Nikita Semenov

14.12.2004

Мотивные разложения однородных проективных многообразий

1. Фильтрации

G (расщепимая) простая алгебр. группа над k

Примеры: $SL_n,\ SO_{2n},\ SO_{2n+1},\ Sp_{2n},\ G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$

$\Phi = A_{n-1}\quad D_n\quad B_n\quad C_n$

$Spin_n, PGL_n, \ldots$

Π – простые корни

$\alpha \in \Phi \rightsquigarrow X_\alpha$ – корн. подгруппа

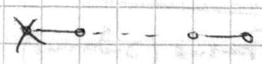
T – max (расщ.) тор (диаг. матрицы)

$B = \langle T, X_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \rangle$

$\Theta \subset \Pi \to P = P_\Theta = \langle B, X_\beta \mid -\beta \in \Theta \rangle = B W_\Theta B$, где $W_\Theta = \langle s_\beta \mid \beta \in \Theta \rangle$ – группа Вейля группы P

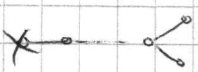
Если $\Theta = \Pi \setminus \{i\}$, то $P_\Theta = P_i$

Примеры: SL_n



$$P_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \qquad P_k = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)}_{k}\Big\}k \qquad B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

SO_{2n}



$$P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} * & & \\ \hline & * & \\ \hline & & * \end{array}\right)$$

Факторпространство $G/P = X$, т.е. G действ. на X и $P = \mathrm{Stab}$ какой-то точки X.

$$SL_n/P_1 = \mathbb{P}^{n-1}$$

$$SL_n/P_k = Gr(k,n) \text{ – } k\text{-мерн. подпрв. в } n\text{-мерном пр-ве}$$

$$SO_{2n}/P_1 \simeq Q_{2n-2}$$

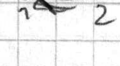
$$\Vert$$

$$\cancel{\{x_1 : x_{-1} : x_2 : x_{-2}}$$

$$\{[x_1 : x_2 : \ldots : x_n : x_{-n} : \ldots : x_{-2} : x_{-1}] \mid \sum_{i=1}^n x_i x_{-i} = 0\}$$

$$\cap$$

$$\mathbb{P}^{2n-1}$$



$G_2/P_1 \simeq Q_5 \qquad G_2 = \mathrm{Aut}\,\mathbb{O}$

$H = \{T_r = 0\}$

$G_2/P_2 = \{D \in Gr(2,H) \mid \forall u, v \in D\ uv = 0\}$

Опр (Абсолютное) клеточное пространство (CW-complex)

$$X = X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \dots \supsetneq X_m \supset \emptyset$$

подмногообразия

X – клет. пр-во, если $X_0 \setminus X_1, X_1 \setminus X_2, \dots, X_{m-1} \setminus X_m$ – все изоморфны аффинным

$\mathbb{A}^{r_0}, \mathbb{A}^{r_1}, \dots, \mathbb{A}^{r_{m-1}}$, $X_m \cong \mathbb{A}^0$

Удобнее считать, что мы не клетки, а объединение клеток

X – относительное клеточное пространство

$$X = X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \dots \supsetneq X_n \supset \emptyset$$

$X_0 \setminus X_1, X_1 \setminus X_2, \dots, X_{n-1} \setminus X_n$

vector bundles – $\downarrow \mathbb{A}^{r_0}$ над Y_0, $\downarrow \mathbb{A}^{r_1}$ над Y_1

проективные многообразия (задание)

① $\mathbb{P}^n \supset \mathbb{P}^{n-1} \supset \dots \supset \mathbb{P}^t \qquad Gr(1,n) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$

② $Gr(k,n)$ – см. Schubert calculus

③ $(d+1)\mathbb{H} \supset \mathbb{P}^d$, $\mathbb{P}^d \xrightarrow{\mathbb{A}^d} \mathbb{P}^d$

расщепимая квадрика; {d-мерная гиперболич. плоскость

$$(d+1)\mathbb{H} = \{[x_0 : y_0 : \dots : x_d : y_d] \in \mathbb{P}^{2d+1} \mid \sum x_i y_i = 0\}$$

$$\mathbb{P}^d \simeq \{x_0 = x_1 = \dots = x_d = 0\} \subset (d+1)\mathbb{H} \xrightarrow{\mathbb{A}^d} \{y_0 = y_1 = \dots = y_d = 0\}$$

④ (Rost) $Q = \mathbb{H} \perp Q' = \{xy + q(z_1, \dots, z_d) = 0\}$

$$Q \supset \{y = 0\} \supset \{[1 : 0 : \dots : 0]\} \supset \emptyset$$

$\downarrow \mathbb{A}^d$ к pt, $\downarrow \mathbb{A}^1$ к Q'

⑤ (Köck)

Вопрос-пример {Chernousov, Merkuriev, Gille} относит. клеточного пространства X: все X_i – гладкие, $X = G/P$

(Рост – не гладкие, (1)–(3) – ед. примеры гладких)

$$G/P_\Theta = \coprod_{w\in W^\Theta} Y_w \qquad Y_w = {}^{U_w P}/_P \simeq \mathbb{A}^{\ell(w)}$$

$$W^\Theta = \{ w\in W \mid \forall s\in\Theta \ \ell(ws) = \ell(w)+1 \}$$

$$r_i = \#\{ w\in W^\Theta \mid \ell(w) = i \}$$

2. Мотивы

$$A : (SmProj/_k)^{op} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}Ab$$

гладкие проектив. — град. кольца — теория когомологий (см. I. Panin)

Пример: $H^*(X,\mathbb{Z})$, $K_0(X)$, $K_*(X)$, $CH^*(X)$, $\vdots$

- $A^*(X,U) \longrightarrow A^*(X) \longrightarrow A^*(U) \longrightarrow A^{*+1}(X,U)$
- $A(X\times\mathbb{A}^1) \simeq A(X)$
- $\cup$-произведение
- ориентируемость: $A^*(\mathbb{P}^n) = \bigoplus A^{*-i}(pt)$

Manin (1968)

Строим по $SmProj/_k$ (correspondance) — категорию соответствий

Cor_A

Объекты: те же

Морфизмы: $Mor_A(X,Y) = A^*(X\times Y)$ — соответствие — морфизм в Cor_A

Композиция: $\alpha\in Mor_A(X\times Y)$, $\beta\in Mor_A(Y\times Z)$ $\rightsquigarrow$ $\alpha\circ\beta \in Mor_A(X,Z)$

$$\begin{array}{ccc}
\alpha\in A^*(X\times Y) & & A^*(Y\times Z)\ni\beta \\
& {\scriptstyle pr_{12}^*}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle pr_{23}^*} & \\
& A^*(X\times Y\times Z) & \\
& \alpha\cup\beta & \\
& \downarrow {\scriptstyle pr_{13*}} & \\
& A^*(X\times Z) & \\
& \Psi & \\
& \alpha\circ\beta &
\end{array}$$

pr_{13*} — push-forward — transfer — определено для проекций! (для соответствий)

псевдоабелева конструкция

$\mathcal{M}_A$ — кат. мотивов — pseudo-abelian — добавляем Ker и Coker

Объект: (X,p) : $p: X\longrightarrow X$: $p^2 = p$

псевдоабелева

$$\begin{array}{ccc}
SmProj/_k & \xrightarrow{A} & \mathbb{Z}\text{-}Ab \\
\exists \searrow & & \nearrow \exists! \\
& \mathcal{M}_A &
\end{array}$$

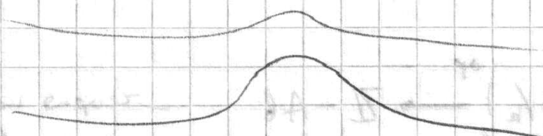
гипотеза

универсальность мотивов

Для кл.-мног. X $\quad M(X) \simeq \bigoplus M(Y_i) \otimes L^{n_i}$ — мотив Лефшеца

$$M(\mathbb{P}^n) = \underset{0}{\mathbb{Z}} \oplus \underset{1}{\mathbb{Z}} \oplus \dots \oplus \underset{n}{\mathbb{Z}}$$ — градуировка

$$M(Q_{2n}) = \underset{0}{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z} \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \underset{2n}{\mathbb{Z}}$$

$M(Gr(k,n)) =$ 

$\boxed{\text{Thm}}$ $\quad X = G/P \qquad Y = G'/Q$

$M(X) \simeq M(Y) \iff$ список нулев

$$M(\mathbb{P}^{2n+1}) \simeq M(Q_{2n+1})$$

$\mathbb{P}^{2n+1} = A_{2n-1}/P_1 = C_n/P_1$, $\quad Q_{2n+1} = B_n/P_1$

Мотивы не различают диагр. Дынкина

$W(G) = W(G')$
$W(P) \simeq W(Q)$ $\Rightarrow$ мотивы равны.

$$M(\mathbb{P}^5) \simeq M(G_2/P_2)$$