14.03.2012

Саша Нешитов

$\mathcal{S}$ – базовая категория (Top, Sch/k)

Стэк: $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{S}$ с какими-то свойствами

$\boxed{\text{Пример}}$ G – топ. группа (или алг. группа) $\mathcal{S} = Top$ (или Sch/k)

BG – категория: объекты: $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ S \in \mathcal{S} \end{array}$ – G-торсоры

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[d] \\ S \arrow[r] & S' \end{tikzcd}$$
– морфизм, если это декартов квадрат

$BG \longrightarrow \mathcal{S}$ – забывающий функтор

$$\begin{pmatrix} E \\ \downarrow \\ S \end{pmatrix} \longmapsto S$$

$\forall$ G-торсора E:
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "G\text{-эквивар.}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & EG \arrow[d] \\ X \arrow[r] & BG \end{tikzcd}$$
– стягиваемое топ. пр-во со свободным G-действием

– pull-back

$BG = EG/_G$

$BG = pt/_G$ – для стэков

$\cdot$ $\mathcal{S} = Sch/k$ $\quad X$ – схема $\rightsquigarrow$ $\underline{X}$ – стэк – это $Sch/_X$

$$\underline{X} \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$\begin{pmatrix} Y \\ \downarrow \\ X \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Y \\ \downarrow \\ Spec\,k \end{pmatrix}$$

Универсальное расслоение:

$$\begin{array}{ccc} \underline{Spec\,k} & & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & & \begin{pmatrix} G\times Y \\ \downarrow \\ G \end{pmatrix} \end{array}$$

Почему универсальное?

$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ G \end{array}$ – G-торсор. Построим $\underline{S} \longrightarrow BG$:
$$\begin{array}{ccc} X & & E\times_S X \\ \downarrow & \longmapsto & \downarrow \\ S & & X \end{array}$$

Теперь
$$\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \underline{Spec\,k} \arrow[d] \\ \underline{S} \arrow[r] & BG \end{tikzcd}$$
– докажем позже

$\boxed{\text{Пример 2}}$ X — схема, G — алг. группа, $X \curvearrowleft G$

Как определить фактор?

$[X/G]$ — стэк

$\mathrm{Ob}([X/G])$ — это G-торсоры с морфизмом в X

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \\ S & \end{tikzcd}$$

т.е. пары $\left(\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ S \end{smallmatrix},\ f : E \xrightarrow{} X \right)$ ← G-эквивар.

морфизмы в $[X/G]$:

$$\begin{tikzcd} & & X \\ E \arrow[rru, "f"] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E' \arrow[ru, "f'"'] \arrow[d] & \\ S \arrow[r] & S' & \end{tikzcd}$$

Тогда $BG = [\mathrm{Spec}\, k / G]$, $[X/\{e\}] = \underline{X}$

$$\underline{X} \longrightarrow [X/G]$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & G\times Y \arrow[r] \arrow[d] & X \\ X & & Y & \end{tikzcd} \qquad (g,y) \mapsto g\cdot f(y)$$

Почему это фактор?

Пусть $G \curvearrowright X$ и оказалось, что фактор является схемой

$$\begin{tikzcd} G\times X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, dashed] \\ X \arrow[r, dashed] & Y \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

— pushout

если $X \to Y$ — G-торсор, то

Y — схема

Тогда $[{}_G\backslash X] \simeq \underline{Y}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "G\text{-торсор}"'] & X \\ S & \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd} S \arrow[d] \\ Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[d] & X \arrow[r, "G\text{-эквивар.}"] & Y \\ S \arrow[rru, dashed] & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G\times E \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p"'] & E \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ E \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & S \arrow[dr, dashed] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

это очевидно для тривиального $\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ S \end{smallmatrix}$

а все остальные склеиваются из кусочков

$$\begin{tikzcd} {[{}_G\backslash X]} \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & \underline{Y} \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

В другую сторону:

$$\begin{tikzcd} \left[G\backslash X\right] & \underline{Y} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X\times_Y S \arrow[r] \arrow[d] & X & & S \arrow[d] & & & S \arrow[d] \\ S & & & Y \arrow[lll, mapsto] & & X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Пример 3}}$ Пространства модулей

$\boxed{\text{Опр.}}$ $S \in Sch/k$

$\begin{tikzcd} C \arrow[d] \\ S \end{tikzcd}$ — семейство кривых рода g над S, если $\begin{tikzcd} C \arrow[d] \\ S \end{tikzcd}$ — глад. проект., и слои над замкнутыми точками = кривые рода g

Пр-во модулей — то, что классифицирует все семейства кривых рода G:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d] & & C \arrow[r] \arrow[d] & C_g \arrow[d] \\ S \arrow[rr, squiggly] & & S \arrow[r, "\exists!"'] & M_g \end{tikzcd}$$

— его не существует в категории схем

Существует грубое пространство модулей — классифицирует кривые над з. точками:

Coarse moduli space M_g:

$\forall K$ — а.з. (мн-во кривых над $\operatorname{Spec} K$) $\simeq \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} K, M_g)$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & C_g \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r] & M_g \end{tikzcd}$$

Строим M_g: Объекты: семейства $\begin{tikzcd} C \arrow[d] \\ S \end{tikzcd}$ кривых рода g

Морфизмы: $\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C' \arrow[d] \\ S \arrow[r] & S' \end{tikzcd}$

$M_{g,n}$ — кривые с n отмеченными точками, т.е. с n выбранными сечениями:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\ S \arrow[r] \arrow[u, bend left, "s_1 \ldots s_n"] & S' \arrow[u, bend right, "s_1 \ldots s_n"'] \end{tikzcd}$$

Универсальная кривая — это $M_{g,1} \longrightarrow M_g$

$M_{g,1} = C_g$ — „тавтологическое расслоение"

Демотивирующий пример

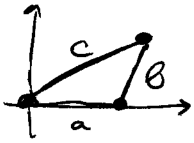
Пространство модулей треугольников с упорядоченными вершинами

$$\tilde{T} = \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid a+b>c,\ a+c>b,\ b+c>a\}$$

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[d] \\ \tilde{T} \arrow[u, bend left] \arrow[u, bend left=50] \arrow[u, bend left=70] \end{tikzcd}$$ – унив. расслоение

$\tilde{Y} \subset \tilde{T}\times\mathbb{R}^2$

над (a,b,c) висит



Пусть $\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ S \end{tikzcd}$ – семейство треугольников с упор. вершинами,

т.е.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \tilde{Y} \arrow[d] \\ S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, bend left, "s_1"] \arrow[u, bend left=50, "s_2"] \arrow[u, bend left=70, "s_3"] & \tilde{T} \end{tikzcd}$$

$\forall s\in S$ $f^{-1}(s)$ – треугольник

$\alpha:\ s \rightsquigarrow f^{-1}(s) \simeq$ треугольник $\rightsquigarrow$ знаем $\{a,b,c\}$

$s_1(s),\ s_2(s),\ s_3(s)$

$\rightsquigarrow$ знаем, где a, где b, где c

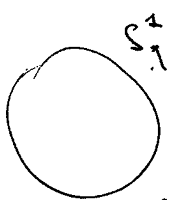
Попробуем сделать то же самое без упорядочивания вершин

$$T = \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid a+b>c,\ a+c>b,\ b+c>a\}/S_3 = \tilde{T}/S_3$$

$$Y = \tilde{Y}/S_3$$

$\begin{tikzcd} Y \arrow[d] \\ T \end{tikzcd}$ – расслоение, которое не подходит: – но это грубое пространство модулей

Возьмем в качестве базы S^1_1



Возьмем равносторонний Δ и повернем его при проходе по S^1

$$\begin{tikzcd} \Delta X \arrow[d] & \\ S^1 \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

постоянное

Что же такое стэк?

Требуем, чтобы $\mathcal{S}$ было с расслоенными произведениями
(например, $Sch/_k$)

$\mathcal{X} \xrightarrow{p} \mathcal{S}$ — CFG, если
категория, расслоенная в группоидах

(1) $t \xrightarrow{\varphi} s$ $\quad \mathcal{X}$

$T \xrightarrow{f} S$ $\quad \mathcal{S}$

$\forall\, T \xrightarrow{f} S$

$\forall\, s$ над S

$\exists\, t$ над T

$\varphi : t \longrightarrow s$ над f

(2)

$\forall$ треугольника
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h"'] & T \arrow[d, "f"] \\ & S \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & S & \\ U \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "g"'] & & T \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd} \quad \mathcal{S}$$

и $\forall$ его частичного поднятия
$$\begin{tikzcd} & s & \\ u \arrow[ur, "h"] \arrow[rr] & & t \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$
$\exists!$ поднятие g

Из этого следует, что $\forall S \in \mathcal{S}$ $\mathcal{X}_S$ — группоид

Кроме того, t над T в первой аксиоме — единственно с точностью до единственного изоморфизма

$$\begin{tikzcd} t' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[dd, bend right] & s \arrow[dd, "p"] \\ t \arrow[ur] \arrow[d, "p"] & \\ T \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$
— „pull back" — это тоже следует из аксиом

Стэк обязан быть CFG

Для CFG есть расслоенное произведение:

$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ — CFG над базовой категорией $\mathcal{S}$. Тогда

$$\exists \quad \begin{tikzcd} \underline{A} \times_{\underline{B}} \underline{C} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{C} \arrow[d] \\ \underline{A} \arrow[r] & \underline{B} \end{tikzcd}$$

: Ob $\underline{A} \times_{\underline{B}} \underline{C}$ — это тройки

$(a, c, \alpha : f(a) \xrightarrow{\simeq} g(c))$

a — ob $\underline{A}$, c — ob $\underline{C}$, α — в $\underline{B}$

Mor в $\underline{A} \times_{\underline{B}} \underline{C}$:
$$\begin{tikzcd} f(a) \arrow[r, "\alpha", "\simeq"'] \arrow[d] & g(c) \arrow[d] \\ f(a') \arrow[r, "\alpha'", "\simeq"'] & g(c') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (a, c, \alpha) \arrow[d] \\ (a', c', \alpha') \end{tikzcd}$$

Если $\begin{tikzcd} E \arrow[d] \\ S \end{tikzcd}$ — G-торсор $\rightsquigarrow$ $\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[d] \\ \underline{S} \end{tikzcd}$ $\rightsquigarrow$ $\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{Spec\, k} \arrow[d] \\ \underline{S} \arrow[r] & BG \end{tikzcd}$