1 Введение в высшую теорию категорий (30 мая)

1.1 Моноидальные категории

Мы будем называть **строгой моноидальной категорией** внутренний моноид в категории $\mathcal{C}at$ всех категорий, то есть, категорию $\mathcal{A}$ вместе с функтором $\otimes\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to A$ и выделенным объектом $I\in\mathcal{A}$, для которых выполняются следующие *равенства*: $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$, $A\otimes I = A = I\otimes A$ для всех объектов A,B,C, и аналогично для морфизмов. Функториальность $\otimes$ означает, что выполняется равенство $(f\circ g)\otimes(f'\circ g') = (f\otimes f')\circ(g\otimes g')$ для всех морфизмов, для которых определены нужные композиции, и $1_A\otimes 1_B = 1_{A\otimes B}$ для всех объектов A,B.

Равество объектов — достаточно сильное условие, поэтому строгих моноидальных категорий не так много.

Примеры 1.

1. Категория $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ эндофункторов данной категории $\mathcal{C}$ обладает строгой моноидальной структурой: в качестве $\otimes$ здесь выступает композиция, а в качестве I — тождественный эндофунктор.

2. Пусть $\underline{n}$ обозначает n-элементное множество $\{1,\ldots,n\}$ вместе с обычным отношением (полного) порядка. Пусть $\mathcal{D}$ — категория, объектами которой являются натуральные числа, а морфизмами $m\to n$ — неубывающие отображения упорядоченных множеств $\underline{m}\to\underline{n}$. Нетрудно видеть, что операция сложения и натуральное число 0 задают структуру строгой моноидальной категории на $\mathcal{D}$.

3. Как известно, категория с одним объектом — это то же самое, что моноид (на единственном множестве морфизмов, с операцией композиции). Строгая моноидальная категория с одним объектом, стало быть, обладает двумя структурами моноида на единственном множестве морфизмов — $\circ$ и $\otimes$; понятно, что тождественный морфизм является единицей по отношению к обеим структурам. Кроме того, эти структуры связаны функториальностью $\otimes$. Тогда операции $\circ$ и $\otimes$ совпадают и коммутативны: действительно, $f\circ g = (f\otimes 1)\circ(1\otimes g) = (f\circ 1)\otimes(1\circ g) = f\otimes g$ и $f\circ g = (1\otimes f)\circ(g\otimes 1) = (1\circ g)\otimes(f\otimes 1) = g\otimes f$.

Гораздо чаще встречаются слабые моноидальные категории, которые мы будем называть просто моноидальными категориями.

(Слабой) моноидальной категорией называется категория $\mathcal{A}$ вместе с функтором $\otimes\colon\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, объектом $I\in\mathcal{A}$ и изоморфизмами $(A\otimes B)\otimes C \xrightarrow[\sim]{\alpha_{A,B,C}} A\otimes(B\otimes C)$, $I\otimes A\xrightarrow[\sim]{\lambda_A} A$, $A\otimes I\xrightarrow[\sim]{\rho_A} A$, естественными по $A,B,C\in\mathcal{A}$, такими, что диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] & \\
((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] \arrow[d, "\alpha_{A,B,C}\otimes 1_D"'] & & A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \\
(A\otimes(B\otimes C))\otimes D \arrow[rr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"'] & & A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[u, "1_A\otimes\alpha_{B,C,D}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes I)\otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A\otimes 1_B"'] & & A\otimes(I\otimes B) \arrow[dl, "1_A\otimes\lambda_B"] \\
 & A\otimes B &
\end{tikzcd}$$

Изоморфизмы α, λ, ρ называются **изоморфизмами когерентности**. Очевидно, можно считать, что строгие моноидальные категории — это в точности те моноидальные категории, у которых все изоморфизмы когерентности являются тождественными.

Примеры 2.
1. Пусть $\mathcal{A}$ — категория с конечными произведениями. Выберем для каждой пары объектов $A, B \in \mathcal{A}$ конкретное прямое произведение $A \times B$ и фиксируем терминальный объект $I \in \mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}$ становится моноидальной категорией относительно тензорного произведения $A \times B := A \times B$.

2. Категория модулей над коммутативным кольцом R является моноидальной категорией относительно тензорного произведения R-модулей и тривиального модуля R.

3. Для топологического пространства с отмеченной точкой рассмотрим категорию петель: ее объекты — петли в отмеченной точке, а морфизмы — гомотопические классы гомотопий петель, сохраняющих отмеченную точку (мы должны брать именно гомотопические классы, а не сами гомотопии петель, поскольку композиция морфизмов в категории должна быть ассоциативной). Роль тензорного произведения играет конкатенация петель (на объектах) и склеивание гомотопий (на морфизмах).

Существуют различные определения морфизмов между моноидальными категориями. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ — моноидальные категории. **Вялым моноидальным функтором** называется функтор $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ вместе с **морфизмами когерентности** $\phi_{A,B}\colon FA \otimes FB \to F(A \otimes B)$, $\varphi\colon I \to FI$ в категории $\mathcal{A}'$ такими, что $\phi_{A,B}$ естественны по $A, B \in \mathcal{A}$, и диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(FA \otimes FB) \otimes FC \arrow[r, "\phi_{A,B}\otimes 1_{FC}"] \arrow[d, "\alpha_{FA,FB,FC}"] & F(A \otimes B) \otimes FC \arrow[r, "\phi_{A\otimes B,C}"] & F((A \otimes B) \otimes C) \arrow[d, "F\alpha_{A,B,C}"'] \\
FA \otimes (FB \otimes FC) \arrow[r, "1_{FA}\otimes\phi_{B,C}"'] & FA \otimes F(B \otimes C) \arrow[r, "\phi_{A,B\otimes C}"'] & F(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FA \otimes I \arrow[r, "1_{FA}\otimes\phi"] \arrow[d, "\rho_{FA}"'] & FA \otimes FI \arrow[r, "\phi_{A,I}"] & F(A \otimes I) \arrow[d, "F\rho_A"'] \\
FA \arrow[rr] & & FA
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes FA \arrow[r, "\phi\otimes 1_{FA}"] \arrow[d, "\lambda_{FA}"'] & FI \otimes FA \arrow[r, "\phi_{I,A}"] & F(I \otimes A) \arrow[d, "F\lambda_A"'] \\
FA \arrow[rr] & & FA
\end{tikzcd}$$

коммутативны для всех $A, B, C \in \mathcal{A}$. Морфизмы когерентности можно направить в другую стророну: если заданы морфизмы $F(A \otimes B) \to FA \otimes FB$ и $FI \otimes I$, удовлетворяющие аналогичным свойствам, F называется **ковялым моноидальным функтором**.

Слабым моноидальным функтором называется вялый моноидальный функтор, у которого все морфизмы когерентности являются изоморфизмами. **Строгим моноидальным функтором** называется вялый моноидальный функтор, у которого все морфизмы когерентности являются тождественными морфизмами.

Пусть теперь (F, ϕ), (G, ψ) — два вялых моноидальных функтора между моноидальными категориями $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$. **Моноидальным преобразованием** называется естественное преобразование τ между функторами F и G, для которого диаграммы

$$\begin{tikzcd}
FA \otimes FB \arrow[r, "\tau_A \otimes \tau_B"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & GA \otimes GB \arrow[d, "\psi_{A,B}"'] \\
F(A \otimes B) \arrow[r, "\tau_{A \otimes B}"'] & G(A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & I \arrow[d, "\psi"'] \\
FI \arrow[r, "\tau_I"'] & GI
\end{tikzcd}$$

коммутативны для всех $A, B \in \mathcal{A}$.

Слабый моноидальный функтор называется **эквивалентностью** моноидальных категорий, если он является эквивалентностью категорий в обычном смысле.

Теорема 1 (Когерентность для моноидальных категорий)**.** *Всякая моноидальная категория эквивалентна некоторой строгой моноидальной категории.*

Заметим, что это нетривиальная теорема. Действительно, можно попытаться наивно отождествить изоморфные объекты (заменив изоморфизмы на равенства). Однако, существуют категории, в которых любые два изоморфных объекта равны (в частности, $(A\otimes B)\otimes C$ всегда равно $A \otimes (B \otimes C)$), но структура моноидальной категории такова, что морфизмы когерентности $\alpha_{A,B,C}$ не являются тождественными морфизмами. Для такой категории отождествление изоморфных объектов никак не меняет ее. Если же попытаться склеить изоморфизмы когерентности с тождественными, то полученный функтор не будет строгим, и тем более не будет эквивалентностью категорий. Правильная идея доказательства состоит в том, что в качестве объектов новой строгой моноидальной категории $\mathcal{A}'$ можно рассмотреть пары (E, δ), где E — эндофунктор на исходной категории $\mathcal{A}$, а δ — набор изоморфизмов $\delta_{A,B} \colon (EA) \otimes B \xrightarrow{\sim} E(A \otimes B)$ для всех пар объектов $A, B \in \mathcal{A}$, естественных по A, B, и удовлетворяющих очевидным аксиомам когерентности. Тогда функтор $i \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ можно определить как $i(Z) = (Z \otimes -, \alpha_{Z,-,-})$.

Из теоремы когерентности, в частности, следует, что в определении слабой моноидальной категории достаточно ограничиться пятиугольной аксиомой: если есть любая диаграмма, составленная из изоморфизмов когерентности, то все пути между любыми двумя объектами в ней должны быть равны.

1.2 Оснащенные категории

Пусть $\mathcal{A}$ — моноидальная категория. **Категория X, оснащенная над $\mathcal{A}$**, или **$\mathcal{A}$-оснащенная категория** X — это множество X_0 вместе с объектами $\mathrm{Hom}_X(a,b) \in \mathcal{A}$ для каждой пары элементов $a, b \in X_0$ и морфизмами $\mathrm{Hom}_X(b,c) \otimes \mathrm{Hom}_X(a,b) \to \mathrm{Hom}_X(a,c)$ («композиция»), $I \to \mathrm{Hom}_X(a,a)$ («тождественный морфизм») для всех элементов $a, b, c \in X_0$, удовлетворяющими очевидным аксиомам. **$\mathcal{A}$-оснащенный функтор** f между $\mathcal{A}$-оснащенными категориями X и Y — это отображение множеств $f_0 \colon X_0 \to Y_0$ вместе с согласованными морфизмами $\mathrm{Hom}_X(a,b) \to \mathrm{Hom}_Y(Fa, Fb)$ множеств, коммутирующими с морфизмами композиции и тождественными. Мы получаем категорию $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}at$ $\mathcal{A}$-оснащенных категорий.

Нам понадобятся категории, оснащенные над категориями, в которых моноидальная структура задается обычным прямым произведением. Несложно показать, что если $\mathcal{A}$ — категория с конечными произведениями, то и $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}at$ — категория с конечными произведениями.

Теперь можно определить строгие n-категории. Построим по индукции следующую последовательность категорий: $\mathcal{S}tr\text{-}0\text{-}\mathcal{C}at = \mathcal{S}et$, $\mathcal{S}tr\text{-}(n+1)\text{-}\mathcal{C}at = (\mathcal{S}tr\text{-}n\text{-}\mathcal{C}at)\text{-}\mathcal{C}at$. **Строгой n-категорией** называется объект $\mathcal{S}tr\text{-}n\text{-}\mathcal{C}at$, а **строгим n-функтором** — морфизм в $\mathcal{S}tr\text{-}n\text{-}\mathcal{C}at$.

Нетрудно видеть, что строгие 0-категории — это просто множества, а строгие 1-категории — это обычные категории.

Посмотрим на альтернативное, более явное определение строгой n-категории. Будем называть **n-глобальным множеством** X диаграмму

$$\begin{tikzcd} X(n) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & X(n-1) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & \cdots \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & X(0) \end{tikzcd}$$

множеств и отображений между ними, таких, что $s(s(x)) = s(t(x))$ и $t(s(x)) = t(t(x))$ для всех $x \in X(i)$, $i = 2, \ldots, n$. Мы воспринимаем $X(i)$ как множество i-морфизмов (0-морфизмы = объекты, 1-морфизмы = морфизмы между объектами, $\ldots$, n-морфизмы = морфизмы между $(n-1)$-морфизмами), а s и t — как функции, сопоставляющие i-морфизму его начало и конец соответственно.

Другими словами, n-глобальное множество — это предпучок на категории, порожденной объектами и морфизмами

$$\begin{tikzcd} n & n-1 \arrow[l, shift right, "\tau_n"'] \arrow[l, shift left, "\sigma_n"] & \cdots \arrow[l, shift right, "\tau_{n-1}"'] \arrow[l, shift left, "\sigma_{n-1}"] & 0 \arrow[l, shift right, "\tau_1"'] \arrow[l, shift left, "\sigma_1"] \end{tikzcd}$$

с соотношениями $\sigma_i \circ \sigma_{i-1} = \tau_i \circ \sigma_{i-1}$, $\sigma_i \circ \tau_{i-1} = \tau_i \circ \tau_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$.

Чтобы получить определение строгой n-категории, осталось описать композицию морфизмов. Нетрудно понять, что должно быть два типа композиции 2-морфизмов (например, «горизонтальная» и «вертикальная» композиции естественных преобразований функторов между категориями), три типа композиции 3-морфизмов, и так далее. Обозначим через

$$X(m) \times_{X(p)} X(m) = \{(x', x) \in A(m) \times A(m) \mid t^{m-p}(x) = s^{m-p}(x')\}$$

множество пар m-морфизмов, для которых должна быть определена композиция за счет общего k-морфизма. Назовем **строгой n-категорией** n-глобальное множество X вместе с функцией $\circ_p \colon A(m) \times_{A(p)} A(m) \to A(m)$ для всех $0 \le p < m \le n$ (мы пишем $\circ_p(x', x) = x' \circ_p x$ и называем это **p-композицией** x и x') и функцией $i \colon A(p) \to A(p+1)$ для вех $0 \le p < n$ (мы пишем $i(x) = 1_x$ и называем это **тождественным $(p+1)$-морфизмом** на x, удовлетворяющими очевидным аксиомам, выражающим согласованность начал и концов композиций и тождественных морфизмов, ассоциативность и условия замены типа $(y' \circ_p y) \circ_q (x' \circ_p x) = (y' \circ_q x') \circ_p (y \circ_q x)$. **Строгим n-функтором** между строгими n-категориями называется отображение n-глобальных множеств (например, рассматриваемых как предпучки), коммутирующее с композицией и тождественными морфизмами.

Утверждение 1. *Полученная категория строгих n-категорий эквивалентна категории $\mathcal{S}tr\text{-}n\text{-}\mathcal{C}at$.*