Н. Ардимарцев

<u>Опр.</u> $A = \oplus A_k$ – град. алгебра, A_0 – поле

M – градуированный модуль

$$H_M(t) = \sum_n t^n \dim_{A_0}(M_n)$$ – ряд Гильберта–Пуанкаре

$$A = k[x_1, \ldots, x_n] \to \quad \| \quad \prod \frac{f(t)}{t^{k_i}-1}$$

<u>Функция Гильберта:</u> $H_M : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$k \mapsto \dim_{A_0}(M_k)$$

Утверждается, что начиная с некоторого места это многочлен:

$$P_M \in \mathbb{Z}[t]: \ P_M(k) = H_M(k), \quad k > N$$

$\boxed{\text{Теорема}}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & B \times \mathbb{P}^n_k \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$

φ – плоский морфизм

$\Updownarrow$

над <u>каждой</u> точкой <u>многочлен Гильберта</u> один и тот же

(подсхемы в $\mathbb{P}^n_k$):

$A = k[x_1, \ldots, x_n]$ (или $A = M$)

$M = k[x_1, \ldots, x_n] / I(\cancel{X})$

<u>Опр.</u> $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

$k[x_0, \ldots, x_n] / I(Y)$ ← насыщенный

$\rightsquigarrow$ его многочлен Гильберта

над общими точками: $\mathbb{P}^n_{k(x)}$

Посмотрим на конкретный случай:

$B = \operatorname{Spec}(k[t]_{(t)})$ – две точки, $R = k[t]_{(t)}$

$X \to B$ плоский $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{X,x}$ – плоский над R

R – ОГИ $\rightsquigarrow$ плоскость $\Leftrightarrow$ отсутствие кручения

$k[x_0, \ldots, x_n] / I(X)$ – кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ $\qquad B \times \mathbb{P}^n_k = \mathbb{P}^n_R$

обратим x_i: $\rightsquigarrow$ получилась локальная карта

$\Leftrightarrow$ у $\underbrace{x_i^{-1} k[x_0, \ldots, x_n] / I(X)}_{M}$ нет кручения $\to \operatorname{Tor}(M) \cdot x_i^{N_i} = 0$

$\to \operatorname{Tor}(M) \cdot (x_0, \ldots, x_n)^N = 0$

$\rightsquigarrow$ кручения нет в больших градуированных компонентах M

$\rightsquigarrow$ начиная с некоторого места, они свободны

$\hookleftarrow \quad \dim_k(M_i \otimes_R k) = \dim_{k(t)}(M_i \otimes_R k(t))$

$\hookleftarrow \quad H_{X_{(0)}}(x,i) = H_{X_{(t)}}(x,i) \longleftrightarrow P_{X_{(0)}}(x) = P_{X_{(t)}}(x).$ $\square$

<u>Свойства</u> ① $\deg P_X(t) = \dim X$ - обозначим ее k теперь

② $P_X(t) = \frac{\delta(X)}{k!} t^k + \ldots$

$\delta(X)$ — степень многообразия X.

③ $P_Y(t) = P_X(t) - P_X(t-1)$

гиперплоское сечение X общего положения: $Y = X \cap \mathbb{P}^{n-1}$

Возьмем модуль M и напишем его мин. своб. резольвенту

$A = k[x_1, \ldots, x_n]$ в $\mathbb{P}^n$

$b \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow S(-b) \cong A$ с образующей в степени b: $\deg 1 = b$

$$H_{S(-b)}(t) = C^r_{n+t-b}$$

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus S(-b_s) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

т. Гильберта о сизигиях говорит, что длина этой резольвенты $\leq n$; степени этих образующих b_s можно ограничить чем-то, зависящим от самого многочлена Гильберта

<u>Замечание</u> многочлен Гильберта зависит от вложения $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

$\mathbb{P}^n_r(X) = \{ F \subset \mathcal{O}_X^{n+1},\ \text{rank}\, F = r \}$

схема как функтор

или $\{ \mathcal{O}_X^{n+1} \longrightarrow \mathcal{L},\ \text{rank}\, \mathcal{L} = 1 \}$

$\boxed{\text{Утв}}$ $P_X(t_0) = \chi(\mathcal{L}^{\otimes t_0}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{L}^{\otimes t_0})$

$P_X(0)$ ни от чего не зависит:

$$P_X(0) = \chi(\mathcal{O}_X)$$

X — гладкая проективная кривая $\rightsquigarrow P_X(t) = c_1 t + c_0$

$P_X(0) = 1 - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 1 - g$

род

т.е. $g = 1 - P_X(0)$

арифметический род многообразия

Альтернативное определение:

X — схема, $\mathcal{L}$ — обратимое расслоение, F — когерентный пучок

$$\rightsquigarrow P_{X,\mathcal{L},F}(t_0) = \chi(F\otimes\mathcal{L}^{\otimes t_0}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, F\otimes\mathcal{L}^{\otimes t_0})$$

k-алгебра

$Gr(k,n)(T) = \{$ — // — ранга $k\}$

$\mathbb{P}^n = \{$ — // — ранга $n-1\}$

Схема Гильберта: хотим построить схему такую, что k-точки соответствуют проективным многообразиям с данным многочленом Гильберта

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n\times B = \mathbb{P}^n_B \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \longleftrightarrow \quad B \longrightarrow \mathcal{H}_0$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Функтор $\mathbb{Z}\text{-Sch} \xrightarrow{\mathcal{H}_P} \mathrm{Sets}$

$$h_P(B) = \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbb{P}^n_B = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}\times B \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd} \ \ \varphi\text{ — плоский, и в }\forall\text{ слое многочлен Гильберта равен }P \right\}$$

схема Гильберта

S — схема $\rightsquigarrow$ $S\text{-Sch} \longrightarrow \mathrm{Sets}$

$$h_{P,S} = h_P \times_{\mathbb{Z}} S$$

наличие схемы Гильберта = наличие унив. плоского семейства

унив. семейство

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n_{\mathcal{H}_P} \arrow[d] \\ & \mathcal{H}_P \end{tikzcd} \ : \ \forall \begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n_B \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^n_B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \mathcal{X} \arrow[r] & \mathbb{P}^n_{\mathcal{H}} \arrow[r] & \mathcal{H} \end{tikzcd} \rightarrow Y = \mathcal{X}\times_{\mathcal{H}} B$$

План док-ва того, что $h_{\mathcal{P}}$ представим

$h_{\mathcal{P}}(B) = ?$, если $B = \operatorname{Spec} R$, R — локальное кольцо

$\overset{\Psi}{X}$ ~ соответствует $R[x_0, \dots, x_n] / I(X) = M$

$A = R[x_0, \dots, x_n]$

$\operatorname{codim}(I_m) = P_X(m)$ начиная степ. m

Утверждение: $\exists m_0$: для $m > m_0$ $\forall X \in h_{\mathcal{P}}(B)$

$$\operatorname{codim}(\underset{\text{кон. пор. модуль}}{I_m}) = P_X(m)$$

I_m плоский над R $\leadsto$ он свободен

$I_{m_0}(X)$ — прямое слагаемое в A_m ← его размерность C^n_{m+n}

Тогда $I_{m_0}(X)$ определяет точку на $G = Gr(\underbrace{C^n_{m+n}}_{A_m}, P(m))(R)$

$\to$ вложим схему Гильберта в этот грассманиан

$\underset{\substack{\| \\ I_{m_0+k}}}{I(X)_{m_0}} \cdot S_k \leq S_{k+m_0}$, $S = \mathbb{Z}[\dots]$

$\dim(I_{m_0}(X) \cdot S_k) \leqslant \dim S_{k+m_0} - P(m_0+k)$

замкнутое условие

Другими словами:

$\mathcal{U}$ — тавтологическое расслоение над G

mult_k: $\mathcal{U} \otimes S_k \longrightarrow S_{k+m}$ — умножение

$\operatorname{rank}(\operatorname{mult}_k) \leqslant \boxed{\dots}$

<u>Свойства:</u>

① $Gr_S(k, n) = \mathcal{H}_{\mathcal{P}, S}$, $P = C^k_{k+t}$

② $\deg(X) \cdot t + (1-g) = \cancel{P}(t)$

$P(t) = 2t + 1$ — многообразие коник