04.04.2012

Пространство модулей комплексных кривых

Леша Бешенов

$\mathcal{M}_g$ = {классы изоморфизма гладких комплексных проективных кривых рода g}

= {поверхности Римана рода g}

$$\mathcal{M}_{g,n} = \{ [(C, x_1, \dots, x_n)] \}$$

кривая с n отм. точками, при морфизмах точки переходят в точки

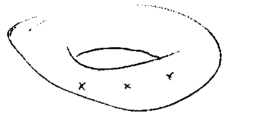
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_g = \begin{cases} 0, & g = 0 \quad \text{— } \mathbb{C}P^1 \\ 1, & g = 1 \quad \text{— один параметр: } j\text{-инвариант} \\ 3g-3, & g \geq 2 \end{cases}$$

$\mathcal{M}_{1,1}$ = эллиптические кривые

Arbarello – Cornalba, Griffiths,
Geometry of algebraic curves, vol. II
- там написано, что $\mathcal{M}_{g,n}$ — стэк Делиня – Мамфорда

Mulase, Penkava — популярная статья

Harer, Mumford, Penner – Thurston



$\mathcal{M}_{g,n} \longleftrightarrow$ метрические ленточные графы

вопрос определенности над $\overline{\mathbb{Q}}$ — Г.В. Белый (1979)

$C \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \longleftrightarrow \quad$ dessins d'enfants

голоморфное, ветвится только в $0, 1, \infty$

Определение орбифолда по Тёрстону

$Q = (X|Q)$, $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие (локально конечное).

$\{G_i\}_{i \in I}$ — конечные группы $\qquad X(Q) = \bigcup_{i \in I} U_i$

$\{\varphi_i\}_{i \in I}$, $\quad U_i \xrightarrow[\approx]{\varphi_i} \widetilde{U}_i / G_i$

$\widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \leftarrow$ действие эффективное: $\forall g \forall h \ \exists x : g(x) \neq h(x)$

При этом если $U_i \subset U_j$, то

$\exists f_{ij} : G_i \xhookrightarrow{f_{ij}} G_j$ — инъекция, и

$\widetilde{U}_i \xhookrightarrow{\varphi_{ij}} \widetilde{U}_j$ — вложение

и $\varphi_{ij}(\gamma x) = f_{ij}(\gamma) \varphi_{ij}(x)$

M – гладкое риманово многообразие

G – действует изометриями

$$M \xrightarrow{\pi} M/G$$

гладкий орбифолд: $\mathbb{R}^n/G_i$

$G_i \leq O(n)$ – конечная

$Q_0 \xrightarrow{\pi} Q_1$ – <u>орбифолдное накрытие</u>:

$X(Q_0) \longrightarrow X(Q_1)$ – сюръекция

① $\forall x_0 \in Q_0 \ \exists$ открытое $U \ni x_0$, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$

$G_0 \leq G_1$

$$\begin{tikzcd} Q_0 \supset U \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\wr"] & \pi(U) \subset Q_1 \arrow[d, "\wr"] \\ \tilde{U}/G_0 \arrow[r] & \tilde{U}/G_1 \end{tikzcd}$$

② $\forall x_1 \in Q_1 \ \exists V \ni x_1$, $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$

$G_0' \leq G_1'$ – конечные

$$\begin{tikzcd} Q_0 \supset \pi^{-1}(V) \supset U \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & V \subset Q_1 \arrow[d, "\simeq"] \\ \tilde{V}/G_0' \arrow[r] & \tilde{V}/G_1' \end{tikzcd}$$

$x \in Q$ $\qquad G_x = \{g \in G \mid g(\varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x)\} \leq G$

$x \in U \cong \tilde{U}/G$ $\qquad$ опр. с точностью до сопряжения

G_x тривиальна $\rightsquigarrow$ x – гладкая

нетривиальна $\rightsquigarrow$ x – особая

Клеточное разбиение называется <u>орбифолдным</u>, если G_x одинаковы на клетках

$$\chi(Q) = \sum_C (-1)^{\dim C} \frac{1}{|G_C|}$$

$Q_0 \xrightarrow{\pi} Q_1$ – орбифолдное накрытие

$\qquad\qquad\ \ni y$ – неособая

$|\pi^{-1}(y)|$ = степень накрытия

$$\chi(Q_1) = \frac{1}{k}\chi(Q_0)$$

Пример: $G \leq S_n$

$\mathbb{R}^n_+/G$ — гладкий орбифолд (G действует перестановкой координат)

$\chi(\mathbb{R}^n_+/G) = \dfrac{(-1)^n}{|G|}$ — орбифолдная характеристика

$\mathbb{R}^n_+/S_n$ $\quad \Delta(1\,2)$ — открытый отрезок, x_{12} — его середина

$\wr\wr$ $\quad \Delta(1\,2\,3)$ — открытый равностор. треугольник, x_{123} — его середина

$\Delta(1\,2\,3 \ldots n) \times \mathbb{R}_+$ $\quad \vdots \quad \vdots$

$\mathrm{conv}(x_1, x_{12}, x_{123}, \ldots, x_{12\ldots n})$

получилось канонические клеточное разбиение для $\mathbb{R}^n_+$

также, что для $G \leq S_n$

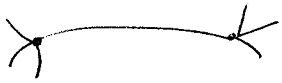
$\mathbb{R}^n_+/G$

$\forall g \in G$ неподвижные точки лежат на каком-то клетке C

— есть комплексная структура $\rightsquigarrow$ есть граф

Обычно $\Gamma = (V, E, i)$ — отношение инцидентности

верш. ребра

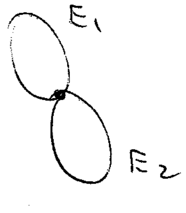


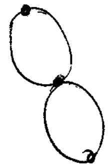
Ленточный граф: нет изолированных вершин

• Валентность для вершины — с учетом петель:  валентность 5

$\deg v \geq 3 \quad \forall v$

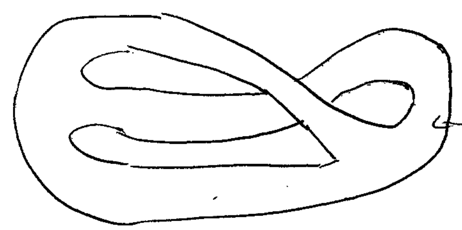
+ автоморфизмы различают полуребра.





$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

+ фиксируем порядок полуребер в каждой вершине (циклический)



ориент. поверхность с краем рода g

метрические лент. графы — длины

$v(\Gamma) - e(\Gamma) + b(\Gamma) = 2 - 2g(\Gamma)$ — эйлерова характеристика

$\mathrm{Aut}_\partial \Gamma \qquad \mathbb{R}^n_+/\mathrm{Aut}_\partial \Gamma$ — кусок, из кот. все будет клеиться