04.07.2012
А. Бешенов

$Z: \underline{Cob}(n) \longrightarrow \underline{Vect}(k)$ — TFT

$(\underline{Cob}(n), \sqcup, \varnothing)$ $\quad$ $(\underline{Vect}(k), \otimes, k)$ — моноидальные структуры

Хочется их классифицировать

<u>n=1</u> $\quad$ $Z(S^1)$ полностью определяет TFT

алгебра Фробениуса

$Z(pt) = V$ (тогда $Z(pt_-) = V^\vee$ и рассматриваем $\varnothing \bigcirc \varnothing$)

при этом $\dim Z(M) < \infty$

$Z: \underline{Bord}_n^{fr} \longrightarrow \mathcal{C}$ — extended TFT

(∞, n)-категория $\quad$ (∞, n)-категория

$(\underline{Bord}_n, \sqcup, \varnothing)$ — моноидальная структура

$Z \rightsquigarrow Z(*)$

такой функтор индуцирует биекцию между

$\boxed{\text{extended TFT с оснащением}}$ и $\boxed{\text{объекты } \mathcal{C}}$ (+ условие конечности)

<u>полностью дуализируемые</u>

Неформально говоря, $Bord_n$ устроена так:

объекты — 0-многообразия

1-морфизмы — кобордизмы между 0-многообразиями

2-морфизмы — кобордизмы между кобордизмами — это уже многообразия с углами, т.е. локально гомеоморфны $[0,\infty)^k \times \mathbb{R}^n$

⋮

$(n+1)$-морфизмы — диффеоморфизмы

$(n+2)$-морфизмы — изотопии диффеоморфизмов

Вспомним $\Pi_{\le n}(X)$; все k-морфизмы обратимы для $1 \le k \le n$

$\boxed{\text{„n-группоид"}}$ $\quad$ Пусть $\pi_k(X; x_0) = 0$ для $k > n$

$\updownarrow$ — биекция

$\boxed{X}$ такие X, что

(∞, n)-категория: $\quad Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ — $(\infty, n-1)$-категория

$(\infty, 1)$-категория = топологическая категория

т.е. структура топ. пр-ва и

композиция $Hom(X,Y) \times Hom(Y,Z) \longrightarrow Hom(X,Z)$ непрерывна

и „ассоциативна" с точностью до гомотопий

$\boxed{\text{Пример}}$

X — гладкое проективное алгебраическое многообразие над k

$$\downarrow$$

$HH^*(X)$ — когомологии Хохшильда

— градуированная коммутативная алгебра

$$\underset{p}{x}\,\underset{q}{y} = (-1)^{pq}\, yx$$

= коммутативная алгебра в категории $\mathbb{Z}/2$-градуированных векторных пространств.

$$HH^*(X) \xrightarrow{tr} k$$

— след

— невырожденное (при некоторых предположениях на X: например, X — Калаби-Яу четной размерности)

Ω^n_X тривиально, $n = \dim X$

→ tr задает структуру алгебры Фробениуса в категории $\mathbb{Z}/2$-градуированных векторных пространств.

По заданной алгебре Фробениуса можно найти Z_X такой, что $Z_X(S^1) = HH^*(X)$

Пусть теперь M — гладкое (дифф.) многообразие

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\text{функтор}"] \arrow[dd, bend right] \\ \overline{Z}(M) \arrow[d, "\text{когомологии}"] \\ Z(M) \end{tikzcd}$$

$\overline{Z}(M)$ — цепной комплекс

$Z(M)$ → теория поля со значением в $\mathrm{Vect}(k)$

$\underline{\text{„Определение"}}$ TFT со значениями в цепных комплексах — это симметрический моноидальный функтор

$$\overline{Z} : \underline{\mathrm{Cob}(n)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Chain}(k)}$$

$$M \;\substack{B \\ \longrightarrow \\ \mathbb{R} \\ \longrightarrow \\ B'}\; N$$

→ есть $\overline{Z}(B)$ и $\overline{Z}(B')$ такие, что их когомологии изоморфны

→ $Z(B) \simeq Z(B')$

$\mathcal{B}(M, N)$ $\qquad M \xrightarrow{B} N$

многообразия размерности $n-1$,, классифицирующее пространство кобордизмов $M \to N$"

BC, где C устроена так:

объекты = кобордизмы

морфизмы = диффеоморфизмы, тождественные на M и N

Тогда $\mathrm{Hom}_C(B, B')$ — топологическая категория

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ \mathcal{B}(M,N) \end{array}$$

— слои — кобордизмы

— классифицирующее пространство категории C

$$\boxed{\begin{array}{c} E' \\ \downarrow \\ S \end{array}} \simeq \boxed{\underbrace{[S; \mathcal{B}(M,N)]}_{\text{гомотопические классы отображений}}}$$

$\forall$,,хорошего" S

Например, для $S = *$ получаем, что

$$[*, \mathcal{B}(M,N)] = \pi_0 \mathcal{B}(M,N) = \mathrm{Hom}_{Cob(n)}(M,N)$$

$$\pi_0 \mathcal{B}(M,N) \xrightarrow{\alpha} [\overline{Z}(M), \overline{Z}(N)]$$

— гомотопические классы цепных отображений комплексов

$$\rightsquigarrow H_0(\mathcal{B}(M,N), k) = \bigoplus_{\substack{\text{комп.} \\ \text{связности}}} k$$

$$\downarrow$$

$$[\overline{Z}(M), \overline{Z}(N)]$$

Определим комплекс $\mathrm{Map}(\overline{Z}(M), \overline{Z}(N))$:

$$\mathrm{Map}(\overline{Z}(M), \overline{Z}(N))_i := \prod_n \mathrm{Hom}(\overline{Z}(M)_n, \overline{Z}(N)_{n+i})$$

$\rightsquigarrow$ потребуем, чтобы был

$$C_*(\mathcal{B}(M,N), k) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Map}(\overline{Z}(M), \overline{Z}(N))$$

сингулярный комплекс

В частности,

$$\underbrace{C_0(\mathcal{B}(M,N), k)}_{\text{все 0-циклы}} \xrightarrow{\gamma_0} \underbrace{\mathrm{Map}(\overline{Z}(M), \overline{Z}(N))_0}_{\text{здесь циклы = цепные отображения } \overline{Z}(M) \to \overline{Z}(N)}$$

то есть,

$$x \in \mathcal{B}(M,N) \longmapsto \overline{Z}(M) \xrightarrow{\gamma_0(x)} \overline{Z}(N) \text{ — цепное отображение}$$

Далее,

$$C_1(\mathcal{B}(M,N),k) \xrightarrow{\gamma_1} \mathrm{Map}(\bar{Z}(M),\bar{Z}(N))_1$$

$$\cong \ \cancel{\mathrm{Hom}}\ [\bar{Z}(M),\bar{Z}(N)]$$ — цепные гомотопии

$p(0)=x$ $\quad p \quad$ $p(1)=y$

$$\begin{array}{ccc} \bar{Z}(M) & \xrightarrow{\gamma_0(x)} & \bar{Z}(N) \\ & \Downarrow \gamma_1(p) & \\ \bar{Z}(M) & \xrightarrow{\gamma_0(y)} & \bar{Z}(N) \end{array}$$

Итог: для задания TFT со значениями в цепных комплексах нужно задать γ.

$K(V_*)$ — (обобщенное) пространство Эйленберга–Маклейна
комплекс
определен с точностью до слабой гомотопической экв-сти

т.е. универсальное св-во

$$[C_*(X,k);V_*] \cong [X, K(V_*)]$$

В частности, $\pi_m(K(V_*)) \cong H_m(V_*)$.

$$\mathcal{B}(M,N) \xrightarrow{\gamma_{MN}} K(\mathrm{Map}(\bar{Z}(M),\bar{Z}(N)))$$

$$\bar{Z} : \underline{\mathcal{C}ob_t(n)} \longrightarrow \underline{\mathcal{C}hain_t(k)}$$ — симметрич. моноидальный функтор

морфизм между M и N

объекты: $(n-1)$-многообразия
морфизмы: (раньше были классы диффеоморфности)
теперь: $M \xrightarrow{B} N$
$\mathrm{Hom}(M,N) = \mathcal{B}(M,N)$.

и $\bar{Z}$ должен быть в каком-то смысле „непрерывным"
т.е. непонятно, в каком смысле это слабые моноидальные категории (какие там когерентности?)

---

fully dualizable objects: (условие на „конечномерность")
на $\underline{Vect}(k)$ есть операция взятия двойственного $V \rightsquigarrow V^\vee$

$$k \xrightarrow{coev} V \otimes V^\vee \qquad \mathrm{Hom}(W, W'\otimes V) \to \mathrm{Hom}(W\otimes V^\vee, W'\otimes V \otimes V^\vee)$$

$$\searrow^{\cong} \qquad \downarrow$$

$$\mathrm{Hom}(W\otimes V, W')$$

V — к/м.

Обратная стрелка строится при помощи coev.
поэтому coev „имеет смысл" только для конечномерных пр-в

Это наблюдение позволяет перенести определение на случай любой моноидальной категории, и сформулировать ~~—~~ определение полностью дуализируемого ~~объекта~~ объекта в (∞, n)-категории

$$\underbrace{\underline{\mathrm{Bord}}_n^{fr} \longrightarrow \underline{\mathcal{C}}}$$

(∞, n)-категории с симм. моноидальной структурой — поэтому определение двойственности хитрое; оно должно быть для k-морфизмов $\forall k$

Гипотеза

функторы, уважающие симм. моноидальные стр-ры

$$\underbrace{\mathrm{Func}^{\otimes}(\underline{\mathrm{Bord}}_n^{fr}, \underline{\mathcal{C}})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\sim}$$

(∞, n)-категории

где $\mathcal{C}^{\sim}$ — $(\infty, 0)$-категория, полученная из $\mathcal{C}$ дуализируемых объектов выкидыванием необратимых стрелок