r < i_1 \leq d/2$, e^{2^r} est défini sur F. Le cycle $\beta = \alpha \cdot (e^0 \times e^{2^r})$ s'écrit $\sum \beta_i e^i \times e^{d-i}$, avec $\beta_i = \alpha_i$ pour $i \in [0, d-2^r]$: ceci résulte de la normalisation ci-dessus et des formules (E.10.11). Considérant maintenant β comme une correspondance de X vers lui-même, les théorèmes E.11.13 et E.11.18 impliquent

(E.12.1) $$\beta_i = \beta_{d-i_1+1+i} = \beta_{d-2^r+i} \text{ pour } i \in [0, 2^r].$$

Comme on a évidemment $\beta_i = 0$ pour $i \in [d - 2^r + 1, d]$, (E.12.1) implique que $\beta_i = 0$ pour $i \in [1, 2^r]$, et donc que

(E.12.2) $$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{2^r} = 0$$

(remarquer que $2^r \leq d - 2^r$).

Karpenko considère maintenant la correspondance de degré 0 $\gamma = S^{2^r}(\alpha)$. Il va obtenir une contradiction en montrant par un calcul que (avec des notations analogues aux précédentes) $\gamma_d = 0$, et par un autre calcul que $\gamma_d = 1$.

Pour le premier calcul, en réappliquant (E.12.1), il suffit de montrer que $\gamma_{2^r} = 0$: mais cela découle trivialement de (E.12.2) en appliquant simplement les propriétés (2) (formule de Cartan), (3) (pour $n = 0$) et (4) des opérations de Steenrod (§E.10.G). Pour le second calcul, l'égalité $\alpha_{d-2^r} = 1$ (qui n'a pas encore été utilisée !) implique que $S^{2^r}(e^{d-2^r} \times e^0) = \gamma_d(e^d \times e^0)$, et donc que $S^{2^r}(e^{d-2^r}) = \gamma_d e^d$ ou encore $S^{2^r}(l_{2^r}) = \gamma_d l_0$. Mais en appliquant (E.10.13), on obtient

$$S^{2^d}(l_{2^r}) = \binom{d-2^r+1}{2^r} l_0$$

et $\binom{d-2^r+1}{2^r}$ est impair. $\square$

APPENDICE F

SOLUTION DE CERTAINS EXERCICES

Chapitre 1

Exercice 1.6.1. — Soit $N = |F^*/F^{*2}|$, et soit φ une $N+1$-forme de Pfister. On a $\varphi \simeq \langle\langle a, a, \dots \rangle\rangle$ pour un a convenable. Comme $-1 \in F^{*2}$, $\langle\langle a, a\rangle\rangle \simeq \langle\langle a, -a\rangle\rangle$ est isotrope, donc hyperbolique. Donc $\varphi \sim 0$ et $I^{N+1}F = 0$. Comme $I^nF/I^{n+1}F$ est un quotient de $(F^*/F^{*2})^{\otimes n}$ pour tout n, ce quotient est fini pour tout n et donc $W(F)$ est fini.

Si l'on retire l'hypothèse $-1 \in F^{*2}$, le résultat n'est plus vrai en général : on a $W(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$.

Chapitre 2

Exercice 2.5.2

a) $a \in D^2(q) \Leftrightarrow \exists\, b, c \in D(q) : a = b/c \Leftrightarrow D(q) \cap D(aq) \neq \emptyset \Leftrightarrow q \perp -aq$ est isotrope.

b) C'est évident par exemple en utilisant a).

c) La première inclusion est claire en utilisant a), puisque $a \in G(q) \Leftrightarrow q \perp -aq$ est hyperbolique. La deuxième est également immédiate en utilisant a).

d) C'est évident puisque $D(q) \subset D(q')$.

e) Si q est une forme de Pfister, on a $G(q) = D(q)$, d'où $G(q) = D^2(q)$. D'après b), cela s'étend au cas où q est semblable à une forme de Pfister.

Réciproquement, supposons que $G(q_K) = D^2(q_K)$ pour toute extension K/F. Quitte à multiplier q par un scalaire, on peut supposer que $1 \in D(q)$; alors $D(q_K) \subset D^2(q_K)$ pour toute extension K/F. On a donc $D(q_K) \subset G(q_K)$, d'où $D(q_K) = G(q_K)$ pour tout K/F. Cela implique que q est une forme de Pfister.

f) On a $G(q) \subset D^2(q)$ d'après c), $D^2(q) \subset D^2(\lambda\varphi)$ pour $\lambda \in F^*$ convenable d'après d), $D^2(\lambda\varphi) = D^2(\varphi)$ d'après b) et $D^2(\varphi) = G(\varphi)$ d'après e).

g) D'après d), on a $D^2(q) \subset D^2(\varphi)$. Réciproquement, si $a \in D^2(\varphi)$, $\varphi \perp -a\varphi$ est isotrope d'après a), donc hyperbolique puisque c'est une forme de Pfister. Soit q' la forme complémentaire de q. On a

$$q \perp -aq \sim aq' \perp -q'.$$

Comme $\dim q' < \dim q$, cela implique que $q \perp -aq$ est isotrope, donc que $a \in D^2(q)$. La deuxième affirmation résulte de e).

h) Soit q anisotrope de dimension 3 : elle est donc voisine d'une 2-forme de Pfister φ. Soit q' sa forme complémentaire. Comme $G(q) \subset G(\varphi)$ d'après f), on a $G(q) \subset G(q')$. Mais $\dim q' = 1$, d'où $G(q') = F^{*2}$ et donc $G(q) = F^{*2}$. D'autre part, $D^2(q) = D^2(\varphi) = D(\varphi)$, qui est en général différent de F^{*2} : si $\varphi = \langle\langle a, b\rangle\rangle$, alors $-a, -b \in D(\varphi)$. Si par exemple $F = k(a, b)$ où a et b sont des indéterminées sur k, on a évidemment $-a, -b \notin F^{*2}$.

Chapitre 3

Exercice 3.4.1. — Par hypothèse, $\dim_{\mathrm{an}} \varphi_{F(\psi)} < 2^n$, donc par le Hauptsatz (théorème 3.3.1) $\varphi_{F(\psi)} \sim 0$; par conséquent, $\varphi \simeq \psi \otimes \tau$ pour un τ convenable (corollaire 3.2.5). On a $\dim \tau < 2^{n-l} + 1$, donc $\dim \tau \leq 2^{n-l}$, $\dim \varphi \leq 2^n$ et $\varphi \in GP_n(F)$ (corollaire 4.3.7). On sait qu'alors on peut choisir $\tau \in GP_{n-l}(F)$ (proposition 2.4.11).

Exercice 3.4.2. — On a évidemment $q' \sim \varphi' \perp \eta'$. Si $q' \perp -\varphi'$ est anisotrope, on a $\eta' \simeq q' \perp -\varphi'$. Supposons $q' \perp -\varphi'$ isotrope. On a $q'_{K(\varphi)} \sim 0$; si φ_K est isotrope, cela implique que $q' = 0$ (lemme 2.4.1 et proposition 3.1.1 b)), d'où $\eta' \simeq -\varphi' = q' \perp -\varphi'$. Si φ_K est anisotrope, on a $\varphi' = \varphi$; comme $D(q') \cap D(\varphi') \neq \emptyset$, par le théorème de la sous-forme 3.2.4 il existe ρ tel que $q' \simeq \varphi' \perp \rho$. Mais alors nécessairement $\rho \simeq \eta'$ et donc $q' \simeq \varphi' \perp \eta'$.

Chapitre 4

Exercice 4.5.1. — Soient $F_r = F(u_n, \sqrt{-u_n u_{n-1}}, \dots, u_{n-2r+2}, \sqrt{-u_{n-2r+2}u_{n-2r+1}})$ et $L_r = F_r(u_1, \dots, u_{n-2r})$. On a

$$q_{L_r} \sim \langle u_1, \dots, u_{n-2r}\rangle$$

donc pour voir que $i(q_{L_r}) = 2r$, il suffit de voir que $\langle u_1, \dots, u_{n-2r}\rangle$ est anisotrope sur L_r. Cela se démontre par récurrence sur r comme dans le cas d'une forme de Pfister générique. On sait que $h(q) \leq [n/2]$. Comme $i(q_L)$ peut prendre toutes les valeurs paires entre 0 et $2[n/2]$, $h(q)$ vaut nécessairement $[n/2]$.

Exercice 4.5.2

a) Si $m = n$, alors $\psi \in GP_n(F)$ d'après le corollaire 4.3.7.

b) Supposons $m = n - 1$. Alors $\dim \psi \geq 2^{n-1}$. Soient L le corps dominant de ψ et τ sa forme dominante. D'après le théorème 4.4.1, π_L est semblable à une sous-forme de τ, soit $\tau \simeq a\psi_L \perp \rho$. On a $a\psi_L \equiv -\rho \pmod{J_n(L)}$, donc $\deg(\rho) = \deg(\psi_L) \geq \deg(\psi) = n-1$. Par conséquent $\dim \rho \geq 2^{n-1}$, d'où $\dim \psi = \dim \psi_L = 2^{n-1}$ et $\psi \in GP_{n-1}(F)$.

Exercice 4.5.3. — Si $n = \deg q + 1$, l'exercice 4.5.2 implique que $q \in GP(F)$, donc que $q \in P(F)$ puisque q représente 1. Mais alors $a \in D(q) = G(q)$, contradiction. Supposons maintenant $n > \deg q + 1$. Par le théorème 3.2.4, on peut écrire

$$q \simeq \varphi \perp \rho$$
$$aq \simeq \varphi \perp \rho'$$

avec ρ, ρ' convenables. Alors $\langle 1, -a\rangle \otimes q \sim \rho \perp -\rho'$, ce qui donne

$$2^{\deg q + 2} \leq \dim_{\mathrm{an}}(\langle 1, -a\rangle \otimes q) \leq 2(\dim q - \dim \varphi)$$

ou $2^{\deg q+1} \leq \dim q - \dim \varphi$. En additionnant cette inégalité avec celle de l'hypothèse, on obtient $2^{\deg q} < \dim \varphi$. Mais alors $q_{F(\varphi)}$ ne peut pas être hyperbolique, d'après le théorème 4.4.1.

Exercice 4.5.4

a) Soit $q_1 = (q_{F(q)})_{\mathrm{an}}$. Alors $(F(q), \varphi_{F(q)}, q_1)$ vérifie les hypothèses de l'exercice, et $N(q_1) < N(q)$. Par minimalité, $N(q_1) = 0$, donc $q_1 \in GP(F)$ et $h(q) \leq 2$. Comme on suppose que $N(q) > 0$, on a $h(q) = 2$.

b) Soit $a \in D(q)$. Comme dans l'exercice 4.5.3, écrivons $q \simeq \varphi \perp \rho$, $aq \simeq \varphi \perp \rho_1$, d'où $\langle 1, -a\rangle \otimes q \sim \rho \perp -\rho_1$. On a $(\rho \perp -\rho_1)_{F(q)} \sim 0$ et

$$\begin{aligned} N(\rho \perp -\rho_1) &= \dim \rho + \dim \rho_1 - 2^{\deg(<1,-a>\otimes q)} \\ &\leq 2(\dim q - \dim \varphi) - 2^{\deg(q)+1} = 2N(q) - 2\dim \varphi < 2 \dim \varphi \end{aligned}$$

d'où $N(\rho \perp -\rho_1) = 0$ par minimalité. Ainsi, $\sigma = \rho \perp -\rho_1 \in GP(F)$.

c) Pour toute forme ψ sur F, notons $\psi' = (\psi_K)_{\mathrm{an}}$. En particulier, $q' = q_1$. Par l'exercice 3.4.2, on a soit $q' \simeq \varphi' \perp \rho'$, soit $\rho' \simeq q' \perp -\varphi'$. Mais $q' \neq 0$ et $q'_{K(\varphi)} \sim 0$ implique que $\varphi' = \varphi_K$. L'isométrie $\rho' \simeq q' \perp -\varphi'$ impliquerait donc $2^{\deg q} + \dim \varphi \leq \dim \rho = \dim q - \dim \varphi$, soit $N(q) \geq 2 \dim \varphi$, contrairement à l'hypothèse. Par conséquent, on a $q' \simeq \varphi' \perp \rho'$, et de même $aq' \simeq \varphi' \perp \rho'_1$, d'où

$$\dim_{\mathrm{an}}(< 1, -a > \otimes q') \leq \dim \rho' + \dim \rho'_1 = 2(2^{\deg q} - \dim \varphi) < 2^{\deg(q)+1}$$

donc $< 1, -a > \otimes q' \sim 0$ et $aq_K \simeq q_K$. En appliquant l'exercice 4.5.3, il en résulte que $aq \simeq q$, c'est-à-dire que $a \in G(q)$.

d) Soit $K = F(T_1, \dots, T_r, U_1, \dots, U_r)$, avec $r = \dim q$. Alors (K, φ_K, q_K) vérifie les hypothèses de l'exercice. Par c), on a donc $G(q_K) = D(q_K)$. En particulier, q est multiplicative (définition 2.4.9). Mais alors $q \in P(F)$ (théorème 2.4.10), contradiction.

Chapitre 5

Exercice 5.8.3. — Récurrence sur s. Le cas $s = 1$ est connu : dans ce cas, on a

$$q \perp -q_1 \simeq a\rho$$

pour un $a \in F^*$ convenable. Supposons $s > 1$. On distingue deux cas :

a) Si s est impair, $s - 1$ est pair. On applique la récurrence à q_1, dont q_s est la descente de la $(s-1)$-ième forme noyau. On obtient que $q_1 \simeq \varphi_1 \perp (-1)^{s-1} q_s$, avec φ_1 excellente. Par conséquent

$$q \perp (-1)^s q_s \perp -\varphi_1 \simeq a\rho$$

et $q \perp (-1)^s q_s$ est bien excellente et voisine de ρ.

b) Si s est pair, $s-1$ est impair, donc $q' = q_1 \perp (-1)^{s-1} q_s$ est excellente et voisine de ρ_1. Comme $\rho_1 \leq \rho$, il existe $b \in F^*$ et φ tels que $-q' \perp \varphi \simeq b\rho$, soit

$$(-1)^s q_s \perp \varphi \perp -q_1 \simeq b\rho.$$

On en déduit que $\langle b, -a\rangle \otimes \rho \sim (-1)^s q_s \perp \varphi \perp -q$ est isotrope, donc hyperbolique, et donc que $q \simeq (-1)^s q_s \perp \varphi$.

On a $\dim q' \leq \dim \rho_1 \leq \frac{1}{2} \dim \rho$, donc $\dim \varphi \geq \frac{1}{2} \dim \rho$. Supposons $\dim \varphi > \frac{1}{2} \dim \rho$. Alors φ est voisine de ρ, de forme complémentaire q' qui est excellente, et φ est excellente. Supposons maintenant $\dim \varphi = \frac{1}{2} \dim \rho$. Cette condition est équivalente à $\dim q' = \dim \rho_1 = \frac{1}{2} \dim \rho$. La première égalité a lieu si et seulement si $q' = q_1 \perp (-1)^{s-1} q_s$ est semblable à ρ_1 ; ceci se produit si et seulement si $s = 2$. Dans ce cas, φ est semblable à ρ_1, donc est encore excellente.

Exercice 5.8.4

a) Si q est voisine de la forme de Pfister π, on a $q \perp q' \simeq a\pi$ avec $q \in F^*$ et $\dim q' = 2^n - m$. Alors $(q_{F(q)})_{\mathrm{an}} \simeq q'_{F(q)}$ (théorème 5.4.3), donc $i(q_{F(q)}) = m$.

b) Si $\dim q = 5$ (plus généralement si $\dim q = 2^n + 1$), q a déploiement maximal d'après le corollaire 5.2.8. Supposons que q soit une sous-forme d'une forme d'Albert anisotrope γ et voisine d'une 3-forme de Pfister φ. Il existe alors $a \in F^*$ tel que

$$\dim_{\mathrm{an}}(a\varphi \perp -\gamma) \leq 8 + 6 - 2 \times 5 = 4.$$

Comme $a\varphi \perp -\gamma \in I^2F$, $\tau = (a\varphi \perp -\gamma)_{\mathrm{an}}$ est semblable à une 2-forme de Pfister. La forme τ est anisotrope, sans quoi φ serait isotrope, donc hyperbolique, et q serait isotrope. Mais

$$a\varphi_{F(\tau)} \sim \gamma_{F(\tau)}$$

donc $\varphi_{F(\tau)}$ est isotrope, donc hyperbolique et $\gamma_{F(\tau)} \sim 0$. D'après le corollaire 3.2.5, τ divise γ, ce qui est absurde pour des raisons de dimension.

c) On a $q' \approx q$ d'après le lemme 5.1.4 c) ; en particulier, q' est voisine si et seulement si q l'est (théorème 5.3.4). De plus, $i(q'_{F(q')}) = i(q'_{F(q)})$. Sur $F(q)$, on a $q \simeq q_1 \perp m\mathbb{H}$, avec $\dim q_1 = 2^n - m$, et $q \simeq q' \perp q''$ avec $\dim q'' = m - m'$. D'où

$$q' \sim q_1 \perp -q''$$

avec $\dim(q_1 \perp -q'') = 2^n - m'$. Par conséquent, $i(q'_{F(q)}) \geq m'$, d'où $i(q'_{F(q)}) = m'$ par le corollaire 5.2.8.

Exercice 5.8.5

a) Soient φ_1, φ_2 deux n-formes de Pfister anisotropes contenant une sous-forme semblable à q. Il existe donc $a_1, a_2 \in F^*$ tels que

$$i(a_1\varphi_1 \perp -a_2\varphi_2) > 2^{n-2}$$

d'où $i(\varphi_1 \perp -\varphi_2) \geq 2^{n-1}$, et $(\varphi_1 \perp -\varphi_2)_{\rm an} \in GP_n(F)$ par le théorème 2.3.2.

Soit φ la n-forme de Pfister associée. Il reste à voir que, si φ est anisotrope, elle contient une sous-forme semblable à q. Mais $\varphi \sim b(\varphi_1 \perp -\varphi_2)$ pour un $b \in F^*$, d'où

$$\varphi_{F(q)} \sim b(\varphi_1)_{F(q)} \perp -b(\varphi_2)_{F(q)} \sim 0.$$

La conclusion résulte alors du théorème d'Arason-Cassels-Pfister.

b) Soient $E = F(T_1, \ldots, T_n)$ et $\pi = \langle\langle T_1, \ldots, T_n \rangle\rangle$. Par le lemme 5.2.6 a), π est anisotrope sur E, et q_E est également anisotrope puisque E/F est transcendante pure. Considérons la forme $\tilde{q} = \pi \perp -q_E$.

Soit $(E_0, \tilde{q}_0), (E_1, \tilde{q}_1), \ldots, (E_h, \tilde{q}_h)$ la tour de déploiement générique de $\tilde{q}$. L'hypothèse sur $\dim q$ montre que les conditions du corollaire 5.2.4 sont vérifiées. Il existe donc $i < h$ tel que π_{E_i} soit anisotrope, $(q_{E_i})_{\rm an} \leq \pi_{E_i}$ et que $E_i(\pi)/E(\pi)$ soit transcendante pure.

Par le lemme 5.2.6 b), $E(\pi)/F$ est transcendante pure, donc $E_i(\pi)/F$ est transcendante pure. Il en résulte que $q_{E_i(\pi)}$ est anisotrope, et donc que q_{E_i} est anisotrope. On peut donc choisir $K = E_i$.

c) Écrivons $q \simeq q' \perp \langle a \rangle$, avec $\dim q' = 2^n$. Soient K, π comme dans b) : on a $\pi \simeq q'_K \perp q''$. Soit $\varphi = q'' \perp \langle -a \rangle$: alors $\varphi_{K(\varphi)}$ est isotrope, donc $a \in D(q''_{K(\varphi)})$ et $q_{K(\varphi)} \leq \pi_{K(\varphi)}$.

Il reste à montrer que $\pi_{K(\varphi)}$ est anisotrope. Supposons le contraire. Alors $\pi_{K(\varphi)} \sim 0$, d'où

– φ est une voisine de π (Arason-Cassels-Pfister) ;
– $q_{K(\varphi)}$ est isotrope.

Mais alors $q_{K(\pi)}$ est également isotrope ; c'est une contradiction, puisque $K(\pi)/F$ est transcendante pure.

d) Si les conditions de l'énoncé sont remplies, alors q a évidemment déploiement maximal puisque $i_1(q) = i_1(q_K) = \dim q - 2^{n-1}$. Montrons la réciproque. Soit q' une sous-forme de q de dimension 2^n+1. En reprenant la construction de c) (appliquée à q'), on trouve une extension K/F et une n-forme de Pfister π anisotrope sur K telles que $K(\pi)/F$ soit transcendante pure et que $q'_{K(\varphi)}$ soit voisine anisotrope de $\pi_{K(\varphi)}$, où φ est une K-forme de dimension 2^n+1 convenable. Posons $L = K(\varphi)$. D'après l'exercice 5.8.4 c), $q \approx q'$, donc $q_L \approx q'_L$ et q_L est également voisine de π_L (théorème 5.3.4).

Il reste à voir que $h(q_L) = h(q)$. On a $h(q_K) = h(q)$ puisque K/F est contenue dans l'extension transcendante pure $K(\pi)/F$. Soit (F_i, q_i) la tour de déploiement générique de q, et soient pour tout i $K_i = KF_i$, $L_i = LF_i$. Pour tout i, $(q_i)_{K_i}$ est anisotrope. On sait que q_L est anisotrope, puisque q'_L l'est. Supposons $i \geq 1$. On a

– $\dim q_i < 2^n$;
– $L_i = K_i(\varphi)$.

D'après le théorème de Hoffmann, q_i reste donc anisotrope sur L_i, puisque $\dim \varphi > 2^n$; cela implique $h(q_L) \geq h(q)$, donc $h(q_L) = h(q)$.

Chapitre 8

Exercice 8.3.1. — Soit γ une forme d'Albert, et supposons que $\gamma \simeq \varphi \perp \tau$ avec $\dim \varphi = 4$ et $d_\pm \varphi = 1$. Alors $\dim \tau = 2$ et $d_\pm \tau = 1$, donc τ est isotrope, ainsi que γ.

Exercice 8.3.2. — Soit γ une forme d'Albert sur F, et soient q_1, q_2 deux sous-formes de γ de dimension 5, soit $\gamma \simeq q_1 \perp \langle d_1 \rangle \simeq q_2 \perp \langle d_2 \rangle$ pour d_1, d_2 convenables. On a alors

$$d_1 q_1 \perp -d_2 q_2 \sim \langle d_1, -d_2 \rangle \otimes \gamma \sim 0$$

puisque $\langle d_1, -d_2 \rangle \otimes \gamma \in I^3 F$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Ahmad – « On quadratic forms isotropic over inseparable quadratic extensions », *Arch. Math. (Basel)* **63** (1994), p. 23–29.

[2] ______, « The algebraic closure in function fields of quadratic forms in characteristic 2 », *Bull. Austral. Math. Soc.* **55** (1997), p. 293–297.

[3] ______, « Witt kernels of bi-quadratic extensions in characteristic 2 », *Bull. Austral. Math. Soc.* **69** (2004), p. 433–440.

[4] S.A. Amitsur, L.H. Rowen & J.-P. Tignol – « Division algebras of degree 4 and 8 with involution », *Israel J. Math.* **33** (1979), p. 133–148.

[5] Y. André – « Motifs de dimension finie (d'après Kimura, O'Sullivan...) », Astérisque, vol. 299, Soc. Math. France, 2005, Séminaire Bourbaki, exp. 929, p. 115–145.

[6] Y. André & B. Kahn – « Nilpotence, radicaux et structures monoïdales (avec un appendice de P. O'Sullivan) », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **108** (2002), p. 107–291.

[7] ______, « Erratum: Nilpotence, radicaux et structures monoïdales », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **113** (2005), p. 125–128.

[8] J.Kr. Arason – « Excellence of $F(\pi)/F$ for 2-fold Pfister forms », appendice II de [**50**].

[9] ______, « Cohomologische Invarianten quadratischer Formen », *J. Algebra* **36** (1975), p. 448–491.

[10] ______, « Wittring und Galoiscohomologie bei Charakteristik 2 », *J. Reine Angew. Math.* **307-308** (1979), p. 247–256.

[11] ______, « A proof of Merkurjev's theorem », *Quadratic and Hermitian forms (Hamilton, Ont., 1983)*, CMS Conf. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., 1984, p. 121–130.

[12] J.Kr. Arason & M. Knebusch – « Über die Grade quadratischer Formen », *Math. Ann.* **234** (1978), p. 167–192.

[13] J.Kr. Arason & A. Pfister – « Beweis des Krullschen Durchschnittsatzes für den Wittring », *Invent. Math.* **12** (1971), p. 173–176.

[14] R. Aravire & R. Baeza – « A note on generic splitting of quadratic forms », *Comm. Algebra* **27** (1999), p. 3473–3477.

[15] ______, « Linkage of fields in characteristic 2 », *Comm. Algebra* **31** (2003), p. 463–473.

[16] ______, « The behaviour of quadratic and differential forms under function field extensions in characteristic 2 », *J. Algebra* **259** (2003), p. 361–414.

[17] ______, « Quadratic and differentials forms over function fields of Pfister quadrics in characteristic 2 », prépublication, 2005.

[18] R. Aravire & B. Jacob – « The Milnor sequence for $W_q(F(x))$ in characteristic 2 when F is perfect », Algebraic and arithmetic theory of quadratic forms, Contemp. Math., vol. 344, AMS, 2004, p. 1–17.

[19] C. Arf – « Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern de Characteristik 2 (Teil I) », *J. Reine Angew. Math.* **183** (1941), p. 148–167.

[20] E. Artin, C. Nesbitt & R. Thrall – *Rings with minimum condition*, Univ. Michigan Press, 1948.

[21] R. Baeza – « Ein Teilformensatz für quadratische Formen in Characteristic 2 », *Math. Z.* **135** (1974), p. 175–184.

[22] ______, *Quadratic forms over semilocal rings*, Lecture Notes in Math., vol. 655, Springer, 1978.

[23] ______, « The norm theorem for quadratic forms over a field of characteristic 2 », *Comm. Algebra* **18** (1990), p. 1337–1348.

[24] ______, « Some algebraic aspects of quadratic forms over field of characteristic two », *Doc. Math.* extra vol., *Quadratic forms LSU* (2001), p. 49–63.

[25] P. Balmer – « Witt cohomology, Mayer-Vietoris, Homotopy invariance and the Gersten Conjecture », *K-Theory* **23** (2001), p. 15–30.

[26] ______, « Witt groups », Handbook of K-theory (E. Friedlander & D. Grayson, éds.), vol. 2, Springer, 2007, p. 539–576.

[27] P. Balmer & C. Walter – « A Gersten-Witt spectral sequence for regular schemes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **35** (2002), p. 127–152.

[28] ______, « A Gersten-Witt spectral sequence for regular schemes », *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **35** (2002), p. 127–152.

[29] H. Bass & J. Tate – « The Milnor ring of a global field », Algebraic K-theory, II : "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Seattle, Wash., Battelle Memorial Inst., 1972), Lecture Notes in Math., Springer, 1973, p. 349–446.

[30] A. Blanchard – *Les corps non commutatifs*, P.U.F., 1972.

[31] A. Borel – *Linear algebraic groups*, 2ème éd., Springer, 1991.

[32] N. Bourbaki – *Éléments de Mathématiques, Algèbre*, Hermann, 1958.

[33] ———, *Éléments de Mathématiques, Topologie générale*, Hermann, 1960.

[34] ———, *Éléments de Mathématiques, Algèbre commutative*, Hermann, 1961.

[35] P. Brosnan – « A short proof of Rost nilpotence via refined correspondences », *Doc. Math.* **8** (2003), p. 69–78.

[36] ———, « Steenrod operations in Chow theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), p. 1869–1903.

[37] H. Cartan & S. Eilenberg – *Homological algebra*, Princeton Ser. Appl. Math., vol. 19, Princeton Univ. Press, 1956.

[38] P. Cartier – « Questions de rationalité en géométrie algébrique », *Bull. Soc. Math. France* **86** (1958), p. 177–251.

[39] J.W.S. Cassels – « On the representation of rational functions as sums of squares », *Acta Arith.* **9** (1964), p. 79–82.

[40] ———, *Rational quadratic forms*, London Mathematical Society Monographs, vol. 13, Academic Press, 1978.

[41] V. Chernousov, S. Gille & A. Merkurjev – « Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties », *Duke Math. J.* **126** (2005), p. 137–159.

[42] C. Chevalley – « Sur les décompositions cellulaires des espaces G/B », Algebraic groups and their generalizations: classical methods, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 56, Amer. Math. Soc., 1994, p. 1–23.

[43] J.-L. Colliot-Thélène & A.N. Skorobogatov – « Groupe de Chow des zéro-cycles sur les fibres en quadriques », *K-Theory* **7** (1993), p. 477–500.

[44] J.-L. Colliot-Thélène & R. Sujatha – « Unramified Witt groups of real anisotropic quadrics », *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.2, 1992, p. 127–147.

[45] M. Demazure – « Motifs de variétés algébriques », Lecture Notes on Math., vol. 180, Springer, 1971, Séminaire Bourbaki, exp. 365, p. 19–38.

[46] L.E. Dickson – « On quadratic forms in a general field », *Bull. Amer. Math. Soc.* **14** (1907), p. 108–115, *Math. papers* IV, Chelsea, 1975, p. 512-519.

[47] D. Edidin & W. Graham – « Equivariant intersection theory », *Invent. Math.* **131** (1998), p. 595–634.

[48] R. Elman, N. Karpenko & A. Merkurjev – *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, à paraître.

[49] R. Elman & T. Lam – « Pfister forms and K-theory of fields », *J. Algebra* **23** (1972), p. 181–213.

[50] R. Elman, T.Y. Lam & A.R. Wadsworth – « Amenable fields and Pfister extensions », *Conference on Quadratic Forms* (Queen's Univ., Kingston, Ont., 1976) (G. Orzech, éd.), Pure Appl. Math., vol. 46, 1977, p. 445–492.

[51] ______, « Pfister Ideals in Witt Rings », *Math. Ann.* **245** (1979), p. 219–245.

[52] ______, « Witt rings and Brauer groups under multiquadratic extensions I », *Amer. J. Math.* **105** (1983), p. 1119–1170.

[53] F. Faivre – « Liaison des formes de Pfister et corps de fonctions de quadriques en caractéristique 2 », Thèse, Université de Franche-Comté, décembre 2006.

[54] R.W. Fitzgerald – « Function fields of quadratic forms », *Math. Z.* **178** (1981), p. 63–76.

[55] ______, « Witt kernels of function fields extensions », *Pacific J. Math.* **109** (1983), p. 89–106.

[56] ______, « Quadratic forms of height two », *Trans. Amer. Math. Soc.* **283** (1984), p. 339–351.

[57] E. Friedlander – « Motivic complexes of Suslin-Voevodsky », Astérisque, vol. 245, Soc. Math. France, 1997, Séminaire Bourbaki, exp. 833, p. 355–378.

[58] W. Fulton – *Intersection theory*, 2ème éd., Springer, 1984.

[59] S. Garibaldi – *Cohomological invariants : exceptional groups and spin groups*, Memoirs of the AMS, Amer. Math. Soc., à paraître.

[60] J. van Geel – « Applications of the Riemann-Roch theorem for curves to quadratic forms and division algebras », prépublication, Univ. catholique de Louvain, 1991.

[61] P. Gille & T. Szamuely – *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 101, Cambridge University Press, 2006.

[62] M. Greenberg – *Lectures on forms in many variables*, Benjamin, 1969.

[63] A. Grothendieck – « Sur quelques points d'algèbre homologique », *Tohoku Math. J.* **9** (1957), p. 119–221.

[64] D.K. Harrison – « A Grothendieck ring of higher degree forms », *J. Algebra* **35** (1975), p. 123–138.

[65] R. Hartshorne – *Algebraic geometry*, Springer, 1977.

[66] D.W. Hoffmann – « On 6-dimensional quadratic forms isotropic over the function field of a quadric », *Comm. Algebra* **22** (1994), p. 1999–2014.

[67] ______, « Isotropy of 5-dimensional quadratic forms over the function field of a quadric », *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.2, Amer. Math. Soc., 1995, p. 217–225.

[68] ______, « Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric », *Math. Z.* **220** (1995), p. 461–476.

[69] ______, « On quadratic forms of height two and a theorem of Wadsworth », *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), p. 3267–3281.

[70] ______, « Twisted Pfister forms », *Doc. Math. J.* **1** (1996), p. 67–102.

[71] ______, « Sur les dimensions des formes quadratiques de hauteur 2 », *C. R. Acad. Sci. Paris, Math.* **324** (1997), p. 11–14.

[72] ______, « On the dimensions of anisotropic forms in I^4 », *Invent. Math.* **131** (1998), no. 1, p. 185–198.

[73] ______, « Splitting patterns and invariants of quadratic forms », *Math. Nachr.* **190** (1998), p. 149–168.

[74] ______, « Diagonal forms of degree p in characteristic p », Algebraic and arithmetic theory of quadratic forms, Contemp. Math., vol. 344, Amer. Math. Soc., 2004, p. 135–183.

[75] ______, « Witt kernels of bilinear forms for algebraic extensions in characteristic 2 », *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), p. 645–652.

[76] D.W. Hoffmann & A. Laghribi – « Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic 2 », *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), p. 4019–4053.

[77] ______, « Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric in characteristic 2 », *J. Algebra* **295** (2006), p. 362–386.

[78] D. Hoffmann & J.-P. Tignol – « On 14-dimensional quadratic forms in i^3, 8-dimensional forms in i^2, and the common value property », *Doc. Math.* **3** (1998), p. 189–214.

[79] A. Huber & B. Kahn – « The slice filtration and mixed Tate motives », *Compos. Math.* **142** (2006), p. 907–936.

[80] J. Hurrelbrink, N. Karpenko & U. Rehmann – « The minimal height of quadratic forms of given dimension », *Arch. Math. (Basel)* **87** (2006), p. 522–529.

[81] J. Hurrelbrink & U. Rehmann – « Splitting patterns of excellent quadratic forms », *J. Reine Angew. Math.* (1993), p. 183–192.

[82] ______, « Splitting patterns of quadratic forms », *Math. Nachr.* **176** (1995), p. 111–127.

[83] O.T. Izhboldin – « On the nonexcellence of fields extensions $F(\pi)/F$ », *Doc. Math. J.* **1** (1996), p. 127–136.

[84] ______, « Motivic equivalence of quadratic forms », *Doc. Math.* **3** (1998), p. 341–351.

[85] ______, « On the isotropy of low-dimensional quadratic forms over the function field of a quadric », *Algebra i Analiz* **12** (2000), p. 106–127 (en russe), traduction anglaise : *St. Petersburg Math. J.*

[86] ______, « Fields of u-invariant 9 », *Ann. of Math. (2)* **154** (2001), p. 529–587.

[87] O.T. Izhboldin & N. Karpenko – « Isotropy of 6-dimensional quadratic forms over function fields of quadrics », *J. Algebra* **209** (1998), p. 65–93.

[88] ______, « Isotropy of 8-dimensional quadratic forms over function fields of quadrics », *Comm. Algebra* **27** (1999), p. 1823–1841.

[89] ______, « Isotropy of virtual Albert forms over function fields of quadrics », *Math. Nachr.* **206** (1999), p. 111–122.

[90] ______, « Some new examples in the theory of quadratic forms », *Math. Z.* **234** (2000), p. 647–695.

[91] O.T. Izhboldin & A. Vishik – « Quadratic forms with absolutely maximal splitting », Quadratic forms and their applications (Dublin, 1999), Contemp. Math., vol. 272, Amer. Math. Soc., 2000, p. 103–125.

[92] W. Jacob & M. Rost – « Degree four cohomological invariants for quadratic forms », *Invent. Math.* **96** (1989), p. 551–570.

[93] N. Jacobson – « Some applications of Jordan norms to involutorial simple associative algebras », *Adv. Math.* **48** (1983), p. 149–165.

[94] U. Jannsen – « Motives, numerical equivalence and semi-simplicity », *Invent. Math.* **107** (1992), p. 447–452.

[95] B. Kahn – « Quelques remarques sur le u-invariant », *Sém. th. Nombres Bordeaux* **2** (1990), p. 155–161.

[96] ______, « The total Stiefel-Whitney class of a regular representation », *J. Algebra* **144** (1991), p. 214–247.

[97] ______, « A descent problem for quadratic forms », *Duke Math. J.* **80** (1995), p. 139–155.

[98] ______, « Lower $\mathcal{H}$-cohomology of higher-dimensional quadrics », *Arch. Math. (Basel)* **65** (1995), p. 244–250.

[99] ______, « Formes quadratiques de hauteur et de degré 2 », *Indag. Math. (N.S.)* **7** (1996), p. 47–66.

[100] ______, « La conjecture de Milnor (d'après V. Voevodsky) », Astérisque, vol. 245, Soc. Math. France, 1997, Séminaire Bourbaki, exp. 834, p. 379–418.

[101] ______, « Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties », *Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997)* (W. Raskind & C. Weibel, éds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., 1999, p. 149–174.

[102] ______, « On "horizontal" invariants associated to quadratic forms », *Algebra and Number theory: Proceedings of the Silver Jubilee Conference* (University of Hyderabad) (R. Tandon, éd.), Hindustan Book Agency, 2005, p. 21–33.

[103] B. Kahn & A. Laghribi – « A second descent problem for quadratic forms », *K-theory* **29** (2003), p. 253–284.

[104] B. Kahn, M. Rost & R. Sujatha – « Unramified cohomology of quadrics, I », *Amer. J. Math.* **120** (1998), p. 841–891.

[105] B. Kahn & R. Sujatha – « Motivic cohomology and unramified cohomology of quadrics », *J. Eur. Math. Soc.* **2** (2000), p. 145–177.

[106] ______, « Unramified cohomology of quadrics, II », *Duke Math. J.* **106** (2001), p. 449–484.

[107] N. Karpenko – « Invariants algébro-géométriques de formes quadratiques », *Algebra i Analiz* **2** (1990), p. 141–162 (en russe), traduction anglaise : *Leningrad Math. J.*

[108] ______, « Torsion in CH^2 of Severi-Brauer varieties and indecomposability of generic algebras », *Manuscripta Math.* **88** (1995), p. 109–117.

[109] ______, « Isotropie d'espaces cellulaires relatifs et de variétés de drapeaux isotropes », *Algebra i Analiz* **12** (2000), p. 3–69 (en russe), traduction anglaise : *St. Petersburg Math. J.*

[110] ______, « On the anisotropy of orthogonal involutions », *J. Ramanujan Math. Soc.* **15** (2000), p. 1–22.

[111] ______, « Characterization of minimal Pfister neighbors by Rost projectors », *J. Pure Appl. Algebra* **160** (2001), p. 195–227.

[112] ______, « On the first Witt index of quadratic forms », *Invent. Math.* **153** (2003), p. 455–462.

[113] ______, « Holes in I^n », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **37** (2004), p. 973–1002.

[114] ______, « A relation between higher Witt indices », Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Vol. XI, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 218, Amer. Math. Soc., 2006, p. 77–86.

[115] N. Karpenko & A. Merkurjev – « Rost projectors and Steenrod operations », *Doc. Math.* **7** (2002), p. 481–493.

[116] ______, « Essential dimension of quadrics », *Invent. Math.* **153** (2003), p. 361–372.

[117] K. Kato – « A generalization of higher class field theory by using K-groups, I », *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **26** (1979), p. 303–376.

[118] ______, « Symmetric bilinear forms, quadratic forms and Milnor's K-theory in characteristic 2 », *Invent. Math.* **66** (1982), p. 493–510.

[119] M. Knebusch – « Spezialisierung von quadratischen und symmetrisch bilinearen Formen », livre en préparation.

[120] ______, « Grothendieck und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen », *Heidelberger Akad. Wiss., Math.-Natur. Kl.* (1969-1970), p. 93–157.

[121] ______, « Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem », *Acta Arith.* **24** (1973), p. 279–299.

[122] ______, « Generic splitting of quadratic forms, I », *Proc. London Math. Soc. (3)* **33** (1976), p. 65–93.

[123] ______, « Generic splitting of quadratic forms, II », *Proc. London Math. Soc. (3)* **34** (1977), p. 1–31.

[124] ______, *Symmetric bilinear forms over algebraic varieties*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, vol. 46, Queen's UniversityPress, 1977.

[125] M. Knebusch & U. Rehmann – « Generic splitting towers and generic splitting preparations of quadratic forms », *Proceedings of the Conference* (University Dublin College), Contemp. Math., vol. 272, 2000, p. 173–199.

[126] M. Knebusch & W. Scharlau – *Algebraic theory of quadratic forms. Generic Methods and Pfister Forms*, DMV Seminar, vol. 1, Birkhäuser, 1980.

[127] M. Knus – *Quadratic forms, Clifford algebras and spinors*, Seminários de Matemática, vol. 1, Universidade Estadual de Campinas, 1988.

[128] ______, *Quadratic and hermitian forms over rings*, Grundl. Math. Wissensch., vol. 294, Springer-Verlag, 1991.

[129] A. Laghribi – « Isotropie de certaines formes quadratiques de dimensions 7 et 8 sur le corps des fonctions d'une quadrique », *Duke Math. J.* **85** (1996), p. 397–410.

[130] ______, « Formes quadratiques en 8 variables dont l'algèbre de Clifford est d'indicen 8 », *K-theory* **12** (1997), p. 371–383.

[131] ______, « Formes quadratiques de dimension 6 », *Math. Nachr.* **204** (1999), p. 125–135.

[132] ______, « Sur le problème de descente des formes quadratiques », *Arch. Math. (Basel)* (1999), p. 18–24.

[133] ______, « Sur les formes quadratiques de hauteur 3 et de degré ≤ 2 », *Doc. Math.* **4** (1999), p. 203–217.

[134] ______, « Certaines formes quadratiques de dimension au plus 6 et corps de fonctions en caractéristique 2 », *Israel J. Math.* **129** (2002), p. 317–362.

[135] ______, « On the generic splitting of quadratic forms in characteristic 2 », *Math. Z.* **240** (2002), p. 711–730.

[136] ______, « », *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **53** (2004), p. 325–336.

[137] ______, « Quasi-hyperbolicity of totally singular quadratic forms », Algebraic and arithmetic theory of quadratic forms, Contemp. Math., vol. 344, Amer. Math. Soc., 2004, p. 237–248.

[138] ______, « Witt kernels of function field extensions in characteristic 2 », *J. Pure Appl. Algebra* **199** (2005), p. 167–182.

[139] ______, « The norm theorem for totally singular quadratic forms », *Rocky Mountain J. Math.* **36** (2006), p. 575–592.

[140] ______, « Witt kernels of quadratic forms for purely inseparable multiquadratic extensions in characteristic 2 », *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), p. 2481–2486.

[141] ______, « Sur le déploiement des formes bilinéaires en caractéristique 2 », *Pacific J. Math.* **232** (2007), p. 207–232.

[142] A. Laghribi & P. Mammone – « Isotropie d'une forme quadratique sur le corps des fonctions d'une quadrique en caractéristique 2 », *Bull. Belg. Math. Soc.* **9** (2002), p. 167–176.

[143] ______, « On the norm theorem for semisingular quadratic forms », *Indag. Math. (N.S.)* **17** (2006), p. 599–610.

[144] T. Lam – *Ten lectures on quadratic forms over fields*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, vol. 46, Queen's UniversityPress, 1977.

[145] T. Lam – « Fields of u-invariant 6 after a. merkurjev », *Ring theory 1989 (Ramat Gan and Jerusalem, 1988/1989)*, Israel Math. Conf. Proc., vol. 1, Weizmann, 1989, p. 12–30.

[146] T. Lam – *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies of Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., 2004.

[147] D.B. Leep – « Function field results », notes manuscrites prises par T.Y. Lam, 1989.

[148] D.W.. Lewis & J. van Geel – « Quadratic forms isotropic over the function field of a conic », *Indag. Math. (N.S.)* **5** (1994), p. 325–339.

[149] F. Loeser – « Cobordisme de variétés algébriques (d'après M. Levine et F. Morel) », Astérisque, vol. 290, Soc. Math. France, 2003, Séminaire Bourbaki, exp. 901, p. 167–192.

[150] F. Lorentz – *Quadratische Formen über Körpern*, Lect. Notes in Math., vol. 130, Springer Verlag, 1970.

[151] F. Lorenz & J. Leicht – « Die Primideale des Wittschen Ringes », *Invent. Math.* **10** (1970), p. 82–88.

[152] S. Mac Lane – *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.

[153] P. Mammone & R. Moresi – « Formes quadratiques, algèbres à division et extensions multiquadratiques inséparables », *Bull. Belg. Math. Soc.* **2** (1995), p. 311–319.

[154] P. Mammone & D.B. Shapiro – « The Albert quadratic form for an algebra of degree four », *Proc. Amer. Math. Soc.* **105** (1989), p. 525–530.

[155] P. Mammone, J.-P. Tignol & A.R. Wadsworth – « Fields of characteristic 2 with prescribed u-invariant », *Math. Ann.* **290** (1991), p. 109–128.

[156] Yu.I. Manin – « Correspondances, motifs et transformations monoïdales », *Mat. Sb.* **77** (1968), p. 475–507 (en russe), traduction anglaise : *Math. USSR Sbornik*.

[157] A.S. Merkurjev – « Sur le symbole de reste normique de degré 2 », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **261** (1981), p. 542–547 (en russe), traduction anglaise : *Soviet Math. Dokl.*

[158] ______, « Simple algebras over function fields of quadrics », manuscrit non publié, 1989.

[159] ______, « Simple algebras and quadratic forms », *Izv. Akad. Nauk SSSR* **55** (1991), p. 218–224 (en russe), traduction anglaise : *Math. USSR Izv.*

[160] ______, « On the norm residue homomorphism for fields », Mathematics in St. Petersburg, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 2, Amer. Math. Soc., 1996, p. 49–71.

[161] A.S. Merkurjev & A.A. Suslin – « L'homomorphisme de reste normique de degré trois », *Izv. Akad. Math. SSSR* **46** (1982), p. 1011–1046 (en russe), traduction anglaise : *Math. USSR Izv.*

[162] J. Milnor – « Algebraic K-theory and quadratic forms », *Invent. Math.* **9** (1970), p. 315–344.

[163] ______, « Symmetric inner products in characteristic 2 », Prospects in mathematics, Annals of Math. Studies, Princeton Univ., 1970, *Ann. of Math. Studies* **70**, Princeton Univ. Press, 1971, p. 59–75.

[164] J. Milnor & D. Husemöller – *Symmetric bilinear forms*, Springer, 1973.

[165] F. Morel – « Suite spectrale d'Adams et invariants cohomologiques de formes quadratiques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328** (1999), p. 963–968.

[166] ______, « An introduction to $\mathbf{A}^1$-homotopy theory », Contemporary Developments in Algebraic K-theory (M. Karoubi, A. Kuku & C. Pedrini, éds.), ICTP Lecture Notes, vol. 15, ICTP, 2003, p. 357–441.

[167] ______, « Milnor's conjecture on quadratic forms and mod 2 motivic complexes », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **114** (2005), p. 63–101.

[168] F. Morel & V. Voevodsky – « $\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **90** (2001), p. 45–143.

[169] J. Nekovář – « On the parity of ranks of Selmer groups III », *Doc. Math.* **12** (2007), p. 243–274.

[170] M. Ojanguren – « The Witt group and the problem of Lüroth », Dottorato Ric. Mat., ETS Editrice, Pisa, 1990, p. 99 pages.

[171] O.T. O'Meara – *Introduction to quadratic forms*, Springer, 1963.

[172] D. Orlov, A. Vishik & V. Voevodsky – « An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms », *Ann. of Math.* **165** (2007), p. 1–13.

[173] R. Parimala – « Witt groups of conics, elliptic and hyperelliptic curves », *J. Number Theory* **28** (1988), p. 69–93.

[174] R. Parimala & V. Suresh – « On the length of a quadratic form », *Algebra and Number theory: Proceedings of the Silver Jubilee Conference* (University of Hyderabad) (R. Tandon, éd.), Hindustan Book Agency, 2005, p. 147–157.

[175] E. Peyre – « Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology », *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.2, Amer. Math. Soc., 1995, p. 369–401.

[176] A. Pfister – « Multiplikative quadratische Formen », *Arch. Math. (Basel)* **16** (1965), p. 363–370.

[177] ———, « Zur Darstellung von -1 als Summe von Quadraten in einem Körper », *J. London Math. Soc.* **40** (1965), p. 159–165.

[178] ———, « Quadratische Formen in beliebigen Körpern », *Invent. Math.* **1** (1966), p. 116–132.

[179] ———, « Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten », *Invent. Math.* **4** (1967), p. 229–237.

[180] ———, « Quadratic lattices in function fields of genus 0 », *Proc. London Math. Soc.* **66** (1993), p. 257–278.

[181] ———, *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 217, Cambridge Univ. Press, 1995.

[182] R. Pierce – *Associative algebras*, Graduate texts in Mathematics, vol. 88, Springer, 1982.

[183] M.L. Racine – « A simple proof of a theorem of Albert », *Proc. Amer. Math. Soc.* **43** (1974), p. 487–488.

[184] M. Rost – « Hilbert theorem 90 for K_3^M for a quadratic extension », prépublication, Univ. Regensburg, 1986.

[185] ———, « On 14-dimensional forms, their spinors and the difference of two octonion algebras », prépublication, 1994.

[186] ———, « On quadratic forms isotropic over the function field of a conic », *Math. Ann.* **288** (1990), p. 511–513.

[187] L. Rowen – « Division algebras of exponent 2 and characteristic 2 », *J. Algebra* **90** (1984), p. 71–83.

[188] ———, *Ring theory, I*, Pure Appl. Math., vol. 127, Academic Press, 1988.

[189] R. Schafer – *An introduction to nonassociative algebras*, Pure and Applied Mathematics, vol. 22, Academic Press, 1966.

[190] W. Scharlau – *Quadratic forms*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, vol. 22, Queen's University, 1969.

[191] ———, *Quadratic and hermitian forms*, Springer, 1985.

[192] J.E. Schneider – « Orthogonal groups of nonsingular forms of higher degree », *J. Algebra* **27** (1973), p. 112–116.

[193] A. Scholl – « Classical motives », Motives, Proc. Symp. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., 1994, p. 163–187.

[194] J.-P. Serre – *Groupes algébriques et corps de classes*, 2ème éd., Hermann, 1959.

[195] ———, *Corps locaux*, 2ème éd., Hermann, 1968.

[196] ———, *Cours d'arithmétique*, 2ème éd., Collection SUP, vol. 2, Presses universitaires de France, 1978.

[197] ———, *Cohomologie galoisienne*, nouvelle éd., Lecture Notes in Math., vol. 5, Springer, 1994.

[198] D.B. Shapiro – « Similarities, quadratic forms, and Clifford algebras », Thèse, Université de Berkeley, 1974.

[199] A. S. Sivatski – « Nonexcellence of multiquadratic field extensions », *J. Algebra* **275** (2004), p. 859–866.

[200] T.A. Springer – « Sur les formes quadratiques d'indice zéro », *C. R. Acad. Sci. Paris, Math.* **234** (1952), p. 1517–1519.

[201] ———, « Quadratic forms over fields with a discrete valuation. I. Equivalence classes of definite forms », *Indag. Math.* **17** (1955), p. 352–362.

[202] A. Suslin – « Torsion in K_2 of fields », *K-theory* **1** (1987), p. 5–29.

[203] A.A. Suslin – « L'homomorphisme quaternionique pour le corps des fonctions d'une conique », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **265** (1982), p. 292–296, traduction anglaise : *Soviet Math. Dokl.*

[204] R.G. Swan – « Zero cycles on quadric hypersurfaces », *Proc. Amer. Math. Soc.* **107** (1989), p. 43–46.

[205] M. Szyjewski – « Le cinquième invariant des formes quadratiques », *Algebra Anal.* **2** (1990), p. 213–234, traduction anglaise : *Leningrad Math. J.*

[206] J.-P. Tignol – « Sur les classes de similitude de corps à involution de degré 8 », *C. R. Acad. Sci. Paris, Math.* **286** (1978), p. 875–876.

[207] ———, « Algèbres indécomposables d'exposant premier », *Adv. Math.* **65** (1987), p. 205–228.

[208] ———, « Réduction de l'indice d'une algèbre simple centrale sur le corps des fonctions d'une quadrique », *Bull. Soc. Math. Belgique* **42** (1990), p. 735–745.

[209] M. K. . A. M. . M. R. . J.-P. Tignol – *The book of involutions*, AMS Coll. Publ., vol. 44, AMS, 1998.

[210] B. Totaro – « Birational geometry of quadrics in characteristic 2 », à paraître au *J. Alg. Geom.*

[211] A. Vishik – « Integral motives of quadrics », Max Planck Institut für Mathematik (Bonn), 1998, p. 1–82.

[212] ______, « On dimensions of anisotropic forms in I^n », Max Planck Institut für Mathematik (Bonn), 2000, p. 1–41.

[213] ______, « Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms », *Geometric methods in the algebraic theory of quadratic forms*, Lect. Notes in Math., vol. 1835, Springer-Verlag, 2004, p. 25–101.

[214] ______, « Fields of u-invariant $2^r + 1$ », à paraître dans "Algebra, Arithmetic and Geometry - Manin Festschrift", Birkhauser, 2007.

[215] V. Voevodsky – « Cancellation theorem », 2000, prépublication.

[216] ______, « Triangulated categories of motives over a field », Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, 2000, p. 188–238.

[217] ______, « Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$-coefficients », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **98** (2003), p. 59–104.

[218] ______, « Reduced power operations in motivic cohomology », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **98** (2003), p. 1–57.

[219] A.R. Wadsworth – « Noetherian pairs and function fields of quadratic forms », Thèse, Université de Chicago, 1972.

[220] ______, « Similarity of quadratic forms and isomorphism of their function fields », *Trans. Amer. Math. Soc.* **208** (1975), p. 352–358.

[221] ______, « Merkurjev's elementary proof of Merkurjev's theorem », Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), vol. 55, Contemp. Math., no. II, Amer. Math. Soc., 1986, p. 741–776.

[222] C.T.C. Wall – « Graded Brauer groups », *J. Reine Angew. Math.* **213** (1964), p. 187–199.

[223] E. Witt – « Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz », *Math. Zeit.* **39** (1935), p. 462–467.

[224] ______, « Theorie der quadratische Formen in beliebigen Körpern », *J. Reine Angew. Math.* **176** (1937), p. 31–44.

[225] ______, *œuvres*, Springer, 1998.

GLOSSAIRE

$\simeq$: Isométrie de formes quadratiques ou bilinéaires 2, 177
$\leq$: Relation de sous-forme entre formes quadratiques 2, 187
$\propto$: Similitude 3
$\sim$: Équivalence de Witt 6, 185
$\preccurlyeq$: Domination 43
$\approx$: Équivalence stable 43
$\perp$: Somme directe orthogonale 3, 178
$\otimes$: Produit tensoriel 3, 185
$\dim$: Dimension d'une forme quadratique (ou bilinéaire) 1
$\dim_{\mathrm{an}}$: Dimension anisotrope 6
$\overline{\dim}$: Dimension modulo 2 15
$\dim_{\mathrm{es}}$: Dimension essentielle 36
$D(q)$: Ensemble des valeurs $\neq 0$ d'une forme quadratique q 8
$G(q)$: Groupe des facteurs de similitude d'une forme quadratique q 8
$D^2(q)$: Ensemble des produits de deux éléments de $D(q)$ 27
$W(F)$: Anneau de Witt des formes bilinéaires symétriques du corps F 7, 185
$\hat{W}(F)$: Anneau de Witt-Grothendieck 7
$W_q(F)$: Groupe de Witt des formes quadratiques (en caractéristique 2) 185
I^nF : n-ième puissance de l'idéal fondamental 15, 186
I^nW_qF : Filtration de $W_q(F)$ 186
$J_n(F)$: Idéal des formes de degré $\geq n$ 38
$P_n(F)$: Ensemble des classes d'isométrie de n-formes de Pfister 16
$P(F)$: Ensemble des classes d'isométrie de formes de Pfister 16
$GP_n(F)$: Ensemble des classes de similitude de n-formes de Pfister 16
$GP(F)$: Ensemble des classes de similitude de formes de Pfister 16
$d_{\pm}$: Discriminant 67
Δ : Invariant d'Arf 182
$C(q)$: Algèbre de Clifford d'une forme quadratique q 69, 182
$C_0(q)$: Partie paire de l'algèbre de Clifford 69, 182
c : Invariant de Clifford 76

e^n **:** n-ième invariant supérieur 109
$F(q)$ **:** Corps des fonctions de la quadrique projective associée à q 29
$h(q)$ **:** Hauteur d'une forme quadratique q 35
$\deg(q)$ **:** Degré de q 37
i_n **:** n-ième indice de Witt supérieur 231

INDEX