

Опр  $A = \bigoplus A_k$  - градуированная алгебра,  $A_0$  - поле

$M$  - градуированный модуль

$H_M(t) = \sum_n t^n \dim_{A_0}(M_n)$  - ряд Гильберта-Пуанкаре

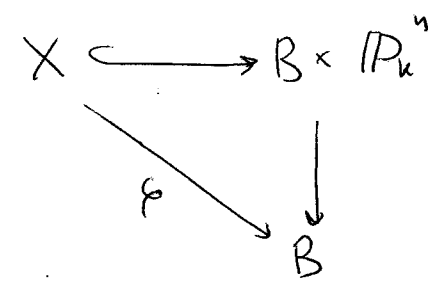
$A = k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \prod \frac{f(t)}{t^{k_i} - 1}$

Функция Гильберта:  $H_M: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $k \mapsto \dim_{A_0}(M_k)$

Утверждается, что начиная с некоторого места это многочлен:

$P_M \in \mathbb{Z}[t]: P_M(k) = H_M(k), k > N$

Теорема



$\varphi$  - плоский морфизм  
над каждой точкой  
многочлен Гильберта один и тот же  
(подсхемы в  $\mathbb{P}^n$ ):

$A = k[x_1, \dots, x_n]$  (или  $A=M$ )  
 $M = k[x_1, \dots, x_n] / I(X)$

Опр  $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

$k[x_0, \dots, x_n] / I(Y)$  - касательный его многочлен Гильберта

над объектами точек:  $\mathbb{P}^n_{k(x)}$

Посмотрим на конкретный случай:

$B = \text{Spec}(k[t]_{(t)})$  - две точки,  $R = k[t]_{(t)}$

$X \rightarrow B$  плоский  $\Leftrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  - плоский над  $R$

$R$ -оци  $\Leftrightarrow$  плоскость  $\Leftrightarrow$  отсутствие кручения

$k[x_0, \dots, x_n] / I(X)$  - кольцо  $\mathcal{O}_{X,x}$   $B \times \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_R$

Обратн  $x$ :  $\rightarrow$  получиться локальные карты

$\Leftrightarrow \varphi \cdot x_i^{-1} \cdot \underbrace{k[x_0, \dots, x_n] / I(X)}_M$  без кручения  $\rightarrow \text{Tor}(M) \cdot x_i^{N_i} = 0$

$\rightarrow \text{Tor}(M) \cdot (x_0, \dots, x_n)^N = 0$

→ крутится нет в двойках градуированных компонентах  $M$

→ начинаем с некоторого места, они свободны

$$\hookrightarrow \dim_u(M_i \otimes_R k) = \dim_{k(t)}(M_i \otimes_R k(t))$$

$$\hookrightarrow H_{X(i)}(x, i) = H_{X(t)}(x, i) \hookrightarrow P_{X(i)}(x) = P_{X(t)}(x). \quad \square$$

Свойства ①  $\deg P_X(t) = \dim X$  - обозначим ее  $k$  - цепь

$$\textcircled{2} P_X(t) = \frac{\delta(X)}{k!} t^k + \dots$$

$\delta(X)$  - степень многообразия  $X$ .

$$\textcircled{3} P_Y(t) = P_X(t) - P_X(t-1)$$

гиперплоское сечение  $X$  общего положения:  $Y = X \cap \mathbb{P}^{n-1}$

Возьмем модуль  $M$  и напишем его <sup>м.н.м.</sup> свод. резольвенту

$$A = k[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} S(-b) \cong A \text{ образующие в степени } b: \deg 1 = b \quad \text{в } \mathbb{P}^n$$

$$H_{S(-b)}(t) = C_{n+t-b}^n$$

$$\dots \longrightarrow \bigoplus S(-b_s) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

т. Липберга о сечениях говорит, что длина этой резольвенты  $\leq n$   
 степени этих образующих  $b_s$  можно ограничить чем-то,  
 зависящим от самого многочлена Липберга

Замечание \* \* \* многочлен Липберга \* \* \* зависит от вложения  $X \subset \mathbb{P}^n$

$$\mathbb{P}^n(X) = \{ F \in \mathcal{O}_X^{n+1}, \text{rank } F = r \}$$

схема или функтор

$$\text{или } \{ \mathcal{O}_X^{n+1} \longrightarrow \mathcal{L}, \text{rank } \mathcal{L} = 1 \}$$

$$\boxed{\text{Yab}} \quad P_X(t_0) = \chi(\mathcal{L}^{\otimes t_0}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{L}^{\otimes t_0})$$

$P_X(0)$  ни от чего не зависит:

$$\chi(\mathcal{O}_X)$$

$X$  - гладкая проективная кривая  $\rightarrow P_X(t) = c_1 t + c_0$

$$P_X(0) = 1 - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 1 - g$$

$$\text{т.е. } g = 1 - P_X(0)$$

арифметический род многообразия

2

Альтернативное определение:

$X$  - схема,  $\mathcal{L}$  - обратное расслоение,  $F$  - когерентный пучок

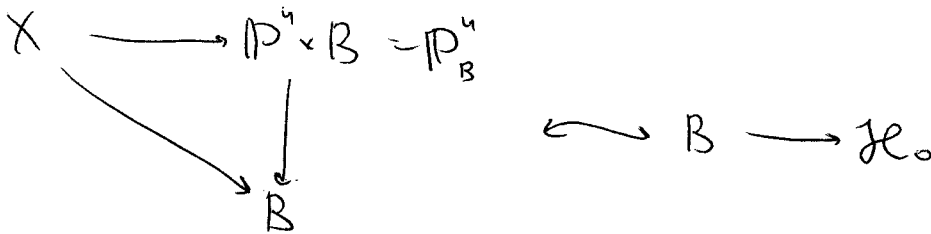
$$\rightarrow P_{X, \mathcal{L}, F}(t_0) = \chi(F \otimes \mathcal{L}^{\otimes t_0}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, F \otimes \mathcal{L}^{\otimes t_0})$$

$\swarrow$   $k$ -алгебра

$$\text{Gr}(k, n)(T) = \{ \text{---} // \text{---} \text{ ранга } k \}$$

$$\mathbb{P}^n = \{ \text{---} // \text{---} \text{ ранга } n-1 \}$$

Схема Гильберта: хотим построить схему танго, что  $k$ -точки соответствуют неприведенным многообразиям с данным многочленом Гильберта



Опр. Функциор  $\mathbb{Z}$ -Sch  $\xrightarrow{\mathcal{H}_0}$  Sets

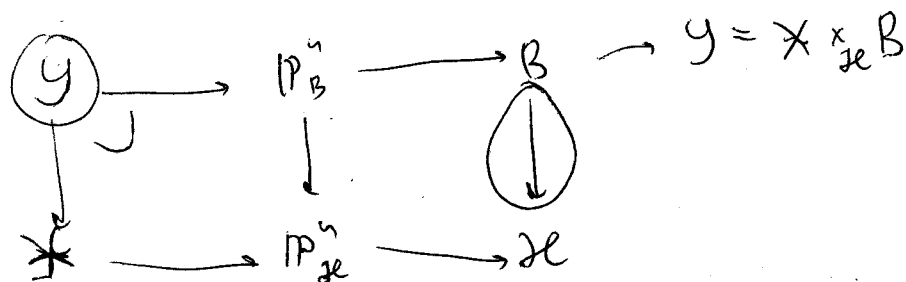
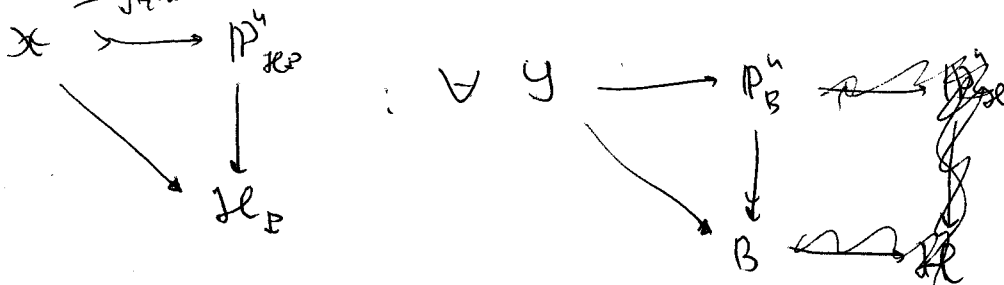
$$h_{\mathbb{P}}(B) = \left\{ \begin{array}{l} X \xrightarrow{\quad} \mathbb{P}_B^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times B \\ \quad \searrow \quad \downarrow \\ \quad \quad B \end{array} \right\}$$

$\varphi$ -посекы, и  $\forall \theta$  свои многочлен Гильберта равен  $E$

$S$ -схема  $\rightarrow S$ -Sch  $\rightarrow$  Sets схема Гильберта

$$h_{B, S} = h_{\mathbb{P}} \times_{\mathbb{Z}} S$$

наличие схемы Гильберта = наличие унив. тоского ~~существо~~ семейства   
 - унив. семейства



Можно доказать то, что  $h_p$  представим

$h_p(B) = ?$ , если  $B = \text{Spec } R$ ,  $R$  - локальное кольцо

$X \sim$  соответствует  $R[x_0, \dots, x_n] / I(X) = M$   
 $A = R[x_0, \dots, x_n]$

$\text{codim}(I_m) = P_X(m)$  начальная степ.  $m$

Утверждение:  $\exists m_0$ : для  $m > m_0 \forall X \in h_p(B)$

$$\text{codim}(I_m) = P_X(m)$$

кон. непр. модуль

$I_m$  проектив над  $R \rightarrow$  он свободен

$I_{m_0}(X)$  - прямое слагаемое в  $A_m$

его размерность  $C_{m+n}^n$

Тогда  $I_{m_0}(X)$  определяет точку на  $G = \text{Gr}(C_{m+n}^n, P(m)) (R)$

$\rightarrow$  вложим схему Гильберта в эту Grassmannian

$$I(X)_{m_0+k} \cap S_k \in S_{k, m_0+k}, \quad S = \mathbb{Z}[...]$$

$$I_{m_0+k} \quad \dim(I_{m_0+k} \cdot S_k) \leq \dim S_{k, m_0+k} - P(m_0+k)$$

замкнутое условие

Другие свойства:

$U$  - универсальное рассечение над  $G$

multu:  $U \otimes S_k \rightarrow S_{k+m}$  - умножение

$$\text{rank}(\text{multu}) \leq \boxed{\dots}$$

Свойства:

①  $\text{Gr}_s(k, n) = \mathcal{Y}_{P, s}$ ,  $P = C_{k+t}^k$

②  $\deg(X) \cdot t + (1-g) = \mathcal{Y}(t)$

$P(t) = 2t+1$  - многообразие конуса