$\boxed{09.05.2012}$

А. Кешитов

R, U – схемы

$R \longrightarrow U\times U$ – groupoid scheme

то есть U – схема, R-отношение эквивалентности на U, но не обязательно R вкладывается в U

Например, $G \longrightarrow pt\times pt$ $\qquad [R \rightrightarrows U]$

$$[G \rightrightarrows pt] = BG$$

$s,t : R \longrightarrow U$

$e : U \longrightarrow R$ – рефлективность

$i : R \longrightarrow R$ – симметричность

$m : R\times_U R \longrightarrow R$

$$\begin{tikzcd} R\times_{} R \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d, "t"] \\ R \arrow[r, "s"'] & U \end{tikzcd}$$

+ аксиомы:

① $$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend right, "id_U"'] & R \arrow[r, "s,t"] & U \end{tikzcd}$$ ... и так далее

т.е. это внутренний группоид в категории схем

① $U \longrightarrow X$

$R = U\times_X U \qquad R \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} U$

② $U = \mathrm{Spec}\, k \rightsquigarrow R$ – групповая схема

③ G – алг. группа, $U \curvearrowleft G$

$R = U\times G \qquad s : U\times G \xrightarrow{\pi_1} U$

$\qquad\qquad\qquad\quad t : U\times G \xrightarrow{u.g} U$

s, t – эталные $\rightsquigarrow$ étale атлас

гладкие $\rightsquigarrow$ гладкий атлас

плоские $\rightsquigarrow$ плоский атлас

$\mathrm{CFG} \longrightarrow$ groupoid schemes

$\Downarrow$ – категории, расслоенные в группоидах

$\mathfrak{X}$

U – схема,

$\underline{U} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{X}$ так, что $\underline{U}\times_{\mathfrak{X}}\underline{U} \simeq \underline{R}$

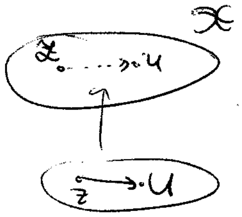
Тогда $R \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} U$ – groupoid scheme

Пусть $\mathfrak{X}$ – CFG

U, V – две схемы, $\mathcal{U} \in \mathfrak{X}(U)$ тогда $\mathcal{U} : \underline{U} \longrightarrow \mathfrak{X}$

$\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(V)$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d] & \\ U & \end{tikzcd} \longmapsto \mathfrak{z}$$



Аналогично, V задает морфизм $\underline{V} \longrightarrow \mathfrak{X}$

$$Sym_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U}, v) := \underline{U} \times_{\mathfrak{X}} \underline{V}$$

когда это схема?

Всегда $\underline{S} \times_{\mathfrak{X}} \underline{T}$ – CFG без нетривиальных морфизмов

все слои = множества (дискретные)

Предположим, что

$Sym_{\mathfrak{X}}(U, V)$ изоморфно $\underline{T}$

Какой ее слой над S?

$$Sym_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U}, V)(S) = \left\{ (f, g, \varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} f: S \longrightarrow U \\ g: S \longrightarrow V \\ \varphi: f^*(U) \xrightarrow{\sim} g^*(V) \text{ в } \mathfrak{X}(S) \end{array} \right\}$$

$\wr\!\wr$ естественно

$$Hom(S, T)$$

$\mathfrak{X} = [X/G]$ $\qquad \underline{X} \longrightarrow [X/G]$

$G \curvearrowright X \rightsquigarrow$

$$\left(\begin{tikzcd} S \arrow[d, "f"'] \\ X \end{tikzcd} \right) \longmapsto \left(\begin{tikzcd} S \times G \arrow[r] \arrow[rd, "f \times 1"'] \arrow[d] & X \\ S & X \times G \arrow[u] \end{tikzcd} \right)$$

Посмотрим на $\underline{X} \times_{[X/G]} \underline{X} \cong \underline{X \times G}$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "\alpha"] & T \arrow[d, "\beta"] \\ X & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (s,g) \arrow[r, mapsto] & g \cdot \alpha(s) & & \\ S \times G \arrow[rr, bend left=20] \arrow[r, "F"] \arrow[d] \arrow[rd, phantom, "\lrcorner"] & T \times G \arrow[r] \arrow[d] & X & g \cdot \beta(s) \\ S \arrow[r] & T & (t,g) \arrow[ru, mapsto] & \end{tikzcd}$$

$F: (s, g) \longmapsto (f(s), g\varphi(s))$ $\qquad (g \cdot \beta)(f(s)) = (g \cdot \alpha)(s)$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi: S \to G \\ S \to X \end{array} \right\} \rightsquigarrow S \longrightarrow G \times X$$

$(s, g) \longmapsto (s, \varphi(s) g)$

Обратно:

$$\left(\begin{tikzcd} S \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "\alpha"] \\ X \times G \arrow[d, "\pi_X"] \\ X \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} S \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "\beta"] \\ X \times G \arrow[d, "act"] \\ X \end{tikzcd} \right) \longmapsto \left(\begin{tikzcd} S \arrow[d, "\alpha"] \\ X \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} S \arrow[d, "\beta"] \\ X \end{tikzcd} \right), \quad \begin{tikzcd} S \times G \arrow[r] \arrow[d] & S \times G \arrow[d] \\ S \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$